

Introduction à la théorie des espaces quantiques

Hugues GENVRIN

15 novembre 2017

1 Rectification du cercle

Nous nous proposons d'interpréter la rectification du cercle à partir de la quadrature du cercle réalisée en 2008.

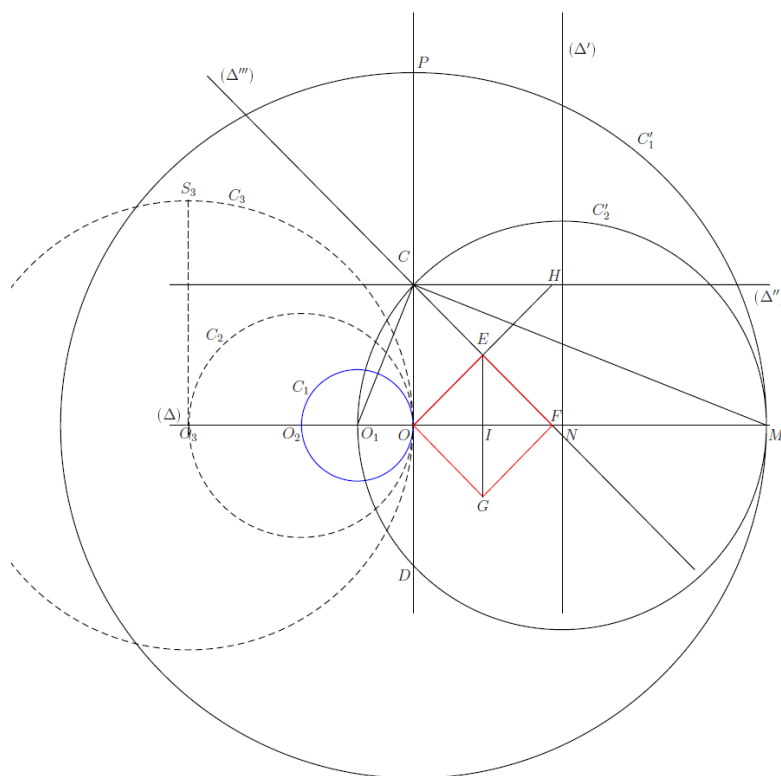


FIGURE 1 – Quadrature du cercle.

2 Interprétation

2.1 Dilatation et double dilatation de zéro

Nous nous donnons un composant élémentaire O_r que nous nommons point, de mesure nulle. Nous lui attribuons une capacité à se dilater sur deux niveaux, de sorte que :

$$\begin{aligned}d(O_r) &= | \iota_{\mathbf{r}} \rangle, \\d^2(O_r) &= d(| \iota_{\mathbf{r}} \rangle) = | \iota_{\mathbf{r}+1} \rangle.\end{aligned}$$

La rectification du cercle nous montre que le cercle à l'infini équivalent à une grande droite à l'infini, se rend aussi équivalent à une concaténation infinie, plus exactement deux puissance l'infini, dilatations élémentaires. On a donc :

$$d^2(O_r) = d(| \iota_{\mathbf{r}} \rangle) = K' \cdot | \iota_{\mathbf{r}} \rangle.$$

Néanmoins, $K' \cdot | \iota_{\mathbf{r}} \rangle$ est dans le même rapport à $d(O_r)$ que $d(O_r)$ l'est par rapport à O_r . Donc, cette double dilatation de O_r n'est pas équivalente à une homothétie de rapport fini.

D'autre part, sachant que nous avons montré dans la construction des nombres complexes qu'on pouvait réduire la base à un seul vecteur. Alors $(| \iota_{\mathbf{r}+1} \rangle)$ décrit un espace complexe qui ne peut être qu'orthogonal à $(| \iota_{\mathbf{r}} \rangle)$, puisque ι_r représente une quantité amorphe relativement à ι_{r+1} . Nous avons donc la transformation $d^2(O_r) = d(| \iota_{\mathbf{r}} \rangle)$ qui doit être équivalente à une dilatation rotatoire de $\frac{\pi}{2}$.

