

Fondement de la réalité quantique

Hugues GENVRIN

27 juin 2018

1 Introduction

Les fondements de la théorie de la mécanique quantique reposent sur la théorie axiomatique développée en 1925 par Jordan et Born. Cette méthode axiomatique s'appuie sur des espaces mathématiques, d'ordres algébriques et fonctionnels très abstraits. Le fait qu'on se positionne dans le corps des complexes pour traiter des grandeurs quantiques rend l'objet très énigmatique. Les probabilités qui font le relais entre la théorie et son utilisation pragmatique paraissent comme un défi à l'imagination. Ce grand écart avec les théories physiques issues de l'âge classique, va jusqu'à contredire en son fondement même la logique aristotélicienne, qui servit de base pour le développement des sciences, de la philosophie de notre civilisation.

Pourtant, la mécanique quantique fonctionne, elle n'a même jamais été mise en défaut, même dans de fameuses expériences de pensées qui ont été expérimentées depuis une trentaine d'années. L'enjeu de ce chapitre est de poser de nouvelles conditions d'intelligibilité de la mécanique quantique en s'appuyant sur le concept de réalité. Son corrélat immédiat est alors aussi de rendre plus compréhensible les entités abstraites utilisées que sont les espaces mathématiques, l'usage des complexes et des probabilités. On voit que nous sommes à mi-chemin entre une démarche philosophique, mathématique et physique en espérant poser les jalons d'une nouvelle compréhension du monde. Nous aborderons notre développement par l'exigence d'une construction mathématique du plan complexe, des espaces algébriques et fonctionnels et des lois de probabilités, puis nous appliquerons ces résultats à la mécanique quantique.

2 Création du plan complexe

2.1 Double rectification

On se donne C_0 , que nous rectifions par des dilatations successives, qui aboutissent à construire le cercle à l'infini C_∞^0 . On sait que le diamètre du cercle se dilate aussi en le cercle. Si nous prenons le diamètre de C_0 , il se dilate en le cercle à l'infini, mais alors aussi en son équivalent C_1 , représentant circulaire (fini), qui est orthogonal au plan de la rectification. En réitérant l'opération de rectification pour C_1 cette fois-ci, mais sans construire le cercle équivalent fini, on intrique alors deux espaces $B_{-1}^* : (\iota_r; \iota_{r+1})\mathcal{R}_i(\iota_{r+1}; \iota_{r+2})$.

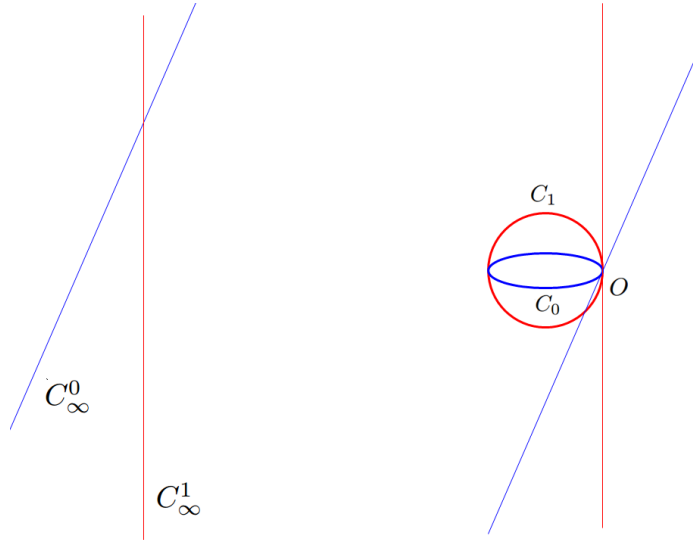


FIGURE 1 – Double rectification.

Maintenant, considérons l'espace d'équivalence pris sur $(C_0, C_1, C_\infty^0, C_\infty^1)$. On en tire un espace de projection particulier, où l'ordonnée se dilate. On retrouve :

1. l'origine O équivalent à $(0_r^i; 0_{r+1}^i)$.
2. la sphère hétérogène B_{-1}^* qui est équivalent à h_r ou encore à 0_{r+1}^h ,
3. le cercle à l'infini $C_\infty^1 \equiv \iota_{r+2}$.

On voit qu'en se donnant $B_0^* = (\iota_r; \iota_{r+1})\mathcal{R}_i(\iota_{r+1}; \iota_{r+2})$ sous cet espace d'équivalence, où l'on joue sur le représentant ι_{r+2} que nous pouvons déduire un espace de projection sur le plan $\mathcal{P}(\iota_r \times \iota_{r+1})$ d'origine 0_r^h .

