Structures fondamentales

Hugues Genvrin

éléments

26 Juillet 2014

Structures fondamentales

Hugues Genvrin

éléments

26 Juillet 2014

Cette partie se positionne avant la construction d'une loi de composition interne qui précède les notions structurelles algébriques de magma, de monoïdes, de groupes, d'anneaux, de corps, d'espace-vectoriel et d'algèbre.
Le but est alors de retenir un corpus pour construire une partie algébrique qui se positionnera avant l'élaboration de structures plus complexes.
On étudiera dans la première sous-partie des éléments bien-connus dont le but est de se diriger vers une décomposition parfaite, c'est à dire une représentation de la relation de mise-en correspondance avec une « économie » de données.
La seconde sous-partie sera consacrée à des apports nouveaux à ces structures fondamentales avec la notion de jauge, une applications des morphismes de relation d'ordre, et la représentation des méismes.

Définition

On appelle relation binaire $\mathscr{R}$ sur E, toute relation qui permet de mettre en relation deux éléments quelconques de E. On notera la paire mise en relation $x_1 \mathscr{R} x_2$, qu'on pourra aussi représenter par $(x_1, x_2)_{\mathscr{R}}$, voire (x_1, x_2), s'il n'y a pas d'ambiguïtés entre différentes relations. x_2 sera dénommé le conséquent de x_1 et x_1 l'antécédent de x_2 relativement à la paire en relation.

Relations de correspondance

On appelle Γ une famille de couples de l'ensemble des parties de $E \times F$ mis en relation. Soient E et F deux ensembles, on appelle relation de correspondance de E vers F tout triplet de la forme (Γ, E, F) où $\Gamma \in P(E \times F)$, on la note $\mathscr{R}_\alpha$.

Ensembles en jeu

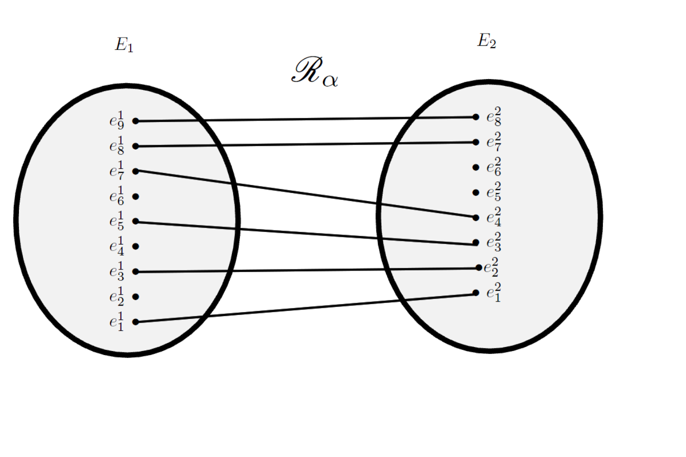
Domaine

On appelle domaine de E par la relation de correspondance $\mathscr{R}_\alpha$ la classe de tous les élément de E en relation avec au moins un élément de F par la relation de correspondance.

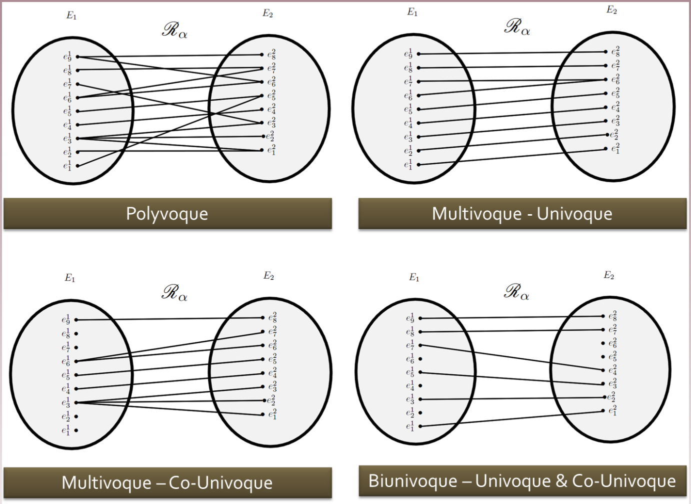
Co-domaine

On appelle co-domaine de E par α, la classe de tous les élément de F en relation avec au moins un élément de E par la relation de correspondance.

