Courbe de la valeur

Hugues GENVRIN

20 juillet 2014

1 Anticipation et valeur

Nous allons dans ce qui suit interpréter la nature de la courbe de la valeur par une utilisation des taux de croissances fonctionnel et différentiel. Pour cela nous allons présenter deux textes références, bien qu'on envisagera uniquement les aspects relatifs à la courbe de la valeur, précisons que les travaux repris dépassent largement le cadre de la description de cette courbe pour soutenir des théories de la décision face au risque. Si dans le langage de Bernouilli on parlera d'utilité et d'espérance morale aussi, on retrouvera le terme de valeur chez Kahneman et Tversky qui parait plus englobant car elle est associée à une théorie des pondérations des utilités. On simplifiera la vue ici en interprétant le vocabulaire de Bernouilli et celui de Kahneman et Tversky comme une représentation finale de la satisfaction des agents, pour reprendre une terminologie économique.

1.1 Courbe de l'utilité de Bernouilli

Dans « La théorie sur la mesure du risque » [1] parue en 1738, Daniel Bernouilli présenta une courbe de l'utilité concave qui est reproduite sur la figure 1, cette description basée sur la théorie de l'utilité espérée fut à la base d'un développement important de l'économie. On rappelle que l'utilité espérée est fondée sur une notion de pondération des valeurs par leur probabilité, que l'espérance globale et la somme arithmétique de l'ensemble des utilité espérées de la situation [1]. On remarquera que les axes du repère font référence pour les abscisses à des niveaux d'unités monétaire initiaux notés x possédés ou bien atteints par les agents ; l'axe des ordonnées renvoyant par la

1. On soulignera qu'aujourd'hui l'espérance est une notion seconde par rapport à la probabilité, alors qu'au début de l'histoire des probabilités qu'on fera remonter à la seconde moitié du XVII^{e} dans sa version moderne, la notion d'espérance était première [?].

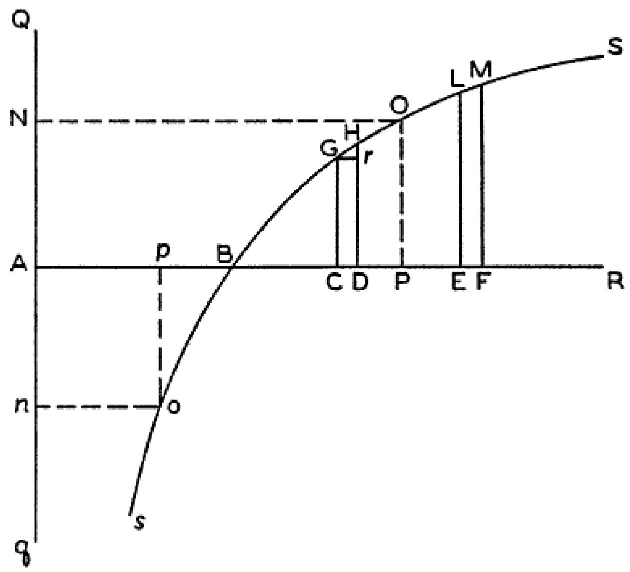

FIGURE 1 – La courbe de valeur de Daniel Bernouilli [2] (1738).

fonction d'utilité notée y un niveau d'utilité qui se veut un cadre plus large qu'une description du gain en terme d'unités monétaires, sur le graphe pour $x = \overline{AB},\ y(x) = 0$.
Dans le premier paragraphe, l'auteur explique les caractéristiques de la courbe, il prend l'exemple de deux agents s_1 et s_2 possédant respectivement des niveaux d'unités monétaires initiaux $x_1 = \overline{AC}$ et $x_2 = \overline{AE}$ tels que $x_1 < x_2$. Alors pour un même accroissement de gain $dx = \overline{CD} = \overline{EF}$ strictement positif, il suppose logiquement que la variation du niveau d'utilité vérifiera :

$$
\begin{aligned}
y(x_1 + dx) - y(x_1) &> y(x_2 + dx) - y(x_2) \\
\Rightarrow \frac{y(x_1 + dx) - y(x_1)}{y(x_1)} &> \frac{y(x_2 + dx) - y(x_2)}{y(x_1)} \\
\Rightarrow \frac{y(x_1 + dx) - y(x_1)}{y(x_1)} &> \frac{y(x_2 + dx) - y(x_2)}{y(x_2)} \\
\Rightarrow lim \left\{ \frac{y(x_1 + dx) - y(x_1)}{y(x_1)} \right\}_{dx \to 0} &> lim \left\{ \frac{y(x_2 + dx) - y(x_2)}{y(x_2)} \right\}_{dx \to 0} \\
\Rightarrow y'(x_1) &> y'(x_2)_{dx \to 0}
\end{aligned}
$$