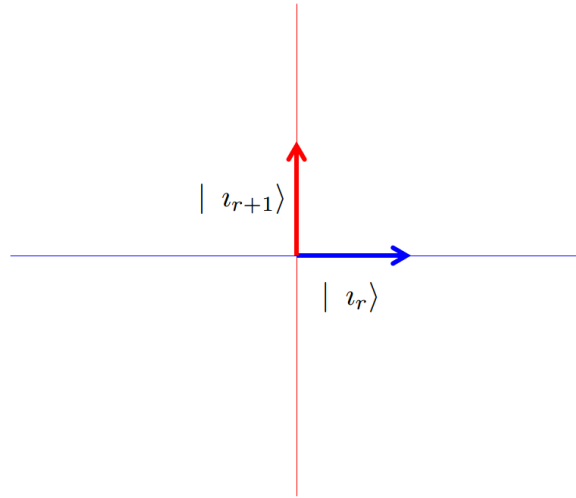


FIGURE 2 – Plan d'équivalence.

2.1.1 Construction du plan complexe

Nous prenons alors le plan complexe comme espace projectif d'équivalence puisque les dilations pour passer de v_{r+k} à v_{r+k+1} sont égales : $\forall k : \frac{v_{r+k+1}}{v_{r+k}} = 2^{n+\infty}$. C'est à dire qu'on simplifie la représentation de notre espace, dont la base se réduit à $\mathcal{B} = (|1\rangle, |i\rangle)$.

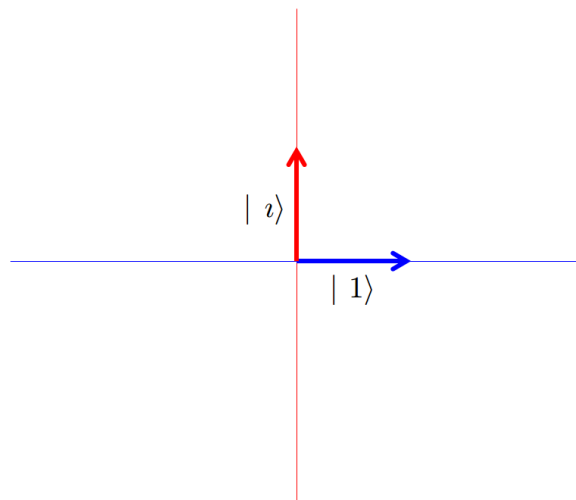


FIGURE 3 – Plan complexe.

On se figure en rouge un complexe $|\phi\rangle = a + ib$ qui représente une distorsion par rapport à la réalité $h_r = (i_r, i_{r+1})$, on sait que $|\phi\rangle = \rho e^{i\theta}$, qui se rend alors par une similitude de $B_{-1}^*[(1; i)]$ de rapport ρ et d'angle θ .

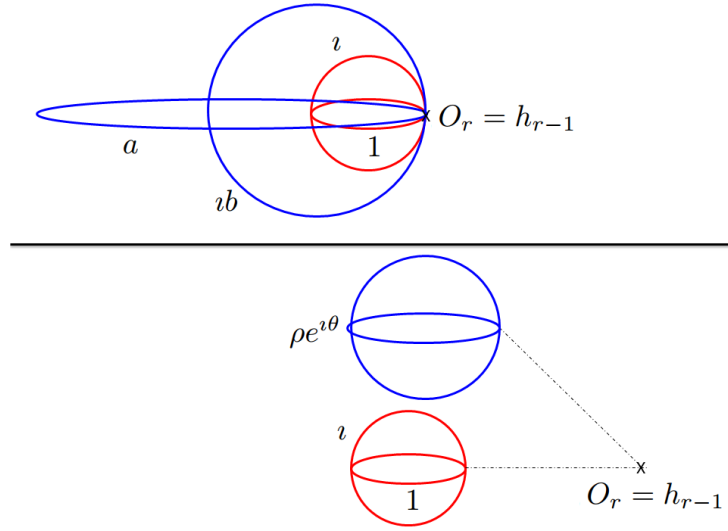


FIGURE 4 – Plan complexe et espaces $E(B_{-1})$.

Alors dans l'espace $E(B_{-1}^*)[|\phi\rangle]$, on définit $|\phi\rangle$ comme un être transectionnel, autrement dit qui se propage avec le retournement de la réalité d'origine $h_{r-1} \cong 0_r^h$. Quelque soit $\phi \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ il existe un espace $E(B_{-1}^*)$ où il se définit comme un être transectionnel, qui se propage avec le retournement de la réalité d'origine.

3 Référentiels et images de la réalité

3.1 Référentiels

Définition 1. *Un référentiel est constitué d'un ancrage, d'une origine et d'un espace de déploiement.*

Par rapport au référentiel d'Ampère, ou au trièdre cartésien, l'ancrage remplace le repère, il est dynamique, animé d'une rotation dilatatoire dans notre cas. Le système sera ancré dans une réalité, et se déploiera dans espace bien précis, servira d'espace d'équivalence pour se représenter la propagation de l'image de la réalité.

Si le déploiement est intriqué avec l'ancrage, ou avec l'origine, l'ancrage et l'origine correspondront à des images de la réalité dans un état immédiatement inférieur.

Certes, nous avons des espaces intriqués, qui présentent alors un déterminisme pour des vecteurs constants. Or la réalité montre bien évidemment des variations d'états systémiques. Le référentiel est prendre comme un canevas ou la réalité se déploie. Mais le système attaché au référentiel conserve la liberté d'exploiter tout l'espace de déploiement.

