Logique

Hugues Genvrin

26 juillet 2014

Logique

Hugues Genvrin

26 juillet 2014

Éléments de base

Symboles

On appelle symbole une mise en relation de correspondance entre deux entités.

Alphabet

On appelle alphabet un ensemble de symboles.

Mot d'un alphabet

Un mot défini sur un alphabet est une séquence bien définie de symboles élémentaires de cet alphabet.

Niveau structuré

Langage

Un langage est un ensemble de mots d'un même alphabet, mis en relations de correspondance par les symboles syntaxiques de cet alphabet.

Langage relationnel

On dit qu'un langage est relationnel s'il met en relation des énoncés du langage.

Lexique

On appelle un lexique un ensemble des mots du langage.

Typologie (mots et éléments)

Nature (Tome II page 66)

On appelle nature d'une entité sa détermination en tant que quantum ou quantité.

Pour les notions de quantum et quantitas cf. « Théorie des ensembles ».

Classe (Tome II page 66)

Une classe est une partie d'un ensemble vérifiant des conditions particulières, sur les attributs des éléments ou sur les relations entre éléments.

Transtypage (Tome II page 66)

On appelle nature d'une entité sa détermination en tant que quantum ou quantité.

un type est une nature ou une classe.

Typologie élémentaire

1. Les constantes.
2. Les variables.
3. Les connecteurs : $\Rightarrow, \Leftarrow, , \vdash$.
4. Les quantificateurs : $\forall, \exists, \mathbb{N}, \mathbb{R}$ (et les sous-corps).
5. Les qualificateurs : des lexiques L_i.
6. Les symboles de fonctions $\alpha, \ldots$.
7. Les symboles de relation : $\mathscr{R}, co - \mathscr{R}$.

La quantification

La quantification :

1. La quantification peut être une constante,
2. la quantification peut être modale et non forcément individuable, on utilise alors le symbole $\exists$,
3. la quantification peut-être universelle, on utilisera alors le symbole $\forall$.

Formules

Définition(Tome II page 69)

On appelle formule deux énoncés en relation ou connectés dont l'un peut se déduire de l'autre par des règles syntaxiques et de dérivations du langage.

Vérité

Définition de la vérité bivalente(Tome II page 69)

On appelle valeur de vérité d'une proposition, une application ν qui renvoie une variable booléenne pour une ou des proposition(s) données.

Définition de la vérité entropique(Tome II page 69)

On appelle vérité entropique d'un événement prédicatif e le couple $(\Pr(e); \mathscr{H}_\lambda)$ associé, où

1. $\Pr(e)$ est la valeur de probabilité affecté à l'événement prédicatif,
2. $\mathscr{H}_\lambda$ est l'entropie calculée de la mise en relation de correspondance associée à la probabilité.

Ex : Mr X a-t-il telle maladie ?

Principes

Principe de la classe entropique

La classe entropique est l'entéléchie de tout système, elle peut être strictement entropique, relativement néguentropique, c'est une grandeur positive ou nulle.

-Le Sous-systèmes aristotéliciens :

Principe de non-contradiction

$x \wedge \bar{x} = 0.$

Principe du tiers-exclu

$x \vee \bar{x} = 1.$

Entité entropique

On dit qu'une entité (chose, être,..) est entropique, si sa nature révèle une sensibilité non négligeable au principe de la classe entropique.

Les Énoncés

1. Proposition.
2. Assertion.
3. Prédicat.
4. Énoncés atomiques.

Types d'énoncés

Proposition

On appelle proposition un énoncé ne contenant pas de variables.

Assertion

On appelle assertion un énoncé ne contenant pas de variable, susceptible de prendre l'une ou l'autre des valeurs logiques vrai et faux.

Types d'énoncés

Prédicat

On appelle prédicat un énoncé qui comprend une ou plusieurs variables. On parlera de prédicats du $n^{\text{ième}}$ ordre lorsqu'il y aura n variables, et qui forment des assertions lorsque les variables sont remplacées par des constantes.

Énoncé atomique

On appelle énoncé atomique un énoncé (propositionnel ou prédicatif) où il n'apparaît qu'une seule relation entre un sujet et un attribut.

Énoncés événementiels (tome II page 93)

Définition

On dit d'un énoncé e qu'il forme un énoncé événementiel si on peut lui rattacher une probabilité $\Pr(e)$. Cette probabilité pouvant être logique, fréquentielle ou subjective.

Désormais nous travaillerons avec ce type d'énoncés, dont les éléments définis avant peuvent être considérés comme des sous-classes.