Diagramme sagittal



Typologie (I)


Polyvoque
Multivoque - Univoque
Multivoque – Co-Univoque
Biunivoque – Univoque & Co-Univoque

Typologie (II)

Multivoques

Une relation de correspondance $\mathscr{R}_\alpha$ sera dite multivoque si au moins un élément de son domaine est en relation avec au moins deux éléments de son co-domaine.

Polyvoques

On dira que le couple relationnel $(\mathscr{R}_\alpha; \mathscr{R}_{\alpha^{-1}})$ est multivoque si les relations $\mathscr{R}_\alpha$ et $\mathscr{R}_{\alpha^{-1}}$ sont toutes deux multivoques, et dans ce cas les relations de correspondance seront qualifiées de polyvoques.

Typologie (III)

Univocité

Si
$\forall(x_1, x_1') \in E^2,\ x_1 \neq x_1',\ \forall(x_2) \in F \mid ((x_1, x_2), (x_1', x_2)) \in \Gamma^2,\ (x_1, x_2) \neq (x_1', x_2)$.
Alors la relation $\mathscr{R}_\alpha$ sera dite univoque.

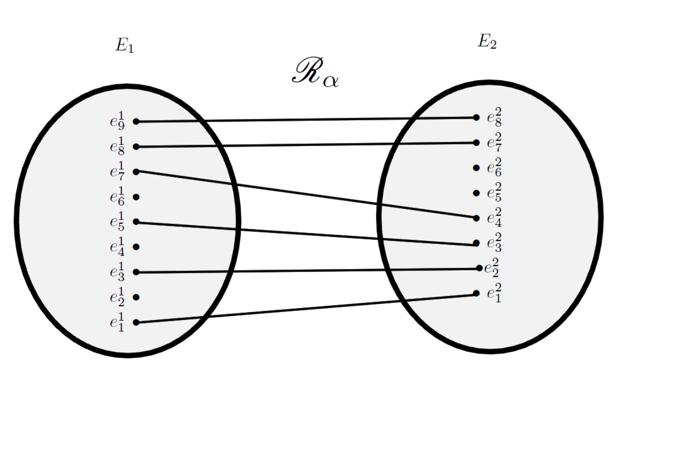
Co-univocité

Si
$\forall(x_2, x_2') \in F^2,\ x_2 \neq x_2',\ \forall(x_1) \in E \mid ((x_1, x_2), (x_1, x_2')) \in \Gamma^2,\ (x_1, x_2) \neq (x_1, x_2')$,
alors la relation $\mathscr{R}_\alpha$ sera dite co-univoque.

Bi-univocité

La relation $\mathscr{R}_\alpha$ sera dite biunivoque, si elle est univoque et co-univoque.

Diagrammes correspondants



Cas d'espèce

Identité

On appelle identité la relation de correspondance (Γ, E, E), où les paires de Γ sont composées des (x_i, x_i) où $x_i \in E$, on la notera $\mathscr{R}_{Id}$.

Réciproque

On appelle la relation de correspondance réciproque et on note $\mathscr{R}_{\alpha^{-1}}$ la correspondance (Γ', F, E) où $\forall (x_1, x_2) \in \Gamma$, $(x_2, x_1) \in \Gamma'$ et réciproquement $\forall (x'_1, x'_2) \in \Gamma'$, $(x'_2, x'_1) \in \Gamma$.

Définition

On dit qu'une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E, est une relation d'équivalence sur E, si elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Elle est réflexive : $\forall x_i \in E,\ \ x_i \mathscr{R} x_i$,
2. elle est symétrique : $\forall (x_i, x_j) \in E^2, x_i \mathscr{R} x_j \Leftrightarrow x_j \mathscr{R} x_i$,
3. elle est transitive : $\forall (x_i, x_j, x_k) \in E^3, (x_i \mathscr{R} x_j) \wedge (x_j \mathscr{R} x_k) \Rightarrow x_i \mathscr{R} x_k$,

Ordre

Pré-ordre

On appelle pré-ordre toute relation binaire, réflexive et transitive.

Ordre

On appelle relation d'ordre $\mathscr{O}$ sur un ensemble E tout pré-ordre, antisymétrique sur E, c'est à dire : toute relation binaire sur E, qui est réflexive, antisymétrique et transitive.