Si bien que l'homothétie externe, de rapport non fini K' est équivalente à une dilatation rotatoire. On associe ainsi cette opération de dilatation d'ordre 2 à l'application d'un opérateur vectoriel :

$$\begin{aligned}| \iota_{\mathbf{r}+1} \rangle &= A | \iota_{\mathbf{r}} \rangle \\&= \iota_r * | \iota_{\mathbf{r}} \rangle \\&= K' \cdot | \iota_{\mathbf{r}} \rangle.\end{aligned}$$

2.2 Création des nombres entiers transfinis

On se donne les nombres entiers finis numérotés en base deux. Une homothétie de rapport k d'un vecteur $| \iota_{\mathbf{r}} \rangle$ nous autorise d'indexer k vecteurs $| \iota_{\mathbf{r}}^k \rangle$ juxtaposés. Suivant la formule du binôme de Newton, l'ensemble des

parties d'un ensemble numéroté en base deux contient 2^k éléments. Passons à la notion d'infini, on appelle K le plus petit ensemble d'entiers capable d'indexer les éléments d'un ensemble à $K' = 2^{\#K}$ éléments, tel que :

$$| \iota_{r+1} \rangle = 2^{\#K} | \iota_r \rangle \equiv | \iota_{r+1} | \perp | \iota_r | .$$

La quantité $2^{\#K}$ devient alors la valeur propre associée au vecteur $| \iota_r \rangle$ par l'action de $| \iota_r \rangle$:

$$\iota_r * | \iota_r \rangle = 2^{\#K} | \iota_r \rangle .$$

Cette valeur existe au sens algébrique puisque $2^{\#K}$ autorise d'indexer les éléments juxtaposées, suivant notre homothétie de rapport non fini à partir de la quantité :

$$\mathcal{I}_r = \log_2(2^{\#K}) = \#K$$

C'est une quantité d'information.

Théorème 1 (Première valeur transfinie). *La valeur propre de l'opérateur de dilatation rotatoire est la première valeur transfinie, notée $\infty_1 = 2^{\#K} = 2^{\mathcal{I}_r}$ qui est la puissance d'un ensemble par extension (du grain).*

Théorème 2 (Seconde valeur transfinie). *On appelle seconde valeur transfinie et on note $\infty_1 = \mathcal{I}_r$.*

Relativement à $| \iota_{r+1} \rangle, | \iota_r \rangle$ est équivalent à l'unité 1_{r+1} de l'espace complexe supporté par $(| \iota_{r+1} \rangle)$.

Pour se représenter le continu linéaire o , nous appliquons une homothétie de rapport $\frac{1}{2^{\#K}}$ à l'ensemble $d^2(O_r) = d(| \iota_r \rangle) = 2^{\#K} | \iota_r \rangle$. On construit alors un ensemble de nombre réels distincts à $\infty_1 = 2^{\#K}$ éléments, décrivant exactement le continu linéaire.

Nous nous représentons ces différentes variétés dans une sphère S_2^h ;

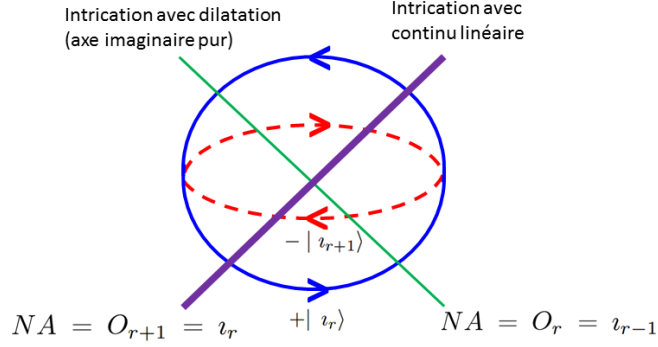


FIGURE 2 – Sphère S_2^h

3 Le cercle est le dilaté de son diamètre

Soit $S_2^h = |\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle^\circ \times |\iota_{\mathbf{r}}\rangle^\circ$ naturellement munie du couple de niveau d'agraindissement $NA^* = (O_r \times O_{r+1})$. Procédons à une dilatation homogène, c'est à dire qui conserve le rapport $\frac{|\iota_{\mathbf{r}+1}|}{|\iota_{\mathbf{r}}|} = 2^{I_r}$; sachant qu'on garde aussi le NA^* . Alors :

$$|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle^\circ \times |\iota_{\mathbf{r}}\rangle^\circ \longmapsto |\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle^\circ \times |\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle^\circ.$$

Cela est équivalent à déterminer des grands cercles à l'infini, eux-mêmes équivalents à des rectifications (sous la forme de grandes droites). Ces deux droites définissent deux plans $\mathcal{P}(|\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle, O_{r+1})$ et $\mathcal{P}(|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle, O_r)$. Par l'application d'une rotation de $\frac{\pi}{2}$ en conservant le $NA = O_r, |\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle$ forme le diamètre de $|\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle$. La forme est équivalente à un grand cercle à l'infini $|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle$ inscrite dans le grand cercle à l'infini $|\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle$.

