Analyse et Théorie des Nombres

Hugues Genvrin

4 janvier 2011

L'intégration transfinie suivant la méthode de Riemann

On a $\{\int_a^{a+1} = \sum_{k=na}^{n(a+1)} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})\}_{n_{+\infty}}$ qui peut s'intepréter comme somme de termes transfinis, ou des aires élémentaires transfinies.
On retrouve la formule exacte de Mercator :

$$\boxed{ln(2) = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}\}_{n_{+\infty}}} \tag{1}$$

Bien connu dans le cadre de l'infini potentiel.
Cepandant, dans ce cadre, on construit un rationnel qui converge vers l'irrationnel $ln(2)$, alors que dans l'infini achevé on a légalité au sens strict. Précisons que dans l'infini achévé à la Cantor, cette formule perd son sens.

Autres résultats suivant cette méthode

$$\boxed{e = \{\frac{n}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\}_{n_{+\infty}} \text{ (K.Knopp (1951))}} \tag{2}$$

$$\boxed{\{\frac{(2n)!}{(n!)} = (\frac{4n}{e})^n\}_{n_{+\infty}}} \tag{3}$$

$$\boxed{\{\frac{(2n)!}{(n!)^2} = C_{2n}^n = 4^n\}_{n_{+\infty}}} \tag{4}$$

$$\boxed{\text{Formule de Bernouilli } e = lim(1+\frac{1}{n})^n_{n\to+\infty} \text{ Barnes (1984)}} \tag{5}$$

Définition du logarithme Népérien

$$\boxed{q \in N, \{\sum_{k=n}^{qn} \frac{1}{k} = ln(q)\}_{n_{+\infty}}} \tag{6}$$

$$\boxed{\{\sum_{k=n}^{n^2} \frac{1}{k} = ln(n)\}_{n_{+\infty}}} \tag{7}$$

$$\boxed{\zeta = \{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \ldots - \frac{1}{n^2}\}_{n_{+\infty}}} \tag{8}$$

Exceptions au théorème de Césaro

Théorème

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, une suite de nombres réels ou complexes. Si elle converge vers une certaine quantité finie ℓ, alors la suite des moyennes de terme général $c_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$ converge également, et sa limite vaut ℓ.

Le théorème ne s'applique pas si u_k est dejà fonction d'un indice m tendant vers l'infini. Exemple : Si $u_k = (e^{\frac{k}{m}})_{m\to+\infty}$, alors $\sum u_k \to (e-1)$.

Théorème du réarrangement de Riemann

Théorème

Si une série à termes réels est semi-convergente, alors par une permutation de ses éléments on peut la faire tendre vers n'importe quel réel ou même vers l'infini.

Or :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n+\infty} u_k - \sum_{k=1}^{n+\infty} u_{\sigma(k)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{n+\infty} u_{\sigma'(k)}} \tag{9}$$

$\Longrightarrow$ Les sommations doivent s'étendre dans le transfini.

Convergence Asymptotique entre des fonctions de puissances et des séries de puissances

$$\boxed{(2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}})_{n_{+\infty}} = \ell} \tag{10}$$

$\ell = 1.4583237\ldots$

$$\boxed{(\frac{\alpha}{\alpha-1} n^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} - \sum_{k=1}^{n} k^{\frac{-1}{\alpha}})_{n_{+\infty}} = \ell'} \tag{11}$$

$$\boxed{(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} = \frac{2}{3} n\sqrt{n})_{n_{+\infty}}} \tag{12}$$

$$\boxed{(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \div \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}})_{n_{+\infty}} = \frac{1}{3}} \tag{13}$$

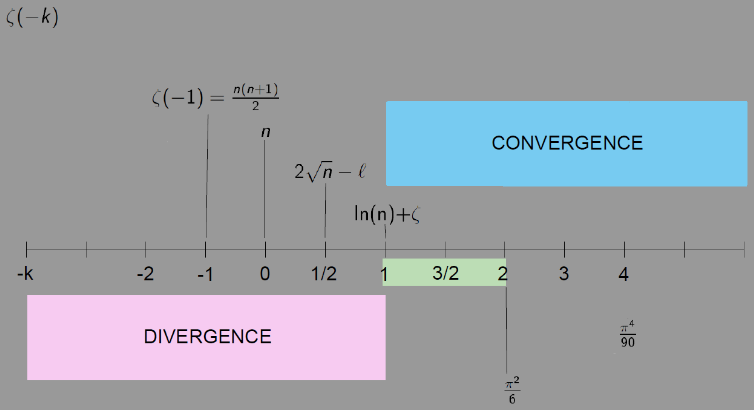
Les fonctions ζ

On pose $\zeta(k) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^k})_{n\to+\infty}$