Énoncé (ou termes) quantifié

Nous allons donc définir une unité de structure à toute énoncé atomique : $gr[s(e)]gr[a(e)] = gr_1^{q_1} \mathscr{R} gr_2^{q_2}$ où :

1. $q_1, q_2 \in \mathscr{Q}$ et s et a étant les groupes syntaxiques relatifs au sujet et à l'attribut de l'énoncé, respectivement.
2. gr_1 et gr_2 sont des fonctions retournant les groupes référents, des groupes syntaxiques en langages naturels
3. $gr_1^{q_1}$ et $gr_2^{q_2}$ étant des fonctions retournant les groupes référents quantifiés, des groupes syntaxiques en langages naturels.

Décomposition atomique de termes quantifiés (Tome II page 231)

Un énoncé du langage naturel pourra donc être transformé dans un énoncé du langage objet par la fonction τ. On désignera par $\mathscr{G}$ l'ensemble des groupes référents. Puis, par $\mathscr{G} \times \mathscr{Q}$, ces mêmes groupes référents quantifiés.

$$\begin{array}{llll} \tau : & \mathscr{E}^k & \rightarrow & [(\mathscr{G} \times \mathscr{Q}) \times \mathscr{R} \times (\mathscr{G} \times \mathscr{Q})]^k \\ & \prod_{i=1}^k e_i & \mapsto & \wedge_{i=1}^k \left\{ gr_{s(e_i)} \mathscr{R}_i gr_{a(e_i)} \right\} \end{array}$$

Un énoncé atomique bien formulé étant alors renvoyé vers un énoncé du langage objet $\tau(e) = gr_1^{q_1} \mathscr{R} gr_2^{q_2}$.

Intérêt

Cette logique va montrer les limites du cadre aristotélicien en explicitant ses plus grand paradoxes. Elle se veut une logique de la confrontation au réel. Comme nous avons défini une infra-algèbre, il est logique qu'elle induise des conséquences dans le domaine de la logique via la notion d'entropie, on sous-entend que la logique n'est pas première en tant que telle..

1. Paradoxes de Zénon.
2. Paradoxe d'Épiménide.

Bien entendu le domaine calculatoire doit être réalisé à partir des deux dimensions de tout énoncés événementiel (probabiliste et entropique).

Comment inférer ?

Inférence (Tome II page 226)

On appelle inférence un raisonnement où l'on déduit un ou plusieurs énoncés de prémisses formulés par des énoncés.

Une inférence restant une mise en relation d'énoncés.

Les paradoxes de Zénon

Zénon d'Elée (-480,-420) était un philosophe Grec de la période pré-socratique. Il appartenait à l'école de Parménide.
Zénon soumit quatre paradoxes dont on va détailler les trois premiers, le quatrième, celui du stade étant solutionné par les vitesses relatives.
Au-delà du paradoxe, on peut retenir la conclusion de Zénon :
Puisqu'il y a ces paradoxes, c'est que la représentation du monde n'est pas juste.
Nous allons essayer de construire une représentation en accord avec une réalité empirique comme dans le cas des deuxième et troisième paradoxe, le premier étant la formulation d'un cadre idéal, difficile à reproduire dans la réalité.

Achille et la Tortue

Sans doute le plus célèbre des paradoxes de Zénon : Achille court après une tortue qui à la date t_0 se trouve à une distance T_1, pendant qu'il parcourt la distance T_1, la tortue a parcouru la distance T_2. Pendant qu'Achille parcourt cette distance T_2, la tortue parcourt la distance T_3...et ainsi de suite.

Soit $(A_t)_{t \in N}$ l'ensemble des positions d'Achille et $(T_t)_{t \in N}$ l'ensemble des positions de la tortue. Alors on peut formuler le système comme il suit : $A_{t+1} = T_t$ et $T_{t+1} = T_t + \frac{T_0}{2}$. On pose Δ_t l'écart entre Achille et la tortue, alors $\Delta_t = T_t - A_t = \frac{T_0}{2^t}$.

On a donc (Δ_t) qui forme une suite décroissante convergeant vers zéro, on peut donc lui appliquer le principe des suites achevées, et poser $\Delta_{n_{+\infty}} = 0$. Remarquons qu'on prend le cas d'une suite dont la sommation des termes converge.

Bien entendu, ce n'est pas en l'infini qu'Achille rattrapera la tortue, il existe $t^* \in \mathbb{N}$ tel que $2^{t^*} > n_{+\infty} \Rightarrow [\frac{1}{2^{t^*}}]_{n_{+\infty}} = 0$.

Donc, la tortue est rattrapée en un temps et un nombre de parcours finis dans notre cas.