En passant au $NA^* = (O_{r+2} \times O_{r+1})$, qui est une transformation homogène, $|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle$ reste le diamètre de $|\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle^\circ$. Par une contraction réciproque à la dilatation originelle, $|\iota_{\mathbf{r}}\rangle$ est donc le diamètre de $|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle^\circ$.

On précise que l'autre cas où nous aurions projeté $|\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle$, est impossible, puisque $|\iota_{\mathbf{r}+1}\rangle \subset |\iota_{\mathbf{r}+2}\rangle$.

Théorème 3. *Tout cercle est la dilatation de son diamètre.*

Une application triviale est que pour le cercle $|\iota_r\rangle^\circ$ de diamètre $|\iota_{r-1}\rangle^|$ on a évidemment $|\iota_r| = \pi |\iota_{r-1}|$.

4 Formes d'équivalences principales

Dilatons deux fois le grain 0_r , alors il vient la relation d'équivalence :

$$2^{I_r} d |\mathbf{0}_r\rangle \equiv 1[0_{r+1}] = 0[0_{r+2}].$$

Cela soulève une question importante. Si nous procédons à une contraction s'appliquant sur les mesures respectives par la fonction logarithme népérien, nous trouvons que :

$$I_r \ln 2 |\mathbf{d0}_r\rangle \equiv 0[0_{r+1}].$$

Maintenant, sur des directions d'échelles rectilignes, qui se confondraient, cette équivalence ne tiendrait pas. Cherchons une condition suffisante pour assurer ce résultat.

Soit l'espace $S_2^h = |\mathbf{0}_{r+1}\rangle^\circ \times |\mathbf{0}_{r+2}\rangle^\circ$, muni du couple de niveau d'agraindissement $NA^* = (0_r; 0_{r+1})$. Nous décrivons le cercle $|\mathbf{0}_{r+2}\rangle^\circ$ par le vecteur curviligne $[2^{I_r} d |\mathbf{0}_r\rangle^|]^\circ$.

Autrement dit, nous décrivons ce cercle par rapport au grain 0_r dilaté. Nous savons que la contraction de ce cercle $|\mathbf{0}_{r+2}\rangle^\circ$ renvoie vers son diamètre qu'on approche de deux manières. Tout d'abord on sait que la mesure de longueur de la contraction de $|\mathbf{0}_{r+2}\rangle^\circ$ vaut $I_r \ln 2$ en unité de grain $|\mathbf{0}_r\rangle$. D'autre part le diamètre de $[2^{I_r} d |\mathbf{0}_r\rangle^|]^\circ$ est équivalent au diamètre de $|\mathbf{0}_{r+1}\rangle^\circ$ qui vaut bien évidemment $|\mathbf{0}_r\rangle^|^\circ = 1 |\mathbf{0}_r\rangle^|^\circ = 0[0_{r+1}]$.

On a bien alors :

$$\boxed{I_r \ln 2 |\mathbf{0}_r\rangle \equiv 0[0_{r+1}]}.$$

On déduit que la sphère S_2^h est une condition suffisante pour assurer la conservation de la relation d'équivalence de gauche, par contraction des mesures en conservant l'unité de l'échelle.

Mise en évidence d'une échelle de dilatation exponentielle Reprenons l'équivalence $1[0_{r+1}] \equiv 0[0_{r+2}]$. Alors par contraction de la mesure et non l'échelle, on trouve $0[0_{r+1}] = \ln 0[0_{r+2}]$. Or :

$$0[0_{r+1}] \equiv 1[0_r] \Rightarrow 1[0_r] \equiv \ln 0[0_{r+2}].$$

En appliquant la réciproque de la fonction logarithme népérien, soit la fonction exponentielle, on tire que :

$$\exp(1)[0_r] \equiv 0[0_{r+2}].$$

On met donc en évidence une deuxième échelle de dilatation qui est de nature exponentielle. En mesure de longueur :

$$\begin{aligned} \exp(0)[0_r] &\longmapsto 0[0_{r+1}] \\ \exp(1)[0_r] &\longmapsto 0[0_{r+2}] \end{aligned}$$

En passant à l'écriture en dilaté :

$$\exp(\iota_r) = \iota_{r+1} \Rightarrow \exp(\pi \iota_{r-1}) = \iota_{r+1}$$

5 Application à la théorie des réels

5.1 Interprétation en théorie des ensembles

5.1.1 Représentation rectifiée

On retient tout d'abord la combinaison de dilatations suivante $C(2^{n+\infty}, | \iota_r \rangle)$. Sur $(\Delta^{\circ|})$, on a représenté les $2^{n+\infty}$ élément dilatés, sur une échelle de $NA = [0_r]$, qui figure également les $2^{n+\infty}$ éléments $[0_{r+1}]$.

