

Infra-Algèbre

Hugues Genvrin

éléments

26 juillet 2014

Infra-Algèbre

Hugues Genvrin

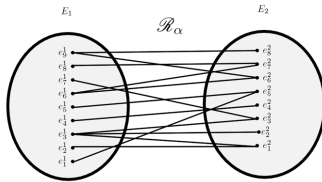
éléments

26 juillet 2014

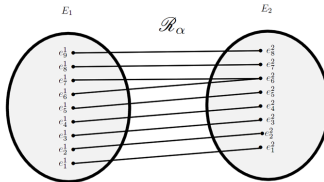
Point de départ

On repart des éléments présentés dans « Structures fondamentales », en particulier les relations de mises en correspondances.

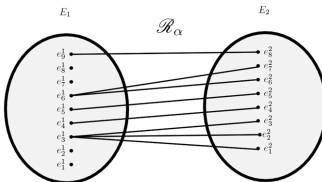
Rappel :



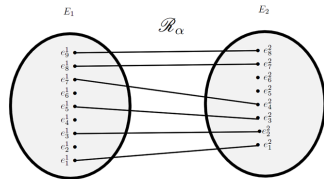
Polyvoque



Multivoque - Univoque



Multivoque - Co-Univoque



Biunivoque - Univoque & Co-Univoque

Nombre de complexions

Soit une mise en relation de correspondance multivoque de E vers F telle que :
(\mathcal{E}) : $\Gamma \in \mathcal{P}(E \times F), x \in E \mid (\Gamma, E, F) = (\bigcup_i [x, x_2^i], E, F)$ où $x_2^i \in F$.

Définition (Tome II page 74)

L'équation \mathcal{E} est appelée équation de complexions d'un complexe donné, le nombre de solutions de l'équation sera appelé nombre de complexions du complexe.

On peut associer par exemple à la projection canonique ν un nombre de complexions :

$$\begin{aligned}W_{\nu, E/\mathcal{R} \times E} &= \frac{[\nu^{-1}(E/\mathcal{R})]}{\prod [\#\nu^{-1}(\hat{x}_i!)]} \\ &= \frac{(\#E)!}{\prod [(\#\hat{x}_i)!]}\end{aligned}$$

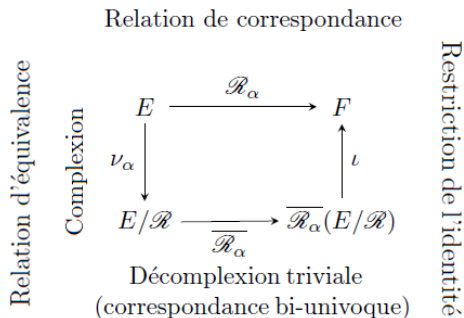
Définition

On appelle canon un couple constitué d'une relation d'équivalence et d'un ensemble quotient. La relation d'équivalence associée à un quotient du canon sera appelée relation canonique.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\alpha} & F \\ \nu_\alpha \downarrow & & \uparrow \iota \\ E/\mathcal{R} & \xrightarrow{\bar{\alpha}} & \bar{\alpha}(E/\mathcal{R}) \end{array}$$

Définition

On appelle patron canonique un produit cartésien de canons.



Définition

Un système composé d'un ensemble E , de k relations d'équivalences (\mathcal{R}_i) , qui se transforme par une fonction α en un ensemble F sera dit parfaitement déterminé par sa décomposition canonique, si et seulement si : $\bar{\alpha} \circ \mu$ est une bijection de $\prod [E/\mathcal{R}_i]$ vers $\bar{\alpha}(\prod [E/\mathcal{R}_i])$, et s'il n'existe pas de morphisme sur un domaine distinct.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{Id} & E \\ \nu \downarrow & & \uparrow \iota \\ \prod_i^m [E/\mathcal{R}_i] & \xrightarrow{\bar{Id}} & \bar{Id}(\prod_i^m [E/\mathcal{R}_i]) \end{array}$$

FIGURE 9.1 – Décomposition canonique

Définition

Le nombre de complexions W associé à une fonction α , qui est supposée être entièrement déterministe (soit ne pas être aléatoire) et un complexe identifié à un sous ensemble du co-domaine est le nombre restrictions de la fonction α qui va donner pour image le sous ensemble du co-domaine.

Soit $F' \subseteq F$, le nombre de complexions du complexe F' vaut :

$$W_{\alpha, F'} = \left(\prod_i 2^{\#\widehat{x}_i} - 1 \mid (\#F'^{-1}(x_i) > 1) \right).$$

Définition

Le nombre de complexions W associé à une fonction α et un sous-ensemble F de l'ensemble d'arrivée, exprime la possibilité d'obtenir un complexe donné par une application α qui appliquerait la mise en correspondance entre éléments des ensembles de départ et d'arrivée, de manière aléatoire, sous la contrainte d'univocité.

$$W_{\alpha, F'} = \frac{\#(F'^{-1})!}{\prod_{f_i \in F'} (\#\alpha^{-1}(f_i))!}$$

Si le nombre de complexions est une donnée générale, on retrouve dans certains cadres l'utilisation de nombres de complexions maximaux (ainsi en physique statistique).