La Dichotomie

Avant qu'un coureur ne parcourt une distance D, il doit parcourir la moitié de cette distance. De même avant de parcourir $\frac{D}{2}$, il doit parcourir $\frac{D}{4}$...et ainsi de suite de telle sorte qu'il doit parcourir une infinité de distances avant même de partir.
$=$« Reprenons le parcours d'Achille, Zénon avance qu'avant de parcourir la totalité de la distance X, il doit parcourir les distances $\frac{X}{2}, \frac{X}{4}, \cdots$, et qu'en définitive il doit parcourir une infinité de distances avant d'atteindre un point de cette suite. Il ne peut donc les atteindre.
Comme on l'a vu plus haut, il existe $t_0 \in \mathbb{N}$ tel que $[\frac{1}{2^{t_0}}]_{n_{+\infty}} = 0$, soit il n'y a pas de suite de longueur infinie. Il y a une date où Achille doit parcourir une longueur nulle avant de partir, cette date marque le point de départ.
Là encore il ne faut pas attendre la convergence vers Zéro à l'infini, et de même la complexité repose toujours sur la représentation sous forme de points. »

La Flèche

« Dans ce paradoxe, Zénon nous dit qu'une flêche en vol est à chaque instant dans un état immobile, et qu'elle ne peut pas bouger. Identifions la structure temporelle à partir du continu décrit par la flêche.
A chaque instant, la flêche est au point Ω du continu, mais elle est également au $2^{n_{+\infty}} + 1$ -ième point Ω' d'un continu formé par l'ensemble des points qu'elle a déjà parcourus. Ces deux points se recouvrent soit totalement, soit partiellement (si on prend des infinis distincts), cependant on peut leur associer la même mesure de longueur sur la trajectoire à partir d'un point de départ de la flêche qu'on identifie au zéro.
Cependant, Ω n'est défini qu'à partir du momment où la flêche a atteint sa cible. Donc, on ne peut conclure qu'elle est immobile. Le point qui compte pour caractériser la flêche, c'est Ω', et en tant que$2^n_{+\infty} + 1$ -ième point d'un continu, il peut se mouvoir dans l'espace. On rappelle que la caractéristique d'un continu est l'élasticité, et en Ω' elle est sujète à une vitesse instantanée non nulle. »

Paradoxe d'Épiménide (I/II)

Ou paradoxe du Crétois

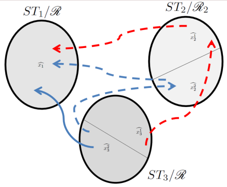
1. Tous les Crétois sont des menteurs,
2. Le Crétois Épiménide dit qu'il est un menteur,

Construisons le système propositionnel associé aux propositions à partir des groupes référents :
gr$_1$ $=$ Crétois, $gr_2 =$ Épiménide, $gr_3 =$ Menteur.
Alors :

1. $ST_1 = \forall gr_1(x), gr_1(x) \mathscr{R} gr_3(x) \Rightarrow gr_1 \mathscr{R} gr_3(x)$
2. $ST_2 = \{gr_2(x) \mathscr{R}' gr_1(x)\} \wedge \{gr_2(x) \mathscr{R} gr_1(x)\}$
3. $ST_3 = gr_2(x) \mathscr{R} gr_3(x)$

Paradoxe d'Épiménide (II/II)

Ou paradoxe du Crétois



$$ST_1/\mathscr{R} = \widehat{x}_1^1$$
$$ST_2/\mathscr{R}_2 = \widehat{x}_2^1 \bigcup \widehat{x}_2^2$$
$$ST_3/\mathscr{R} = \widehat{x}_3^1 \bigcup \widehat{x}_3^2$$

L'équation entropique permet de constater qu'on obtiendrait une entropie négative au troisième état ce qui est impossible.

$$\mathscr{E} : \mathscr{H}_\lambda = \mathscr{H}_\phi - \mathscr{H}_\pi$$

L'indécidabilité

Définition classique (Tome II page 226)

Une théorie est dite indécidable si on ne peut pas montrer qu'il existe soit la proposition p, soit la proposition $\overline{p}$.

Que devient-elle dans la nouvelle logique ? Critère de détermination statistique et entropique (surtout les biais morphiques)

Trois types d'indécidabilité

1. Indécidablité fondamentale.
2. Indécidabilité statistique.
3. Indécidabilité entropique.

On remarquera que la première indécidabilité pose problème si le principe de la diagonale est réfutée, il existe une démonstration de Bernays sans l'utilisation de ce principe (à voir).

Les fonctions sémantiques

La vérité est la première fonction sémantique, qu'elle ne soit pas irréductible à un système formel en général. On verra que c'est un biais qui peut être important. *Si j'applique la notion de vérité dans un système a forte dimension entropique, qu'on néglige donc l'entropie pour aboutir à une sémantique bivalent : vrai/faux, alors sera confronté à de sérieux problèmes. C'est l'enjeu par exemple de l'arraisonnement de la nature (cf. Heidegger), ou l'homme pose de la raison dans un système fortement entropique, dont c'est même le moteur de la dynamique.*
Le chargement sémantique apparaît aussi comme une frontière, un espace supérieur à certains cadres classiques et pourra se révéler un biais.