On peut en inférer que la fonction y' est décroissante, donc sa dérivée, en l'occurrence y'' est une fonction négative pour tout $x \in (E)$, ainsi on en conclut que $\mathscr{G}$ le graphe fonctionnel de la fonction d'utilité possède une courbure concave.

La seconde caractéristique de la courbe de Bernouilli s'appuie sur l'hypothèse que le niveau d'utilité $y(x)$ est proportionnel à $\frac{dx}{x}$. Cette idée trouve pour origine l'hypothèse que les unités supplémentaires d'utilité apportées par une variation positive supplémentaire constante d'unités monétaires est une fonction décroissante de la quantité d'unités monétaires initiale. En d'autres termes :

$$\delta y = a \times \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow \int \delta y = a \times \int \frac{dx}{x}$$
$$\Rightarrow y(x) = a \times \ln(\frac{x}{b}) \mid y(b) = 0$$

Observons sur la figure 1 que l'auteur n'envisage que les pertes relatives à une décision, mais pas celles où l'agent devra prendre une décision alors qu'il se situe à un niveau d'unités monétaires initial négatif ou bien qu'il atteigne une perte absolue. Mentionnons tout de même à l'avantage de Bernouilli qu'il envisagea dans la suite de son texte des possibilités de couverture du risque par des mécanismes d'assurance, mais que ces situations ne peuvent se généraliser à toute situation de décision sous risque.

1.2 Courbe de la valeur de Kahneman et Tversky

En 1979, dans un article resté célèbre : « Prospect theory » [3], Kahneman et Tversky décrivirent des expériences dérivées de celle d'Allais, puis proposèrent de redéfinir une nouvelle courbe de la valeur : asymétrique, concave pour les gains, convexe pour les pertes absolues, plus pentue pour les pertes que pour les gains. L'article intitulé « La théorie des perspectives » sous-titré « une analyse des décisions sous risque » proposa une nouvelle courbe de la valeur. Les auteurs commencèrent par apporter des arguments logiques contre la théorie de l'utilité espérée avant de détailler des expériences qu'il menèrent, qui contredisaient sous d'autres aspects la théorie de Daniel Bernouilli. En premier lieu ils reprirent un fameux exemple qui n'était pas sans rappeler le paradoxe soulevé par Allais en 1953 [2]. On peut formaliser une classe d'exemple de ce type en considérant deux fonctions de probabilités associés aux deux univers $\Omega_1 = \{\delta y_1, \delta y_2\}$ et $\Omega_2 = \{\delta y_3\}$ les δy_i représentent des variations de niveaux de valeurs espérés tels que : $\delta y_1 < \delta y_3 < \delta y_2$, des

2. Article paru dans la revue Econometrica : « Critique des postulats de l'école américaine ».

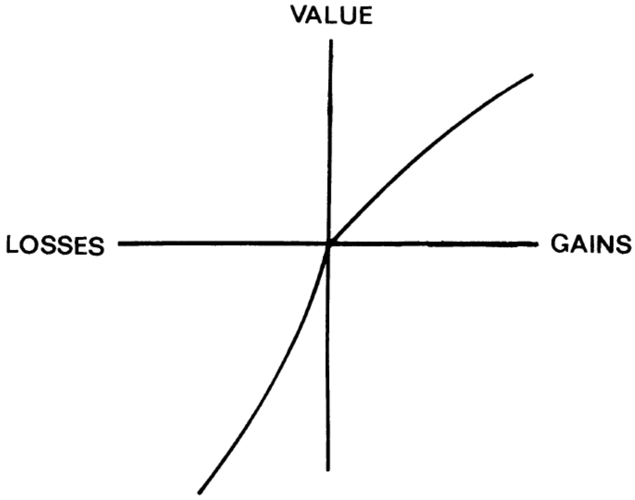

FIGURE 3.—A hypothetical value function.