Voici des exemples de référentiels :

1. $\mathcal{R}_1 = \{0_r^h; h_r; h_r \mathcal{R}_i h_{r+1}\}$ qui est équivalent à l'espace complexe ou encore à $E(B_{-1}^*)[h_r]$.
2. $\widehat{\mathcal{R}}_1 = \{0_r^h; \widehat{h}_r; h_r \widehat{\mathcal{R}}_i h_{r+1}\}$ qui représente l'espace induit.
3. $\mathcal{R}_3 = \{0_{r+1}; (v_{r+1}, v_{r+1}^\perp); (v_{r+2}, v_{r+2}^\perp)\}$ est un référentiel rattaché à l'espace homogène, sphérique ou euclidien. Ce référentiel est compatible avec la propagation de la quantité de mouvement.

La dynamique d'un système devient une pseudo-dynamique prise dans des espaces d'équivalence de l'image de la réalité qui se propage, autrement dit, dans le référentiel retenu.

3.1.1 Images de la réalité qui se propage

Si nous juxtaposons différentes images de la réalité nous composons des images intriquées ou adjacentes. Soit le graphique ci-dessous ou nous représentons trois images de la réalité :

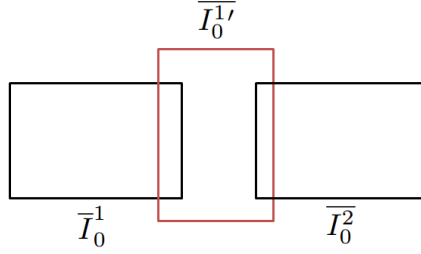


FIGURE 5 – Images de la réalité qui se propage.

Où :

1. $\overline{I}_0^1 = (\iota_r; \iota_{r+1}; \iota_{r+2})$,
2. $\overline{I}_0^{1'} = (\iota_{r+1}; \iota_{r+2}; \iota_{r+3})$,
3. $\overline{I}_0^2 = (\iota_{r+2}; \iota_{r+3}; \iota_{r+4})$.

Les images intriquées sont :

1. \overline{I}_0^1 et $\overline{I}_0^{1'}$,
2. \overline{I}_0^1 , $\overline{I}_0^{1'}$ et \overline{I}_0^2 ,
3. $\overline{I}_0^{1'}$ et \overline{I}_0^2 .

Tandis que \overline{I}_0^1 et \overline{I}_0^2 forment deux images adjacentes, on perd l'intrication en ι_{r+1} . Par exemple, la propagation de la réalité ancrée à B_{-1}^* revient à déterminer des images adjacentes, si nous avons des images intriquées, on augmenterait le grain d'ancrage.

Nous retenons ici comme grain de la réalité qui se propage B_0^* qu'on prend sous la forme du plan complexe projectif, et qu'on note \overline{I}_0 . Le complexe $|\phi\rangle$ qu'on note $a + ib$ traduit l'expression d'une seule coordonnée réelle qui se propage dans l'espace induit de l'image retenue : $E(B_{-1}^*)[|\phi\rangle]$. Elle est donc intriquée à ce niveau.

$$|\phi\rangle : \rho \mapsto \rho \cos \theta \mapsto \iota \rho \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \iota \rho \sin \theta.$$

Le premier passage : $\rho \mapsto \rho \cos \theta$ marque la construction de $E(B_{-1}^*[[\phi]])$, par la rotation d'angle θ . Qu'est-ce-qu'une rotation d'angle θ . On sait que h_r définit la brisure de symétrie du néant, et du zéro. La grandeur traduit l'émergence d'une réalité ancrée en 0_r^h . La rotation d'angle θ traduit aussi l'induction de la réalité h_r telle que $|\phi\rangle$, se propagera avec la propagation de cette réalité induite. On remarque que les rotations de l'espace $E(B_{-1}^*[[\phi]])$ ne conserve pas les mesures de longueur des méridiens et parallèles sur le tore de collier nul.

Le second passage qui dénote l'intrication dans l'image : $\cos \theta \mapsto \iota \sin \theta$, marque l'application d'une rotation dilatatoire d'angle $-\frac{\pi}{2}$. On remarque que nous n'avons pas une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dont l'orientation reste une convention.

4 Fondement analytique des espaces algébriques et fonctionnels

4.1 Espace vectoriel sur le corps des complexes

À partir de l'ontologie Soit un ensemble d'êtres transectionnels, qui sont des êtres en soi ou des prédicats, où par exemple $\widehat{t}_1 = (\overline{t}_1^1, \overline{t}_1^2)$ sont des représentants de l'être pris sur deux retournements distincts de l'espace d'ancrage.