Complexe de poids statistique maximal

On appelle complexe de poids statistique maximal d'un ensemble de complexes donnés, le complexe dont le nombre de complexions sera maximal parmi l'ensemble des nombres de complexions de tous les complexes possibles.

Système fonctionnel

On appelle système fonctionnel la donnée d'un : $\{E, F, \prod[E/\mathcal{R}_i], \prod[E/\mathcal{R}'_j], \alpha_f\}$.

Entropie d'un système fonctionnel

L'entropie d'un système fonctionnelle est le minimum des entropies fonctionnelles et des entropies de décomposition canonique.

Soit un ensemble E muni de $\#E = n$ éléments notés $(x_i)_{(1 \leq i \leq n)}$, dont on fait une partition selon une relation d'équivalence \mathcal{R}_1 , qui permet de construire l'ensemble E/\mathcal{R}_1 constitué de $k_{(1 \leq k \leq n)}$ classes par la surjection canonique :

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow E/\mathcal{R}_1 \\ x_i &\mapsto \hat{x}_i \end{aligned}$$

Nous tentons d'appréhender la multiplicité de $E = (x_1, \dots, x_n)$ par la classe \mathcal{R}_1 , ainsi nous orientons un sens à E , nous la transformons en une variété de classe. Bien évidemment, nous allons perdre de la lisibilité sur le initial, nous chercherons à associer à la compression de l'information un quantificateur de cette perte, ou du désordre inhérent à cette représentation.

Si on cherche à identifier l'état de classe le plus probable suivant des contraintes déterminées en tant que paramètres, on peut alors l'identifier comme celui correspondant à une maximisation du nombre d'états élémentaires, on pourra lui rattacher une probabilité d'occurrence, relativement à la classe \mathcal{R}_1 . Précisons qu'on peut définir une notion d'états à partir d'un ensemble quotient E/\mathcal{R} pourra avoir une structure identique (en terme de classes), mais une répartition des éléments dans des classes différentes pour un même ensemble E donné, ce qui définira un nouvel état du système associé à l'ensemble E . Une application entre deux ensembles quotients de structure identique sera appelée application intra-quotient, et dans le cas contraire inter-quotient. »

Entropie canonique

L'entropie canonique d'une fonction α est le logarithme népérien du nombre de complexions de la décomposition canonique $\alpha = \iota \circ \bar{\alpha} \circ \nu$.

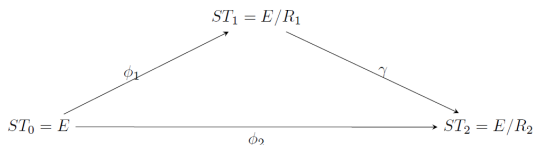
L'entropie canonique

L'entropie canonique d'un système bijectif parfaitement déterminé par une base canonique est nécessairement inférieure ou égale à l'entropie du système fonctionnelle qui vaut $\mathcal{H} = \ln(n!)$.

L'entropie de chemin (I/I)

Cas général

On peut alors former le schéma triangulaire suivant pour représenter les chemins pouvant conduire de ST_0 à ST_2 :



$$\mathcal{H}(E/\mathcal{R}) = \ln(n! \times \omega \times v(E/\mathcal{R}))$$

$$\mathcal{H}^M = \ln(n! \times \text{Max}(\omega) \times v) \text{ (Cadre minimaliste).}$$

On peut envisager l'entropie de chemin en rapport à un même ensemble quotient, où à une nouvelle relation d'équivalence.

Soit une évolution de ST_1 à ST_2 :

$$\Pr(ST_2 | ST_1) \geq \Pr(ST_1)$$

Corollaire

Un état ST_2 ne pourra jamais succéder à un état ST_1 si $\Pr(ST_2) < \Pr(ST_1)^2$.

Corollaire du point fixe

Entre deux ensembles quotients E/\mathcal{R} de structures identiques mais de répartition intra-classe différentes : si un système passe d'un état ST_1 à un état ST_2 , c'est qu'il existe ad minima un point fixe.

Entropie de chemin intra-quotient

La relation d'équivalence restant la même

Rapprochons W_k du nombre de complexions d'une certaine fonction α :

$\alpha : E^n \rightarrow F = \prod_{j=1}^k \{E/\mathcal{R}_1\}$ Dans le cadre minimaliste de la
 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_k)$
physique statistique :

$$[\max] \{(W_k)\} = [\max] \{W[\alpha, F]\}$$

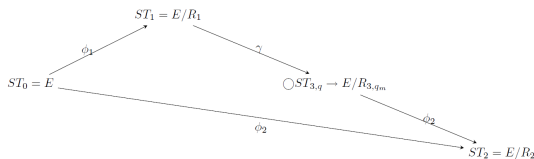
$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{k-1} \ln \binom{N_{i+1}}{N_i}$$

Entropie quotient

L'entropie quotient est une fonction croissante du cardinal des classes : $\#E/\mathcal{R}_1$
d'un ensemble quotient E/\mathcal{R}_1 donné.