Ensemble quotient

Ensemble Quotient

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur une ensemble E. Pour tout $x \in E$, on appelle classe d'équivalence de x modulo $\mathscr{R}$, l'ensemble $\overline{x} = \{x_i \in E \mid x_i \mathscr{R} x\}$. L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}$ formant l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$.

Graphe fonctionnel

On appelle graphe fonctionnel une relation de correspondance univoque définie sur un sous-ensemble de $Dom(E)$.

Fonctions

Une fonction est une correspondance entre des éléments d'un ensemble de départ E et les éléments d'un ensemble d'arrivée F, qui a tout élément de l'ensemble de départ fait correspondre au plus une image dans l'ensemble d'arrivée.

Applications

Une application (ou fonction univoque) α est une fonction qui a tout élément de l'ensemble de départ E fait correspondre une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée F. On appellera ensemble de définition $\mathscr{D}_\alpha$ l'ensemble des valeurs qui ont une image par l'application α. Il est clair que $\mathscr{D}_\alpha \subseteq E$.

Fonction projective

On appelle projection suivant E_j d'un ensemble $\prod_{i=1}^{k} E_i$ vers un ensemble $E_j \subseteq \prod_{i=1}^{k} E_i$, l'application ν_j telle que :

$$\begin{array}{rccc} \nu_j : & \prod_{i=1}^{k} E_i & \rightarrow & E_j \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \mapsto & x_j \end{array}$$

Décomposition canonique

$$\begin{array}{rccc} \nu_\alpha : & E & \rightarrow & E/\mathscr{R} \\ & x_i & \mapsto & \widehat{x_i} \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\nu_\alpha"'] & F \\ E/\mathscr{R} \arrow[r, "\overline{\alpha}"'] & \bar{\alpha}(E/\mathscr{R}) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

Morphisme de relations binaires

Soit $(\mathscr{R}_\alpha, E, F)$ une relation de mise en correspondance univoque, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ des relations binaires sur E et F respectivement. Alors $\mathscr{R}_\alpha$ est une relation de mise en correspondance compatible avec le couple $(\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2)$, autrement dit un morphisme de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x_1^i, x_1^j \in E^2, x_2^\ell, x_1^k \in F^2 \text{ distincts dans leur ensemble respectifs,}$$
$$(x_1^i \mathscr{R}_1 x_1^j) \Leftrightarrow \left(\mathscr{R}_\alpha(x_1^i, x_2^{i'}\right) \ \mathscr{R}_2 \ \left(\mathscr{R}_\alpha(x_1^j, x_2^{j'})\right).$$

Morphismes de relations d'équivalence

Morphisme

Soient $\alpha : E \to F$ une application, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ des relations binaires sur E et F respectivement. Alors α est une application compatible avec le couple $(\mathscr{R}, \mathscr{R}')$, autrement dit un morphisme de $(E, \mathscr{R})$ dans $(F, \mathscr{R})$ si et seulement si :
$\forall (x_1, x_2) \in E^2, \alpha(x_1 \mathscr{R} x_2) = \alpha(x_1) \mathscr{R}' \alpha(x_2)$.

Détermination parfaite

La détermination parfaite

Un système composé d'un ensemble E, de k relations d'équivalences $(\mathscr{R}_i)$, qui se transforme par une fonction α en un ensemble F sera dit parfaitement déterminé par sa décomposition canonique, si et seulement si : $\overline{\alpha} \circ \mu$ est une bijection de $\prod[E/\mathscr{R}_i]$ vers $\overline{\alpha}(\prod[E/\mathscr{R}_i])$, et s'il n'existe pas de morphisme sur un domaine distinct.

La réduction canonique

La réduction canonique est un processus qui va réduire le domaine fonctionnel à des canons offrant une diminution de l'entropie.

La base canonique

Une base canonique est en produit cartésien de canons qui permettent de définir de manière unique tous les éléments du co-domaine.

« Nous avons vu qu'Archimède utilisa les jauges à des fins comparatives de quantités de masse dans un corps composé ou pour définir une distance à atteindre par rapport à un volume d'un corps donné. On a également rapporté que Galilée qui avait connaissance de l'œuvre d'Archimède fit usage de jauges pour la mesure des temps de parcours de billes sur un plan incliné, ou pour jauger le battement humain du pouls avec le celui d'un pendule. »
On se propose de construire un cadre formel d'une notion algébrique de jauge.