1. k peut être entier - (Rationalité de $\zeta(k)$?)
2. k peut être réel - (Conditions de divergence ou convergence)
3. k peut aussi être complexe - (Hypothèse de Riemann)

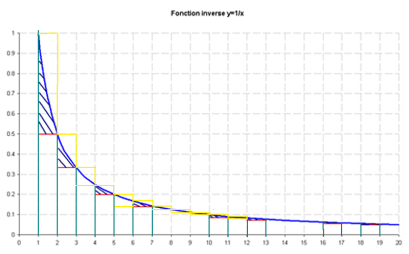
On pose $\zeta'(k) = (\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{i^k})_{n\to+\infty}$ la série alternée de $\zeta(k)$.

La fonction $\zeta(x)$



$$\zeta(2k) = (-1)^{k-1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$$

Divergence de la série harmonique - Autre Méthode



Soit A_k la série formée par les aires hachurées. On a $\sum A_k = ln(2) - \frac{1}{2} + ln(\frac{3}{2}) + \ldots = ln(\frac{2 \times 3 \times 5 \times \ldots p_k}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots p_{k-1}}) - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i}$.
Par la formule d'Euler, on arrive alors à $\sum A_k = ln(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i}) - \sum \frac{1}{p_i}$. Le premier terme diverge, A_k croissante, est extraite d'une suite convergente, donc A_k converge, soit la série de la somme des inverses des premiers ne peut que diverger.

Constante de Mertens

$$\boxed{\sum \frac{1}{p_i} - ln(ln(n) + \zeta)_{n_{+\infty}}} \tag{14}$$

On a aussi : $\sum \frac{1}{p_i - 1}$ et $\sum \frac{1}{p_i + 1}$ qui convergent asymptotiquement. On pourrait se demander à partir de quel k,$\sum \frac{1}{p_i + k}$ converge ou diverge ?

La constante d'Euler

1. $\frac{1}{n}_{n \to +\infty} = 0$ ou $u_n = \frac{1}{n}$ converge vers zéro.
2. Comme $\{1, \ldots, n_{+\infty}\}$ forme un tout achevé.
3. On a donc $u_{n_{+\infty}} = 0$ qui est le symétrique de $n_{+\infty}$. On peut étiqueter les élément d'un continu avec l'ensemble des parties de u_n.
4. Si ζ est rationnel alors ζ est constructible et $\zeta - \sum_{i=1}^{n_{+\infty}} \frac{1}{i}$ est constructible en un nombre infini dénombrable d'étapes.
5. Donc $ln(n_{+\infty})$ est constructible en un nombre infini dénombrable d'étapes, par une suite de droites seules.
6. Soit, dans le cadre de l'infini potentiel, ln tendrait vers une asymptote formée par une droite, paralléle à $x'Ox$. Ce qui est impossible
7. ζ ne peut être rationnelle.

Résultats sur des séries de fonctions ζ entières dans le cadre de l'infini achevé

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!} B_{2k}\right) = \frac{3}{4} + n_{+\infty}} \tag{15}$$

$$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} \zeta(2k+1)\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n_{+\infty}+2} + n_{+\infty}} \tag{16}$$

Autres résultats sur des séries de fonctions ζ entières dans le cadre de l'infini potentiel

$$\boxed{lim(\sum_{k=1}^{n}\zeta(2k+1))_{n\to+\infty}=\frac{1}{4}+lim(n)_{n\to+\infty}} \tag{17}$$

$$\boxed{lim(\sum_{k=2}^{2n}\frac{\zeta(k)}{n})_{n\to+\infty}=2} \tag{18}$$

$$\boxed{lim(\sum_{k=2}^{2n}(-1)^{k}\zeta(k))_{n\to+\infty}=\frac{1}{2}} \tag{19}$$

$S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

En 1713, Leibnitz attribuait à cette série le résultat $\frac{1}{2}$ par un prolongement analytique : pour
$|x| < 1, f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \to \frac{1}{1-x}$
$S_n = \sum_{k=1}^{n+\infty} (-1)^{k+1} k$, alors il vient :
$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+\infty} (-1)^{k+1} k = \sum_{k=1}^{n+\infty} k - \sum_{k=1}^{n+\infty} k = 0.$

$S_n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$

Leibnitz attribuait à cette série le résultat $\frac{1}{4}$, toujours par la méthode du un prolongement analytique : pour $|x| < 1, f(x) = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots \to \frac{1}{(1+x)^2}$. Se pose ici l'impossibilité possibilité d'épuiser tous les coefficients du polynôme.