Vers la notion de groupe. Nous supposons que pour l'être \overline{t}_1^1 on puisse définir $-\overline{t}_1^1$, implicitement l'être symétrique de \overline{t}_1^1 . De plus on considère la construction d'un meta-être composé des êtres \overline{t}_1^1 et \overline{t}_2^1 . Cette loi représente alors une loi de composition interne dans l'espace des êtres transectionnels. Elle est bien évidemment réflexive, symétrique et transitive, elle de plus commutative. Sachant qu'on définit un être transectionnel 0_t qui se propage avec le zéro d'ancrage et qui satisfait $\overline{t} - \overline{t} = 0_t$, nous avons par là même un élément neutre. En conséquence, l'ensemble des êtres transectionnels \mathcal{T} définit une notion de groupe pour l'addition.

\mathbb{C} possède une structure de corps, tel que nous l'avons montré. \mathbb{C} définit à fortiori un anneau pour les lois $(+, \cdot)$. \mathcal{T} est un ensemble muni d'une loi interne notée $+$ et d'une loi externe de domaine \mathbb{C} telle que $(z, t) \mapsto zt = tz$, vérifiant :

1. \mathcal{T} est un groupe commutatif.
2. La loi externe est distributive par rapport à l'addition de \mathbb{C} et par rapport à l'addition de \mathcal{T} .
3. $\forall z, z' \in \mathbb{C}$ et $\forall t \in \mathcal{T}$, $(zz')t = z(z't)$.

Pour l'opération externe sur \mathcal{T} , le problème n'est pas tant la construction formelle, mais d'y trouver une argumentation causale. Un être transectionnel se trouve pris sur deux sections adjacentes. $\forall t, t$ est ancré à $h_r = 0_{r+1}^h$, qui possède deux dimensions $(1, \iota)$. Soit il semble naturel de faire opérer \mathcal{T} sur $(, \iota) = \mathbb{C}$. Dans ce cas $(\mathcal{T}, \mathbb{C})$ constitue un \mathbb{C} -module. Si nous définissons une base \mathcal{B} sur \mathcal{T} , nous nous extirpons de l'espace projectif, pour définir un espace autonome qui forme un espace vectoriel. \mathcal{T} apparaît totalement indépendant, mais prend en compte le retournement de la réalité se définissant naturellement sur le corps des complexes.

Nous trouvons là une fondation logique de la construction d'espaces vectoriels de dimensions quelconques à partir de la théorie de la propagation de la réalité.

4.2 Plan d'équivalence

Étudions plus spécifiquement le plan d'équivalence. Au lieu de travailler dans $\mathcal{P}_{\iota_r, \iota_{r+1}}, \mathcal{P}_{\iota_{r+1}, \iota_{r+2}}$, nous allons travailler dans $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$. Pour cela on rappelle que nous nous appuyons sur l'existence d'une dilatation homogène au fil des éléments dilatés, et sur des réalités induites particulières.

4.2.1 Propagation de la réalité et passage au conjugué

Classiquement, une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$ est équivalente à appliquer une transformation : $e^{-\iota \frac{\pi}{2}} = -\iota$ aux éléments de $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. De la sorte $\forall z = a + \iota b, \mapsto -a\iota + b$.

La démarche que nous allons appliquer est légèrement différente. Tout d'abord, on se place dans le plan d'équivalence $\overline{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}} = \mathcal{R}_1$ dont le repère est $(1, \iota)$. Où $(1, \iota)$ est également un couple d'équivalence de $(\iota_r; \iota_{r+1}), (\iota_{r+1}; \iota_{r+2})$. Si nous appliquons des dilatation rotatoires à $\overline{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$, on distingue quatre représentants du plan d'équivalence $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$ pris comme quotient. Où :

$$\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}} = \{\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \mathcal{R}_3, \mathcal{R}_4\}.$$

Avec :

1. \mathcal{R}_2 qui a pour repère $(1, -\iota)$.
2. \mathcal{R}_3 qui a pour repère $(-1, -\iota)$.
3. \mathcal{R}_4 qui a pour repère $(-1, \iota)$.

On s'est représenté via \mathcal{R}_1 l'image de la réalité I_0^1 , voyons ce qui se passe pour l'image de la réalité intriquée de la réalité I_0^2 ancré en $(\iota_{r+1}; \iota_{r+2})$. Tout

d'abord dans le plan d'équivalence \mathcal{R}_1 . On a est c'est la différence principale avec le cas classique de base, uniquement une dilatation rotatoire de la partie imaginaire, et non pas de tout l'espace.

$$\rho \cos \theta \mapsto \imath \rho \sin \theta \mapsto \rho \cos \theta.$$

Où le couple $(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$ décrit l'image I_0^1 , et le couple $(\rho \sin \theta, \rho \cos \theta)$ décrit l'image I_0^2 . D'un certain côté, pour $z = \cos \theta + \imath \sin \theta$:

$$\begin{aligned} \sigma_0 : I_0^1 &\longrightarrow I_0^2 \\ z &\longmapsto z \end{aligned}$$

est l'expression de l'identité. Mais d'un autre côté :

$$\begin{aligned} \sigma_1 : I_0^1 &\longrightarrow I_0^2 \\ \rho \cos \theta &\longmapsto \imath \rho \sin \theta \\ \imath \rho \sin \theta &\longmapsto \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

où $\sigma_1(z) = z$, nous montre que :

$$\begin{cases} \Re(z) = \Im[\sigma_1(z)] \\ \Im(z) = \Re[\sigma_1(z)]. \end{cases}$$