Antisymétrie générique

Soient $\mathscr{O}_1$ une relation binaire et $\mathscr{R}$ une relation binaire symétrique, on dira que $\mathscr{O}_1$ est antisymétrique générique si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x\ \mathscr{O}_1\ y) \wedge (y\ \mathscr{O}_1\ x) \Leftrightarrow x \mathscr{R} y$.

Anti-symétrie stricte

Soient $\mathscr{O}_1$ une relation binaire et $\mathscr{R}$ une relation binaire symétrique, on dira que $\mathscr{O}_1$ est antisymétrique stricte si : $\forall (x,y) \in E^2,\ (x\ \overline{\mathscr{O}_1}\ y) \wedge (y\ \overline{\mathscr{O}_1}\ x) \Leftrightarrow x \mathscr{R} y$.

Relation d'ordre stricte

On appelle relation d'ordre générique stricte $\mathscr{O}$ sur un ensemble E tout pré-ordre, antisymétrique générique sur E, c'est à dire : toute relation binaire sur E, qui est antisymétrique générique non stricte et transitive.

Une jauge

Représentation sous forme de couple d'une relation antisymétrique

Soit $\mathscr{O}$ une relation antisymétrique, alors on peut lui rattacher une représentation sous la forme d'une paire de relation élémentaire $\mathscr{O} = (\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$ qui sont les relations inverses.

Jauge

Soient deux ensembles $F \subset E$ munis d'une relation d'ordre générique $\mathscr{O}$ et dont la relation binaire associée est $\mathscr{R}$. On appellera jauge sur F le couple relationnel $\mathscr{J}_F(\mathscr{O}, \mathscr{R})$ tel que :

$$\forall (x, y) \in F^2, \ \left(x\overline{\mathscr{O}}y \wedge y\overline{\mathscr{O}}x\right) \Leftrightarrow x\mathscr{R}y$$

Jauge absolue

On dira que la jauge $\mathscr{J}$ est absolue si $F = E$, et on notera la jauge $\mathscr{J}_E(\mathscr{O},\mathscr{R})$ ou plus simplement $\mathscr{J}(\mathscr{O},\mathscr{R})$ voire $\mathscr{J}$ si les relations sont très clairement exposées.

Jauge compatible ou de capacité

Soient les ensembles $F \subset E$ et $F' \subset E'$, tels que $E \bigcup E' = \oslash$, s'il existe une jauge $\mathscr{J}_F(\mathscr{O},\mathscr{R})$ telle qu'elle soit aussi une jauge pour F', alors $\mathscr{J}_F$ est une jauge de capacité pour F et F'.

On voit donc qu'une jauge de capacité est capable de jauger un ensemble distinct d'où elle est native.

Jauge universelle

On dira d'une jauge qu'elle est universelle relativement aux domaines $\bigcup E_i$ si et seulement si la jauge est absolue et de capacité relativement à tout E_i.

Lorsqu'on parle de temps absolu ou d'espace à absolu (dans le cadre Newtonien en particulier), on suppose qu'il existe une jauge universelle du temps et une jauge universelle de l'espace pour les événements qui ad-viennent dans l'interprétation du monde.

Ensembles compatibles

Deux ensembles E_i et E_k sont compatibles s'il existe un morphisme α qui permette d'exprimer les éléments de l'un en les éléments de l'autre pour la relation d'équivalence de l'ensemble qui constituera le domaine.

Sphère

On appelle sphère $\mathscr{S}$ la réunion d'ensembles compatibles de jauges appartenant à J.

Finesse d'une jauge

Soient deux jauges $\mathscr{J}_i$ et $\mathscr{J}_k$ sur une sphère identique, si $\mathscr{J}_i$ est une jauge de capacité pour les ensembles de la sphère alors que $\mathscr{J}_k$ ne l'est pas, $\mathscr{J}_i$ sera dite plus fine que $\mathscr{J}_k$.

On rajoutera que si des ensembles E et E' appartiennent à une même sphère, alors alors la jauge la plus fine définira une jauge de capacité pour les domaines et co-domaines.

Proposition

Soient deux ensembles E, E' tels que E soit muni d'un couple relationnel $(\mathscr{O}, \mathscr{R})$ et E' d'une relation d'ordre $\mathscr{O}'$, on suppose un morphisme α de E vers E', alors on peut définir une relation d'équivalence $\mathscr{R}'$ sur E'.