Entropie de chemin associé à un changement de structure quotient

La relation d'équivalence n'est plus la même



Entropie de chemin bis

L'entropie d'un chemin inter-ensembles quotients de structures différentes, s'il est possible, est une fonction croissante de l'ordre des chemins.

Si nous passons à l'état $ST_2 = E/\mathcal{R}_2$ par un état $ST_1 = E/\mathcal{R}_1$, qui présentent des structures de quotients distinctes en termes de classes, il apparaît néanmoins nécessaire que $\Pr(ST_2 \mid ST_1) > 0 \Leftrightarrow \Pr(ST_1 \cap ST_2) \neq \emptyset$.

Entropie de produits cartésien d'ensemble quotient

On pose :

$$\begin{aligned} \theta : E/R_1 \times F/R_2 &\rightarrow G/\mathcal{R}_3 \\ (W_1, W_2) &\mapsto W_3 \end{aligned}$$

Où E, F, G de cardinaux respectifs $n_1, n_2, n_1 + n_2$. Il est clair que le nombre de complexions W_3 dépend de beaucoup de paramètres que nous examinerons plus en détail dans la partie interface, tant ce modèle joue un rôle important en thermodynamique, il permet en effet de simuler l'entropie d'échange telle que l'a expérimentée Clausius. En premier lieu on pourrait imaginer que les relations d'équivalence soient brisées, qu'il n'existe pas de relation d'équivalence non triviale dans G . Ainsi \mathcal{R}_3 mettrait uniquement les éléments en relation avec eux-mêmes. Alors le nombre de complexions W_3 correspondrait à $(n_1 + n_2)!$, autrement dit à chaque macro-état s'applique un micro-état et un seul ; les états étant obtenus par le groupe de symétrie, on retrouve là l'entropie maximale du système.

On se place alors dans le cas où W_3 sera minimum, ce sera rendu lorsque les relations \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 seront en co-relation totale, ce qu'on peut traduire par une corrélation linéaire de taux égal à l'unité en valeur absolue. On peut alors affirmer que s'il y a corrélation totale entre les deux relations, celle-ci ne pourra se réaliser que dans le sens du nombre de complexions inférieur corrélé au nombre de complexions supérieur. Si l'inverse était le cas, nous aurions un problème dans la définition de la classe et de sa relation associée. On a donc :

$$W_3 \geq [\max(W_1, W_2)]^2 \Leftrightarrow \mathcal{H}_3 \geq 2 \times \max(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Il s'en suit donc que dans tous les cas : $\mathcal{H}_3 \geq \mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2$.

Entropie dite de « mélange »

L'entropie du produit cartésien de deux ensembles quotients est supérieure à la somme des entropies des quotients initiaux.

« Soit un ensemble quotient E/\mathcal{R} , qui établit une partition de E en k sous-ensembles \widehat{x}_i de cardinaux n_i où $(1 \leq i \leq k)$. On suppose que chaque sous-ensemble \widehat{x}_i puisse être décomposé suivant une partition (de causalité quelconque), qui crée donc q_i sous-ensembles notés : \widehat{x}_i^q ($1 \leq q \leq q_i$) de cardinaux n_i^q . Il est donc vérifié : $\sum_{q=1}^{q_i} n_i^q = n_i$. Nous allons appeler W°, W^\ominus, W^i , les complexions :

- 1 du système sous une configuration de composition,
- 2 du système sous une configuration de composants finaux sans tenir compte d'une composition,
- 3 et de chaque classe relativement au composé final.

Comme $W^\circ = \frac{n!}{\prod_{i=1}^k \prod_{q=1}^{i_q} (n_i^q)!}$, alors on en conclut que :

$$W^\circ = \frac{W^\circ}{\prod_{i=1}^k W_i}$$

Comme : $\forall i \in \{1, \dots, k\}, W_i \geq 1 \Leftrightarrow \prod_{i=1}^k W_i \geq 1$, on aboutit à la formule suivante :

$$W^\circ \leq W^\circ$$

Dissipation de l'entropie de composition

L'entropie de composition des classes composées est inférieure à l'entropie de l'ensemble formé par les classes composantes, ce qu'on note : $\mathcal{H}^\circ \leq \mathcal{H}^\circ$.

On peut énoncer le théorème suivant :

L'énergie algébrique

Dans un système à états, il existe un indicateur global, fonction des complexions qui est une constante, on appellera cet indicateur l'énergie algébrique du système.

On voit donc que nous pouvons définir un nouveau cadre formel pour la physique statistique qui apportera des changements majeurs.

Comment intégrer la négumentropie apportée par une cyclicité systémique?
Comment relier chaleur et quantum à partir du moment où le quantum est une multiplicité jaugéante, qu'à une transition de phase on trouve H_λ qui atteint un extremum, et qu'on pourrait considérer le nouvel état comme un nouveau quantum. La première remarque serait l'interaction en entre l'entropie et l'espace. Elle aurait un caractère structurant pour l'espace. Á l'image des résultats que nous avons pu trouver en métathéorie de l'épistémologie.