Soit σ_2 une transformation, plus exactement une rotation dilatatoire globale, s'appliquant sur le plan dans sa totalité. Alors $\sigma_2 : z \mapsto -\imath z$. Ou encore :

$$\begin{aligned} \sigma_2 : I_0^1 &\longrightarrow I_0^2 \\ \rho \cos \theta &\longmapsto -\imath \rho \cos \theta \\ \imath \rho \sin \theta &\longmapsto \rho \sin \theta. \end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{cases} \Re(z) = -\Im[\sigma_2(z)] \\ \Im(z) = \Re[\sigma_2(z)]. \end{cases}$$

Des deux expressions des parties réelles et imaginaires de z , on tire que :

$$\begin{cases} \Im[\sigma_1(z)] = -\Im[\sigma_2(z)] \\ \Re[\sigma_1(z)] = \Re[\sigma_2(z)]. \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à écrire que $\sigma_1(z)^* = \sigma_2(z)$. Comme $\sigma_1(z) = z$, on déduit :

$$z \equiv z^* \pmod{(\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2)}.$$

Par application, dans $B_1^* = EC_1 \mathcal{R}_i EC_2$, on a $EC_1 \cong R_1$ et $EC_2 \cong R_2$. Soit si l'on exprime $|\phi\rangle$ dans \mathcal{R}_1 , il se transforme en $|\phi\rangle^*$ dans \mathcal{R}_2 par le retournement de la réalité.

4.2.2 Généralisation

Considérons le groupe cyclique de rotations formé par les rotations dilata-
tatoires de $\frac{-\pi}{2}$ de l'espace $(-i)$.

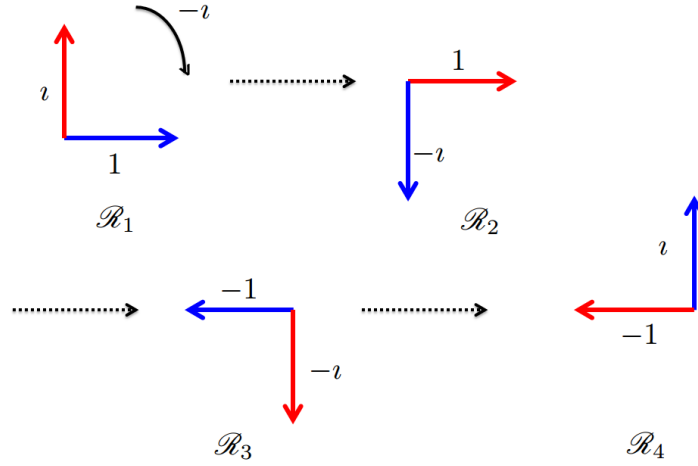


FIGURE 6 – Rotations de l'espace.

Supposons ϕ donné dans le repère \mathcal{R}_1 , alors si l'on applique la rotation
de $\frac{-\pi}{2}$ au plan, le complexe $|\phi\rangle$ est transformé en $|\phi\rangle^*$ relativement au
changement de repère de \mathcal{R}_2 à \mathcal{R}_1 .

$$|\phi\rangle \equiv |\phi\rangle^* \quad \text{mod } (\mathcal{R}_2 \rightarrow \mathcal{R}_1).$$

De même :

$$\begin{aligned} |\phi\rangle &\equiv -|\phi\rangle \quad \text{mod } (\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_1), \\ |\phi\rangle &\equiv -|\phi\rangle^* \quad \text{mod } (\mathcal{R}_4 \rightarrow \mathcal{R}_1). \end{aligned}$$

Ceci nous amène à prendre en compte quatre inductions particulières (de
module $|\phi|$).

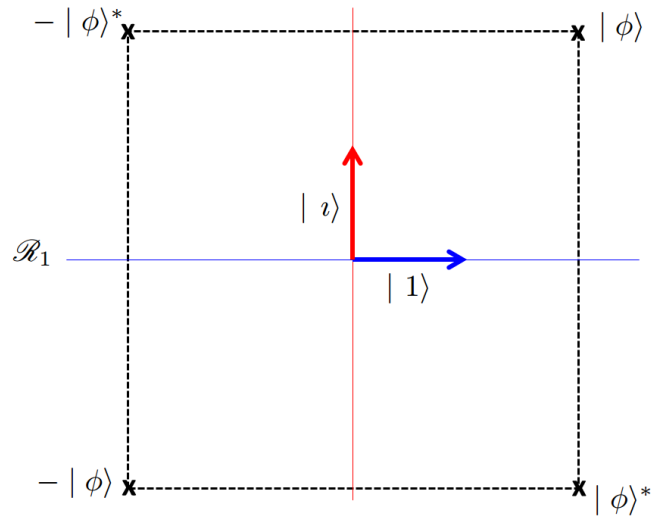


FIGURE 7 – Un état généré et trois inductions particulières dans \mathcal{R}_1 .