Corollaire

Soit un morphisme α de E vers E', deux ensembles dont E est muni d'une jauge $\mathscr{J}_E$, et E' muni d'une relation d'ordre, alors il existe une jauge $\mathscr{J}_E'$ pour E'.

Proposition

Soient deux ensembles E, E' tels que E soit muni d'un couple relationnel $(\mathscr{O}, \mathscr{R})$ et E' d'une relation d'équivalence $\mathscr{R}'$, on considère un morphisme α de E vers E', alors on peut définir une relation d'ordre $\mathscr{O}'$ sur E'.

Corollaire

Soit un morphisme α de E vers E' deux ensembles, dont E est muni d'une jauge $\mathscr{J}_E$, et E' muni d'une relation d'équivalence, alors il existe une jauge $\mathscr{J}'_E$ pour E'.

Morphisme et portabilité du jaugeage

Soit un morphisme α de E vers E', dont E est muni d'une jauge $\mathscr{J}_E$, alors il existe une jauge $\mathscr{J}_{E'}$ pour E'.

Réciproque

Soit un morphisme α de E vers E', dont E' est muni d'une jauge $\mathscr{J}_{E'}$, alors il existe une jauge $\mathscr{J}_E$ pour E.

Jauges et transformations

-Transformations continues et discrètes :

Existence d'une jauge optimale

Soit une transformation de α de E vers E' où chaque ensemble est muni d'une jauge, alors il existe une jauge dite optimale, de capacité pour jauger tous les éléments de la transformation de E vers E' avec la meilleure finesse parmi l'ensemble des jauges de capacité associées aux sous-ensembles intermédiaires tout au long de la transformation.

-Transformation continue :

Invariance de jauge

Soit une déformation continue α de E vers E', pour lequel E est muni d'une jauge $\mathscr{J}_E$, alors c'est une jauge optimale tout au long de la déformation vers E'.

« C'est comme s'il y avait les caractéristiques d'une jauge absolue entre deux ensembles distincts. On peut remarquer que si E et E' n'ont pas un même nombre caractéristique d'Euler-Poincaré, la jauge ne se conserve pas, la jauge n'est pas en général un invariant pour un morphisme. Prenons le cas d'un tube et d'un ruban de Möbius. Si l'on coupe en deux dans le sens de la grande section les deux rubans, le ruban de Möbius donnera un ruban avec deux torsions au lieu d'une et le tube donnera deux tubes. Ainsi, il est évident que les éléments à la frontière des deux tubes ne seront pas ordonnables par la jauge initiale alors que leurs antécédents seront jaugeables par cette même jauge. »
« On remarquera que la détermination parfaite ne se préserve pas, un contre-exemple étant celui du tore dont la détermination parfaite ne se préserve pas sous la forme d'une tasse de café : on pense au segment d'intersection de la tasse et de l'anse. »

Vers une nouvelle notion d'espace

Au lieu de présupposer un espace sous-jacent à une représentation, une multiplicité peut déterminer un objet de grandeur grace à l'existence d'une jauge.

Quantum

On appelle quantum pour un ensemble E une multiplicité jaugeante sur E.

« Le jaugeage pouvant venir aussi bien de la totalité des éléments, ou juxtaposition des quantités que d'un rapport entre les éléments qui sert de jauge de capacité. Cette dernière propriété induit la notion de variété riemanienne alors que pour la première la détermination doit être considérée comme une prise en considération du tout. »

Variété quantitative

On appelle variété quantitative d'un ensemble E un sous-ensemble de quantités de E suivant une jauge $\mathscr{J}_E$.

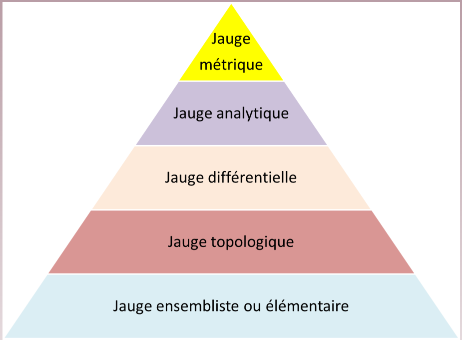
Quantum

Dimension d'un quantum

La dimension d'un quantum étant la dimension de l'espace quotient de la projection canonique de sa détermination parfaite.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\nu"'] & E \\ \prod_i^m \left[E/\mathscr{R}_i\right] \arrow[r, "\overline{Id}"'] & \overline{Id}\left(\prod_i^m \left[E/\mathscr{R}_i\right]\right) \arrow[u, "\iota"'] \end{tikzcd}$$

La notion de jauge peut se déployer sur la topologie, l'analyse. On peut également intégrer une pyramide de jauge pour réaliser des mesures ou encore calculer des distances, des écarts. Ces notions sont des applications algébriques qu'on ne présentera pas dans le cadre des structures fondamentales.