En rapportant l'échelle au $NA[0_{r+1}]_d$, $[0_{r+1}]_d$ se transforme en un grain équivalent au NA , il est un composant élémentaire. D'autre part, $2^{n+\infty}[0_{r+1}]_d$ devient équivalent à $2^{n+\infty}$ composants élémentaires concaténés. $2^{n+\infty}[0_{r+1}] \equiv 1_{r+2}$ est douée d'une mesure de longueur unitaire $\overline{1}_{r+2}$.

Pour mettre en évidence les éléments du continu linéaire, on se donne les quantités $[0_{r+1}]_k$ sur une échelle de 1 à $2^{n+\infty}$ en base deux : $[0_{r+1}]_d^k \longmapsto \bar{k}_2 = \sum_{j=0}^{n+\infty} b_j(k)2^j$. En divisant l'ensemble des quantités dans la liste formée, par $2^{n+\infty}$, on construit un ensemble de nombre de $[0; 1]$ en base deux possédant n décimales : $\bar{k}_2 \longmapsto \sum_{j=0}^{n+\infty} b_j(k)2^{j-n+\infty} = (\bar{x}_k)_2$. Á ce stade, on remarque que la mesure de longueur $(\bar{k})_2$ correspond en base deux à la mesure de comptage.

Théorème 4 (Équivalence de mesures). *Les éléments de la rectification du cercle, numérotés en base deux, désignent autant une mesure de longueur qu'une mesure de comptage.*

Nous avons 2^{n_∞} quantités, toutes distinctes les unes des autres. En conséquence, c'est bien le continu linéaire que nous décrivons ici, puisque cet ensemble possède la puissance du continu. Nous passons le facteur 2^{n_∞} dans l'augmentation de la taille de $1_{r+1} \mapsto 1_{r+2}$.

Théorème 5 (D'équivalence entre l'infini et le continu linéaire).

$$k \times \overline{1_{r+1}} \mapsto \overline{(x_k)_2} \times 1_{r+2}, k \in \{1, 2^{n_\infty}\}.$$

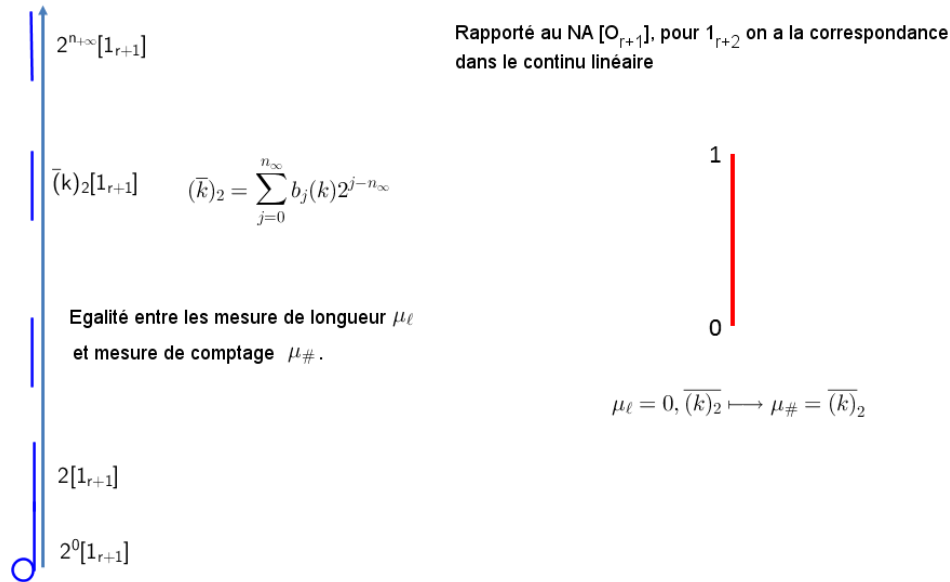


FIGURE 3 – Équivalence des mesures de longueur et de comptage.