Application au vecteur d'état en mécanique quantique. On définit pour cela le vecteur d'état d'équivalence : $|\Phi\rangle = \{|\phi\rangle, |\phi\rangle^*, -|\phi\rangle, -|\phi\rangle^*\}$. C'est à dire que de \mathcal{R}_1 , en travaillant sur le groupe des réalités induites définies par $|\Phi\rangle$, on travaille dans un espace d'équivalence avantageux.

Si nous prenons l'évolution de $||\Phi||^2 = |\Phi\rangle \cdot |\Phi^*\rangle = |\langle\Phi|\Phi\rangle|$. Les combinaisons possibles étant $(\phi, -\phi^*), (\phi^*, -\phi), (-\phi, -\phi^*), (-\phi, \phi)$.

Si nous revenons à la préparation d'un état $|\phi\rangle$, on se représente l'évolution de $|\phi\rangle$ suivant la progression de l'image de la réalité \widehat{I}_0 .

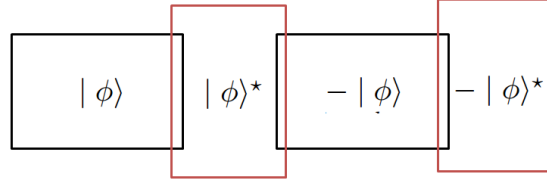


FIGURE 8 – Effet de la propagation de la réalité sur $|\phi\rangle$ dans $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$.

4.2.3 L'artefact d'une représentation l'infini

Dans le plan d'équivalence $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$, ι se dilate en l'infini, qui est associé à une nouvelle réalité h_{r+1} . Il faut se figurer l'espace ancré en h_r et se déployant en h_{r+1} comme des squelettes de sphères hétérogènes S_2^h ainsi qu'il est indiqué sur le graphe ci-dessous :

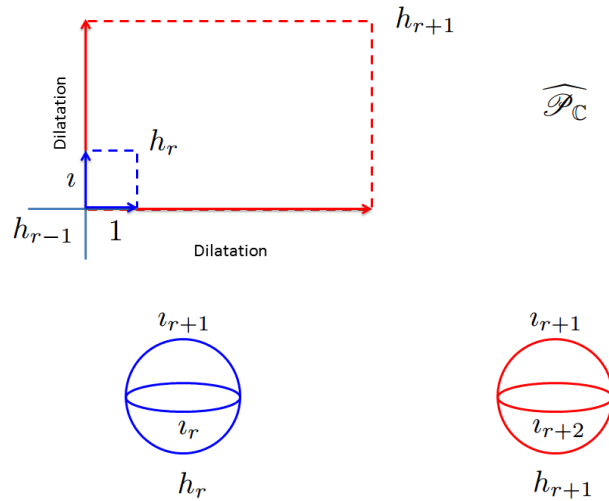


FIGURE 9 – Représentation à l'infini.

L'infini est donc un artefact de la projection de l'espace cellulaire à deux faces $(\iota_r, \iota_{r+1}, \iota_{r+2})$, ou encore la projection de deux sphères hétérogènes intriquées $(\iota_r, \iota_{r+1})\widehat{\mathcal{P}}_i(\iota_{r+1}, \iota_{r+2})$.

4.3 Probabilité d'une conjugaison

Dans ce qui suit, pour simplifier on définit $(f^*, g) = \langle f | g \rangle$. Mais on s'efforcera d'utiliser la notation de Dirac pour symboliser qu'on utilise des vecteurs autant que possible.

Quotient de réalités. Nous avons $h_r = \iota_{r+1} - \iota_r \times \iota_r$. Nous nous interrogeons sur la pertinence d'envisager une autre expression de 0_{r+1}^z qui renverrait à une autre réalité h'_r . Si bien que la réalité prise dans son tout : \widehat{h}_r , deviendrait la conjonction de deux représentants de réalité h_r et h'_r . Par exemple, à partir de h_r , on déduit les espaces quantiques orientés associé :

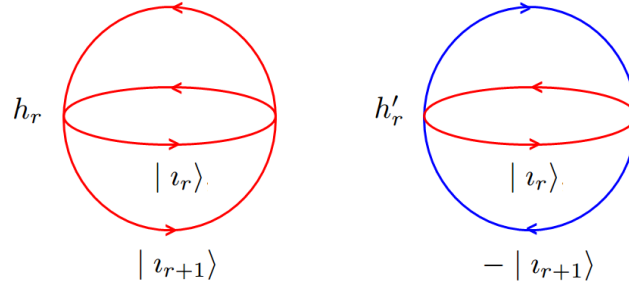


FIGURE 10 – Quotient de réalités.

Concernant h_r , si l'on transforme $\iota_r \mapsto -\iota_r$ par la rotation dilatatoire, on effectue une action de $(-\iota_r)$ sur ι_r , soit la composition d'une rotation de $-\frac{\pi}{2}$ et d'une dilatation. Réciproquement, pour $h'_r = -\iota_{r+1} - \iota_r * -\iota_r = -\iota_{r+1} + \iota_r * \iota_r = 0_{r+1}^z$, on effectue une action de ι_r sur ι_r , soit la composition d'une rotation de $\frac{\pi}{2}$ et d'une dilatation. Nous trouvons donc deux orientations possibles pour la réalité. On voit immédiatement que $h_r = h'_r$ dans le plan d'équivalence $\widehat{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}$.