Morphismes de relations d'ordre

Soit $(\mathscr{R}_\alpha, E, F)$ une relation de mise en correspondance univoque, $\mathscr{O}_1$ et $\mathscr{O}_2$ des relations d'ordre sur E et F respectivement. Alors $\mathscr{R}_\alpha$ est une relation de mise en correspondance compatible avec le couple $(\mathscr{O}_1, \mathscr{O}_2)$, autrement dit un morphisme de E dans F si et seulement si :

$$\forall (x_1^i, x_1^j \in E^2, x_2^\ell, x_1^k \in F^2 \text{ distincts dans leur ensemble respectifs},$$
$$(x_1^i \mathscr{O}_1 x_1^j) \Leftrightarrow \left(\mathscr{R}_\alpha(x_1^i, x_2^{i'}\right) \ \mathscr{O}_2 \ \left(\mathscr{R}_\alpha(x_1^j, x_2^{j'})\right).$$

Une vérité expérimentale est tout d'abord une vérité logique :

$$\mathscr{T}\left(\mathscr{R}_\alpha, \mathscr{P}\right)$$

Où :

1. $\mathscr{T}$ est un test (d'hypothèses dans la plupart des cas concernant les individus),
2. $\mathscr{R}_\alpha$ est une relation de mise en correspondance entre un ensemble E et un ensemble F qui sera le plus souvent un ensemble quantifié,
3. $\mathscr{P} = \prod_i E/R_i$ correspondra au patron canonique du cadre expérimental.

L'existence de morphismes entre les relations de correspondance et des relations d'équivalence liées à des canons cachés ou plus simplement non pris en compte dans le patron pourra conduire à un biais qu'on appellera biais entropique de causalité lorsqu'on parlera de vérité sémantique, et de biais morphique lorsqu'on parlera de la vérité logique. Il se matérialisera par une défiguration de la vérité, qui sera porteuse de flou, de désordre, et au pire d'une contradiction inhérente à l'énoncé sémantique final.

-Dimensions des axes d'évaluation et résultats permettent de déterminer un taux entropique et d'évaluer la paire (entropie, résultats). La dimension des axes jouant un rôle important, il faut qu'elle soit pertinent.

$$\tau_{\mathscr{H}} = \frac{q}{p}.$$

$R_{mauvais}/\mathscr{H}_{faible}$	$R_{mauvais}/\mathscr{H}_{grande}$
$R_{bons}/\mathscr{H}_{faible}$	$R_{bons}/\mathscr{H}_{grande}$

-Extension d'une vérité restreinte à une population : Dans le cas d'études cliniques, on travaille sur groupes de patients, le passage à une extension de la population cible de la population étudiée à la population générale peut-être source de biais morphiques.

Méisme

On appelle méisme est un ismorphisme qui a une entité représentée par un élément d'un ensemble E fait correspondre cette entité représentée par un élément distinct dans l'ensemble F.

« Un exemple trivial de méisme serait un point d'un ensemble qui est renvoyé vers ce point dans un autre ensemble. On assimile souvent le méisme à une identité lorsque le morphisme est du type $x \mapsto x$. L'intérêt du méisme est de l'appliquer à un triplet $(E, F, \mathscr{J}_E)$ vers un triplet $(F, E, \mathscr{J}_F)$, voire un triplet $(E', F', \mathscr{J}_{E'})$ qui conserverait les caractéristiques statiques et dynamiques. Le concept va au-delà d'une transposition dans le sens géométrique, puisqu'une transposition sous-entend l'idée d'un ensemble originel, qui nous ferait croire qu'il existe une réalité qui est rendue par la représentation originale. Le méisme va permettre de travailler dans une théorie hypothético-déductive ne retenant qu'un axiome hors de la sphère mathématique, celui de la représentation du système par une fonction ponctuelle, nous permettant alors de dériver des résultats non tautologiques. »

On renvoie le lecteur au chapitre « Action et Dynamique »pour trouver une application du méisme.