FIGURE 2 – La courbe de valeur de Kahneman et Tversky [4] (1979).

niveaux d'utilités correspondants :

$$
\begin{aligned}
U_1 &= \Pr(\delta y_1) \times \delta y_1 + \Pr(\delta y_2) \times \delta y_2 \\
U_2 &= \Pr(\delta y_3) \times \delta y_3 \text{ avec } \Pr(\delta y_3) = 1 \\
&= \delta y_3
\end{aligned}
$$

On remarquera que l'évènement de la deuxième probabilité est sûr, mais que le jeu de données soit tel que $U_1 > U_2$. Or d'après la théorie de l'utilité espérée, l'agent doit maximiser son utilité espérée et se décider pour choisir la première situation. L'expérience décrite apporte un démenti à cette idée, puisque les agents préfèrent ce qui est sûr et qui rapporte, dans certaines limites modulées par les niveaux de gains et les probabilités.
Dans un deuxième temps, Kahneman et Tversky soulevèrent une idée déjà présente dans le cas ci-dessus de l'effet de certitude d'Allais, mais qui est plus flagrante lorsqu'il s'agit de la sensibilité aux pertes. Ainsi la dénomination de théorie des perspectives prenait tout son sens, sont cités également d'autres causes qui peuvent influencer les décisions : effets de privations, de reflexions, de référence. Ainsi dès qu'il s'agit d'envisager des δy négatifs, les expériences menées démontrèrent la nécessité pour le graphe fonctionnel d'une courbure convexe dans le demi-plan (SW). Un troisième temps signala une asymétrie de $\mathscr{G}$, c'est à dire que : $\forall x > 0, y(x) < -y(-x)$, la courbe était donc plus pentue pour les pertes que pour les gains.
Nous proposons dans ce qui suit une explication d'un point de vue logique qui

s'inscrit dans la continuité des applications des notions de taux de croissance différentiel et fonctionnel.

1.2.1 Propriété de convexité du graphe fonctionnel

Définition 1 (Convexité)**.** *Un graphe fonctionnel* $\mathscr{G}$ *est dit convexe sur un intervalle* I *si* $\forall M \in I$*, en appellant* $\mathscr{T}_M$ *la tangente en* M*, tout point de* $\mathscr{G}$ *se situe en-dessous du point* M' *définit par sa projection perpendiculaire sur sa tangente. Inversement elle sera dite concave, dans le cas particulier où* $M = M'$ *le graphe fonctionnel possédera un point singulier : d'inflexion si changement de convexité autour du point ou rebroussement si la convexité est de même nature.*

On prend le cas d'un graphe fonctionnel se déployant dans les demi-plans (SW) et (NE) exclusivement, on appelle $B(x, \epsilon)$ un voisinage de centre x.

Proposition 1. *Si la courbe est convexe dans le demi-plan*(S) *et concave dans* (N)*, cela est équivalent à dire que* $\tau_{/y} > \tau_y$*.*

Soit le cas où $\mathscr{G} \bigcap (SW)$ est convexe et $\forall dx \in B(x, \epsilon)$:

$$\begin{aligned}
/y(x+dx) &< y(x+dx) \\
\Leftrightarrow /y(x+dx) - dy(x) &< y(x+dx) - y(x) \\
\Leftrightarrow \frac{/y(x+dx) - dy(x)}{dy(x)} &> \frac{y(x+dx) - y(x)}{y(x)} \\
\Leftrightarrow \tau_{/y,dx}(x) &> \tau_{y,dx}(x)
\end{aligned}$$

Soit le cas où $\mathscr{G} \bigcap (NE)$ est concave, et $\forall dx \in B(x, \epsilon)$, on sait que $/y(x) = y(x)$ car la tangente est prise au point d'abscisse x.

$$\begin{aligned}
/y(x+dx) &> y(x+dx) \\
\Leftrightarrow /y(x+dx) - y(x) &> y(x+dx) - y(x) \\
\Leftrightarrow \frac{/y(x+dx) - /y(x)}{/y(x)} &> \frac{y(x+dx) - y(x)}{y(x)} \\
\Leftrightarrow \tau_{/y,dx}(x) &> \tau_{y,dx}(x)
\end{aligned}$$