4.3.1 Approche

Puisque l'espace se retourne, ce qui est équivalent à une rotation dilatatoire, qui est encore équivalent à une propagation de la réalité $h_r = (\iota_r; \iota_{r+1})$ en $h_{r+1} = (\iota_{r+1}; \iota_{r+2})$; nous affirmons que :

$$Pr(\iota_{r+1} \mapsto \iota_{r+2}) = 1.$$

Si nous définissons un référentiel ancré en $\frac{1}{\sqrt{2}}h_r$ qui servira pour l'occasion d'origine, et se déployant en $\frac{1}{\sqrt{2}}h_{r+1}$, nous avons :

$$Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}h_r \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}h_{r+1}\right)_{h_r} = 1.$$

Cet événement est causé par la propagation de la réalité qui forme aussi un vecteur $|h_r\rangle$ dans l'espace d'équivalence $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}h_r}$. Supposons maintenant qu'il existe un grain homogène à $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$, dans ce même référentiel. Il est donc une homothétie homogène de la réalité qui définit $\xi = \frac{k}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$. On rajoute la propriété que ce grain soit actif.

Définition 2 (Grain actif). *Un grain est actif dans la réalité s'il se propage avec la réalité d'ancrage.*

En conséquence un grain est inactif s'il ne se propage pas avec la réalité d'ancrage, mais se retourne avec le retournement de l'espace.

Les antécédents de la réalité $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle$ sont alors de deux sortes. D'une part $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$ et d'autre part $|\xi\rangle$, qui se transformeront en grains ponctuels d'épaisseur différente dans la nouvelle réalité $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle$ de $NA = \frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$. On peut donc considérer qu'il existe une possibilité que $|\xi\rangle$ se transforme en $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle$. Puisque : $Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle\right)_{h_r} = 1$ que $Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle\right)_{h_r} = 0$. Cette probabilité est inversement proportionnelle au rapport d'homothétie k .

$$Pr(|\xi\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle)_{h_r} = |\langle \xi, \frac{1}{\sqrt{2}}h_{r+1} \rangle|.$$

On déduit qu'il existe une possibilité de dilater $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$ vers $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle$ en deux temps, en passant par l'état $|\xi\rangle$. On supposera que le grain $|\xi\rangle$ est inactif, et se rend actif par la propagation de $\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle$, comme ce serait le cas s'il était disposé un dispositif de détection. Alors :

$$\begin{aligned} Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle\right)_{h_r} &= Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle \mapsto |\xi\rangle\right) \times Pr(|\xi\rangle \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}|h_{r+1}\rangle). \\ &\Rightarrow Pr\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|h_r\rangle \mapsto |\xi\rangle\right) = |\langle \xi, \frac{1}{\sqrt{2}}h_r \rangle|. \end{aligned}$$

4.3.2 En dimension finie et infinie

Revenons à notre problème, il suffit de substituer $|\phi'\rangle^*$ à $|\xi\rangle$ et $|\overline{\phi}\rangle$ à $|\frac{1}{\sqrt{2}}h_r\rangle$ pour définir la probabilité de détecter l'état considéré à partir du vecteur d'état $|\phi\rangle$. Il est d'usage de dire qu'on passe de l'état ϕ à l'état ϕ' , bien que le produit scalaire prenne en compte la rotation dilatatoire de l'espace. En fait il vaudrait mieux dire qu'on passe de $|\phi\rangle$ à $|\phi'\rangle^*$.

$$Pr(\phi \mapsto \phi')_{hr} = Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*) = |(\overline{|\phi\rangle}, |\phi'\rangle^*)| = |\langle\phi'|\phi\rangle|.$$

Puisque nous sommes dans la réalité h_r , il se passe un phénomène analogue dans h'_r . Tout d'abord $h'_r \equiv h_r^*$ dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$. Soit $\langle\phi', \phi\rangle$ dans h_r^* devient son conjugué. Ce qui conserve le module :

$$Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h_r} = Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h'_r}.$$

D'où l'on déduit :

$$Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h_r} = Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h_r} \times Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h'_r}.$$

$$\boxed{Pr(|\phi\rangle \mapsto |\phi'\rangle^*)_{h_r} = |\langle\phi'|\phi\rangle|^2}.$$

4.4 Construction d'un produit scalaire

4.4.1 En dimension finie

Il est évident que la relation est linéaire à droite, On a $(,)$ qui est une relation symétrique : $(f^*, g) = \sum_{j=1}^n (f_j^* g_j) = \sum (g_j f_j^*) = (g, f^*)$. On a aussi : $(f^*, g^*)^* = (\sum_{j=1}^n f_j^* g_j^*)^* = \sum_{j=1}^n f_j g_j = (f, g)$ et $(f^*, g) = \sum_{j=1}^n f_j^* g_j = \sum_{j=1}^n g_j f_j^* = (g, f^*)$. On définit alors un produit hermitien : $(f^*, g) = (g^*, f)^*$, et il est évident que la relation est antilinéaire à gauche. On a aussi une forme définie positive : $(f^*, f) = \sum_{j=1}^n (f_j^*, f_j) = \sum_{j=1}^n |f_j|^2 = |f|^2$ qui s'annule pour $f = 0$. Nous avons donc un produit scalaire pour la relation $\langle| \rangle$ en dimension finie.