Cependant
$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n_{+\infty}} (-1)^{k+1} k = -\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} 2k + \sum_{k=1}^{n_{+\infty}-1} (2k+1)$.
Soit $S'_{2n} = \sum_{k=1}^{2n_{+\infty}} k = \sum_{k=1}^{n_{+\infty}} 2k + \sum_{k=1}^{n_{+\infty}-1} (2k+1) \Rightarrow$
$\sum_{k=1}^{n_{+\infty}-1} (2k+1) = \sum_{k=1}^{2n_{+\infty}} k - \sum_{k=1}^{n_{+\infty}} 2k$.
On déduit alors :
$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n_{+\infty}} k - 4\sum_{k=1}^{n_{+\infty}} k = \left(\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{4n(n+1)}{2}\right)_{n_{+\infty}} = -n_{+\infty}$.

Arborescence de séries

$$s_{1,1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$s_{2,1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \dots \qquad s_{2,2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \dots$$

$$s_{3,1} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots \quad s_{3,2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} \dots \quad s_{3,3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{14} \dots \quad s_{3,4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

On est conduit à un paradoxe entre les résultats par une relation de récurrence et ceux obtenus par le passage à la limite : Série croissante et majorée donc convergente.

Arborescence de séries

$$s_{1,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \dots$$

$$s_{2,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} + \frac{1}{17} + \frac{1}{23} + \frac{1}{31} + \dots \qquad s_{2,2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{29} + \frac{1}{37} + \dots$$

$$s_{3,1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{11} + \frac{1}{23} + \frac{1}{41} + \frac{1}{59} + \dots \quad s_{3,2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{17} + \frac{1}{31} + \frac{1}{47} + \frac{1}{67} + \dots \quad s_{3,3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{29} + \frac{1}{43} + \frac{1}{61} + \dots \quad s_{3,4} = \frac{1}{7} + \frac{1}{19} + \frac{1}{37} + \frac{1}{53} + \frac{1}{71} + \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Mêmes Conclusions...

Divergence d'une série

La convergence asymptotique est bien plus forte que la notion de divergence. On peut lier la première à un nombre qui n'est pas infini (dans le sens que l'ensemble cardinal qu'il représente ne peut générer un continu avec l'ensemble de ses parties), mais qui n'est pas non plus fini dans le sens usuel (auquel cas la série convergerait).
Ces nombres sont donc des nombres entiers d'une nouvelle espèce : des entiers finis inachevés.
Cette notion est très puissante, puisqu'elle solutionne le paradoxe précédent, tout en offrant de nouvelles perspectives de certains résultats (Nombres premiers par exemple)

La cohérence potentiel-achevé

Proposition

Si une suite convergente prend en l'infini (achevé) la valeur ℓ, alors dans le cadre de l'infini potentiel, cette suite converge vers ℓ et inversement.

On peut considérer que ce résultat est vrai si ℓ est fini ou représente une valeur asymptotique.

Conjecture de Goldbach

Formulation moderne de la conjecture de Goldbach (1742) : "Tout nombre pair supérieur ou égal à 6 est la somme de 2 nombres premiers impairs".
Soit $\mathbb{P}_+ = (p_1, p_2)$ ou p_1 et p_2 sont des nombres premiers distincts différents de 2. D'après le théorème des nombres premiers, dans le cadre de l'infini potentiel :
$\bar{m} = (\frac{n}{2ln^2(n)} - \frac{T(n)}{2n})_{n \to +\infty}$.
Le quantité de couples par entier pair converge donc vers $\bar{m}$, soit le nombre d'entiers pairs tels qu'ils ne soient pas représentables comme la somme de deux nombres premiers est nécessairement fini.
On déduit que ces nombres sont des sommes de quatre nombres premiers.