On conclut donc que la proposition énoncée est valide. On a donc une traduction dans les termes d'une inégalité relativement simple de la propriété de la courbe de valeur.
A titre indicatif, on renseigne le tableau suivant qui généralise les propriétés de la courbure en fonction des demi-plans (N) et (S). Voici rapportées dans le tableau ci-dessous les convexités en fonction du demi-plan et du rapport des taux de croissance fonctionnel et différentiel :

	Convexité	Concavité
N	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$
S	$\tau_{/y,dx} > \tau_{y,dx}$	$\tau_{/y,dx} < \tau_{y,dx}$

Lemme 1. *La courbe de valeur expérimentale dite courbe en $\mathscr{S}$: concave sur le demi-plan (NE) convexe sur (SW), plus pentue pour les pertes que pour les gains vérifie les deux conditions nécessaires et suffisantes :*

1. *$\forall x, dx$ fixé $\in \mathbb{R}^* : \tau_{/y,dx}(x) > \tau_{y,dx}(x)$,*
2. *$\forall x \in \mathbb{R}^+{}_*, \forall dx$ fixé $\in \mathbb{R}* : \tau_{/y,dx}(x) < -\tau_{/y,dx}(-x)$*

2 Interprétation extensive pour la courbe de valeur

On signifie ici qu'on s'oriente vers un passage au au niveau psychologique, qui va prendre la forme d'une analyse de la satisfaction. Or qu'est-ce que la satisfaction à partir d'une situation donnée, sinon la relation d'une anticipation rapportée au réel.
Ainsi définie on peut associer des critères géométriques en relation avec les valeurs de la satisfaction. Un sujet sera satisfait si son anticipation lui est moins favorable que la réalité, et il ne le sera pas si son anticipation lui est plus favorable que la réalité. C'est une notion relative de la satisfaction qu'on utilise pour expliquer la forme géométrique du graphe fonctionnel.
Le taux différentiel donne une excellente représentation de ce que peut être l'anticipation par rapport à un point de référence donné ; le taux fonctionnel rendant compte de la réalité.
Il apparaît naturel que la fonction de valeur soit convexe pour les pertes et concave pour les gains : car le sujet escompte un niveau d'anticipation de la valeur (le taux différentiel) supérieur à ce que la réalité présentera (en terme de taux fonctionnel). Pour les pertes cela s'explique par des mécanismes de peur, de défense. Pour les gains, la concavité de courbe offre l'avantage d'une diminution tendant vers zéro pour la différence des taux, si bien que le sujet est moins sensible à cet écart. L'asymétrie de la pente étant largement expliquée dans l'article de Tversky et Kahneman : on est plus sensible aux pertes qu'aux gains ». Ainsi on rattache la fonction de valeur à l'anticipation que le sujet en fera par sa perception différentielle du taux de croissance en regard de taux de croissance fonctionnel.

Proposition 2 (Attitude psychologique associée à la courbe de valeur en $\mathscr{S}$)**.** *La courbe de la valeur en $\mathscr{S}$ est la traduction graphique d'une attitude* *psychologique qui va surestimer le taux de croissance fonctionnel en l'anticipant au niveau du taux de croissance différentiel. Il marque une sur-confiance pour les gains qui est atténuée par une concavité plus marquée pour les abscisses croissantes, et une aversion à la perte qui rend la convexité plus pentue pour les abscisses négatives.*

Références

[1] Bernouilli D. Exposition of a new theory on the measurement of risk, 1954. Reprinted from the orginal article.

[2] Bernouilli D. Exposition of a new theory on the measurement of risk, 1954. Reprinted from the orginal article.

[3] Kahneman D. Tversky.A. Prospect theory : An analysis of decision under risk (1979). In *Preference, Belief and Similarity, Selected writings Amos Tversky*, pages 549–581. The MIT Press, 2004.

[4] Kahneman D. Tversky.A. Prospect theory : An analysis of decision under risk (1979). In *Preference, Belief and Similarity, Selected writings Amos Tversky*, page 567. The MIT Press, 2004.