4.4.2 En dimension infinie

Soient $|\phi\rangle$ et $|\phi'\rangle$ deux états. On construit une relation sur $(\mathcal{T}, \mathbb{C})$: $\langle\phi' | \phi\rangle = \int \phi'^* \phi$.

Linéarité de la relation à droite :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \langle\phi' | \lambda\phi\rangle = \int \phi'^*(\lambda\phi) = \lambda \int \phi'^* \phi = \lambda \langle\phi' | \phi\rangle.$$

$$\forall \phi'' \in \mathcal{T} : \langle\phi' | \phi + \phi''\rangle = \int \phi'^*(\phi + \phi'') = \int \phi'^* \phi + \int \phi'^* \phi'' = \langle\phi' | \phi\rangle + \langle\phi' | \phi''\rangle.$$

Lemme Nous avons : $z \equiv z^* \pmod{\mathcal{R}_1 \rightarrow \mathcal{R}_2}$. D'où :

$$\int z \equiv \int z, \text{ et : } \int z^* (\int z^*)^* \\ \Rightarrow (\int z^*)^* \equiv \int z.$$

Si $z = fg^*$, alors $(\int fg^*)^* \equiv \int fg^*$.

$$\text{On sait que : } \int f^*g \times (\int f^*g)^* = |\int f^*g|^2 \\ \Rightarrow \int f^*g \times \int fg^* \equiv |\int f^*g|^2.$$

Nous voyons que la relation d'équivalence engage deux termes mixtes : un module et un produit de complexes, a fortiori le produit de complexe est un réel supérieur à zéro. Par le passage au module de la relation d'équivalence, rien ne change, si ce n'est la relation d'équivalence qui devient une relation d'égalité : $\int f^*g \times \int fg^* = |\int f^*g|^2$. D'où :

$$\boxed{(\int gf)^* = \int fg^* \Leftrightarrow \langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle^*}.$$

Interprétation

Le relation est aussi antilinéaire à gauche Soit $\mu \in \mathbb{C}$:

$$\langle \mu\phi' | \phi \rangle = \langle \phi | \mu\phi' \rangle^* = \mu^* \langle \phi | \phi' \rangle^* \\ = \mu^* \langle \phi' | \phi \rangle.$$

Soit $|\phi''\rangle \in \mathcal{T}$:

$$\langle (\phi' + \phi'') | \phi \rangle = \int (\phi' + \phi'')^* \phi = \int \phi'^* \phi + \int \phi''^* \phi = \langle \phi' | \phi \rangle + \langle \phi'' | \phi \rangle \\ = \langle \phi | \phi' \rangle^* + \langle \phi | \phi'' \rangle^* = \langle \phi | (\phi' + \phi'') \rangle^*.$$

Les propriétés de linéarité à droite et d'anti-linéarité à gauche font de la relation étudiée une forme sesquilinéaire. La propriété de conjugaison fait de la forme sesquilinéaire une forme hermitienne.

Une forme définie positive

$$\langle \phi | \phi \rangle = \int \phi^* \phi = \langle \phi | \phi \rangle = \int |\phi|^2,$$
$$\langle \phi | \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow |\phi\rangle = 0$$

$\langle \phi | \phi \rangle$ est donc un nombre réel (puisqu'il est égal à son conjugué), c'est une forme définie positive. La forme hermitienne, définie positive, autorise donc à la prendre comme un produit scalaire.

$$\boxed{\langle \phi' | \phi \rangle = \int \phi'^* \phi}.$$

4.5 Construction des espaces de Hilbert et espaces fonctionnels

Un espace de Hilbert \mathcal{H} est un espace vectoriel complet (c'est-à-dire où toute suite de Cauchy converge), muni d'un produit scalaire. On sait que si \mathcal{H} n'est pas complet, on peut toujours lui adjoindre des vecteurs limites de suites de Cauchy. Nous avons construit l'espace vectoriel $(\mathcal{T}, \mathbb{C})$, muni d'un produit scalaire. Nous affirmons que nous avons alors construit un espace de Hilbert de manière analytique à partir de résultats sur l'espace.

Les espaces fonctionnels découlent d'un cas particulier, où si l'on prépare le système dans l'état $|\phi\rangle$, on détecte l'état avec la probabilité un :

$$\langle \phi | \phi \rangle = \frac{\phi^* \phi}{|\phi| |\phi|} = \frac{\int |\phi|^2}{|\phi|^2} = 1$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\int |\phi|^2 = |\phi|^2}.$$