5.1.2 Représentation circulaire (cf. figure 6)

La combinaison, est une représentation de la dilatation finalisée, c'est un grand cercle à l'infini rectifié. Il est intéressant de se figurer une représentation sur une forme circulaire. Les élément $[O_{r+1}]_d = d | O_r \rangle$, sont autant des éléments rectifiés que circulaire, en tant que dilatés. Il est naturel de retrouver 2^{n_∞} cercles élémentaires sur le cercle à l'infini. En ce cas, le diamètre des cercles élémentaires vaudra $\overline{1_r}$. Ce qui est conforme à l'autre antécédent de

la dilatation de O_r . Si on considère le cercle à l'infini, il a pour diamètre $\overline{1_{r+1}}$ qui est la mesure du polygone inscrit dans le grand cercle à l'infini à $2^{n+\infty}$ sommets. Soit le grand cercle à l'infini vaudra $|v_{r+1}\rangle$ équivalent en amorphe à un cercle de circonférence $\overline{1_{r+2}} = 2^{n+\infty} \overline{1_{r+1}}$. On déduit alors que les arcs élémentaires sont de mesure de longueur $\overline{1_{r+1}}$. Nous retrouvons bien les éléments du rectifiés sur la figure circulaire. Nous avons tracé sur le graphique ci-dessous les éléments, sans tenir compte de l'échelle.

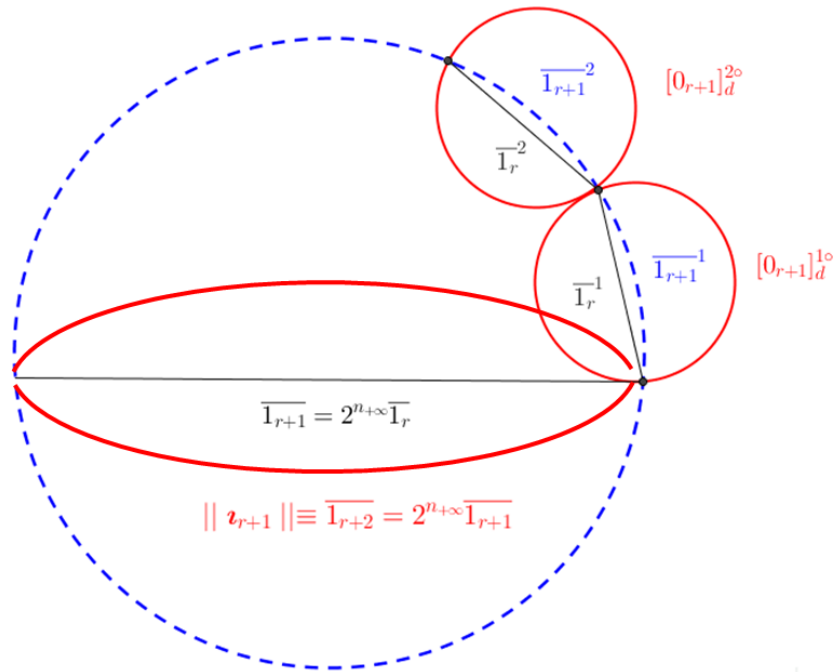


FIGURE 4 – Représentation circulaire

Le polygone inscrit à $2^{n+\infty}$ sommets construit à partir des points de jonction se trouve indiscernable du cercle de mesure de longueur $2^{n+\infty} \overline{1_{r+1}}$, nous avons donc une dualité de l'étendue et une équivalence modulo le grain entre 1 et $2^{n+\infty}$.

De ce qui précède on déduit que l'infini construit à partir de l'unité de grain $r + 2$ est un continu linéaire de grain $r + 1$. Pour le continu linéaire, la quantité après la virgule désigne aussi la mesure de longueur tout autant que la mesure de comptage divisée par $2^{n+\infty}$ (cf. figure 5).

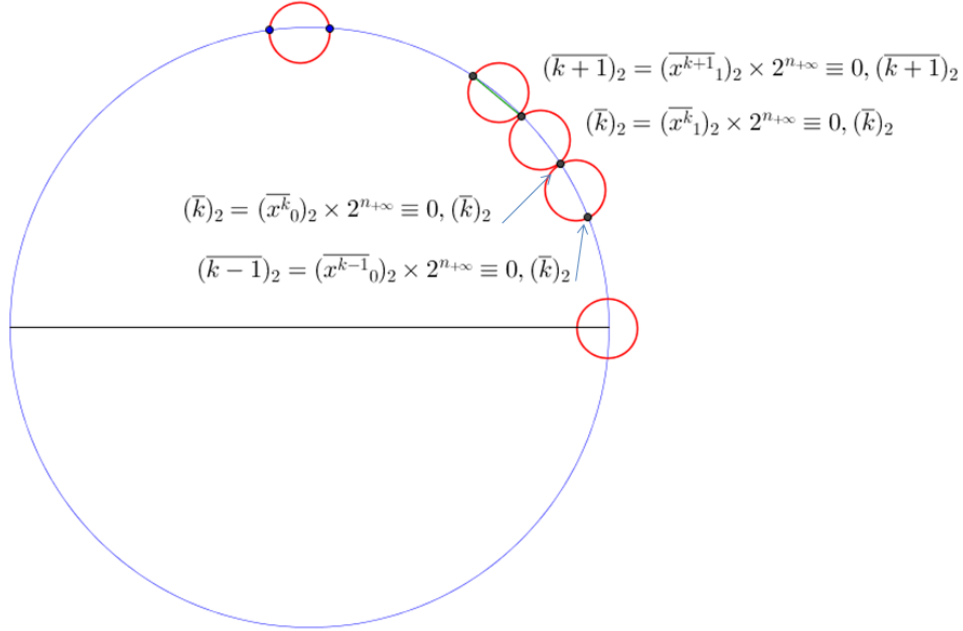


FIGURE 5 – Équivalence des mesures de longueur et de comptage.

5.1.3 Représentation des nombres et des mesures

Considérons le cercle de mesure $\overline{1_{r+1}}$ et de $NA[0_r]$. Alors il existe trois antécédents par la contraction du cercle. On a la réciproque de la dilatation de zéro qui fait de $[0_r]$ une première image. Les deux autres sont : le diamètre du cercle et le polygone inscrit dans le cercle. Ce dernier de mesure de longueur $n_\infty \ln(2)[0_r]$ définit le support pour se figurer un élément numérique du grain $[0_{r+1}]$ dont les chiffres auront une épaisseur contractée d'un facteur $\ln(2)$. Autrement dit, lorsque nous écrivons que $\overline{1_{r+1}} \equiv [0_{r+1}]$, cela renvoie à une distinction géométrique entre le cercle $\Delta^{\circ|}$ et le polygone inscrit. La dilatation du polygone inscrit qui est de mesure $e^{n+\infty \ln(2)}[0_r] = 2^{n+\infty}[0_r]$ matérialise le continu $\overline{1_{r+1}}$. Nous réitérons cette construction suivant un chaînage avant et arrière pour construire les nombres, les mesures de longueur unitaire et infinie ainsi qu'il est indiqué sur la figure.

le $NA = O_r$. Si nous appliquons une homothétie interne $h_i : O_r \mapsto O_{r+1}$, nous mettons en évidence une structure.

Tous les composants élémentaires de 1_{r+1} sont transformés en vecteurs sur une droite à l'infini, qui coïncide avec le cercle à l'infini. En conséquence, on prend en compte les arcs de cercles, équivalents des vecteurs, qu'on ordonne et indexe. Les arcs définissent alors des cordes qui sont les contractions de 1_{r+1} , soit des segments de mesure 1_r . On s'appuie sur ces cordes en tant que diamètre pour définir des composants élémentaires circulaires de mesure de longueur 1_{r+1} . Si on isole une paire de composants adjacents, nous voyons que les deux grains sont intriqués par un grain 0_r , qui est aussi le point de tangence entre les deux cercles.

Il est alors clair, qu'en procédant à une partition quelconque du système $R = h_i(1_{r+1})$ en deux sous-ensembles A_1 et A_2 de composants élémentaires, tels qu'ils forment une partition de R , alors il existera deux composants de jonctions entre A_1 et A_2 . On observera que la réciproque d'une jonction par h_i correspond exactement à la mesure d'angle. Si nous revenons à la droite à l'infini, par la réciproque de h_i , on obtient une véritable coupure du continu linéaire en deux sous ensembles.

Nous voyons que par l'homothétie interne h_i , les jonctions sont autant de coupures dans le sens de Dedekind, avec une modération sur la constructibilité de celles-ci dans l'espace initial, réciproque. En effet, il pensait implicitement pouvoir définir tous les réels avec des coupures dans le NA de référence, ce qui n'est pas possible. Les images réciproques des jonctions sont alors imbriqués dans le NA précédent le NA de référence. On ne peut identifier les coupures. On ne prétendra pas à faire une coupure en scindant un composant élémentaire en deux, on ne coupe pas un réel en deux.

Théorème 6. *Les jonctions sont exactement les coupures, qui établissent une partition d'un ensemble réel en deux sous-ensembles.*