Quelques voies autour de la théorie des Nombres

Hugues Genvrin

14 mai 2009

Quels nombres ?

- Les Chiffres
- Les entiers naturels
- Les entiers relatifs
- Les décimaux
- Les rationnels
- Les réels
- Les irrationnels
- Les transcendants
- Les imaginaires
- Les quaternions,
- Les typés (double, float, integer,booléens...)
- Les ordinaux
- Les cardinaux
- Les transfinis
- ...

Cinq approches

1. Géométrique
2. Algébrique
3. Mathématiques appliquées ou le Calcul
4. Philosophie des mathématiques et Logique
5. L'analyse

Les paradoxes de Zénon

Zénon d'Elée (-480,-420) était un philosophe Grec de la période pré-socratique. Il appartenait à l'école de Parménide.
Zénon a soumi quatre paradoxes dont on va détailler les trois premiers, le quatrième, celui du stade étant solutionné par la méthode des vitesses relatives.
Au-delà du paradoxe, on peut retenir la conclusion de Zénon : Puisqu'il y a ces paradoxes, c'est que la représentation du monde n'est pas juste.
Nous allons essayer de construire une représentation en accord avec une réalité empirique comme dans le cas des deuxième et troisième paradoxe, le premier étant la formulation d'un cadre idéal, difficile à reproduire dans la réalité.

Achille et la Tortue

Sans doute le plus célèbre des paradoxes de Zénon : Achille court après une tortue qui à la date t_0 se trouve à une distance T_1, pendant qu'il parcourt la distance T_1, la tortue a parcouru la distance T_2. Pendant qu'Achille parcourt cette distance T_2, la tortue parcourt la distance T_3...et ainsi de suite.
On voit que cette formulation est plus large que le cas ou la série de terme général T_n converge. Il existe des solutions communément admises pour le cas ou $T_n = \frac{1}{2^n}$.
Dans ce cas $\sum T_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots$, converge vers 2. On dit alors qu'Achille rattrape la Tortue en une infinité de pas et en un temps égal à 2 secondes.

La Dichotomie

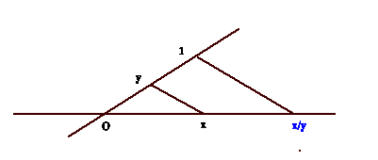
Avant qu'un coureur ne parcourt une distance D, il doit parcourir la moitié de cette distance. De même avant de parcourir $\frac{D}{2}$, il doit parcourir $\frac{D}{4}$...et ainsi de suite de telle sorte qu'il doit parcourir une infinité de distances avant même de partir.

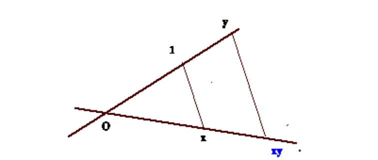
La Flêche

Une flêche en mouvement est à chaque instant à l'arrêt.
L'instant étant pour Zénon, une unité élémentaire insécable, durant lequel la flêche ne peut bouger.

La règle et le compas (1)

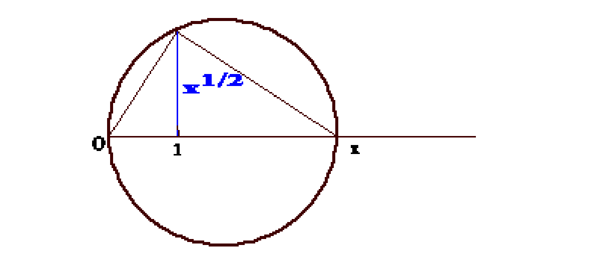
Avec le théorème de Thalès, les rationnels sont constructibles à la règle seule.





La règle et le compas (2)

Si x est constructible à la règle et au compas, on peut construire $\sqrt{x}$ à la règle et au compas.
Application du Théorème de Pythagore



Problème autour des irrationnels

Définition

Un nombre x est rationnel s'il existe $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $x = \frac{p}{q}$. Un nombre qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

La duplication du cube
Selon la légende rapportée par Eratosthène, la peste régnant à Délos, l'oracle d'Apollon déclara qu'il désirait un autel cubique double de l'existant pour faire cesser l'épidémie.
Cela revenait à construire le nombre $\sqrt[3]{2}$, ce n'est qu'en 1837 que la solution sera découverte par Wantzel.

Problème autour des irrationnels

Certains irrationnels sont constructibles à la règle : $\sqrt{2}$
e est irrationnel,mais n'est pas constructible.
Lambert démontre en 1761 que π est irrationnel.
Apery démontre en 1970 que $\zeta(3)$ est irrationnel.
Cependant beaucoup de problèmes restent encore ouverts :

1. La majorité des $\zeta(2n+1)$
2. $ln(\pi)$
3. $2^e, \pi^e, \ldots$
4. ...

Algèbre

On attribue l'origine de l'algèbre à Diophante qui vécu à Alexandrie 200-284

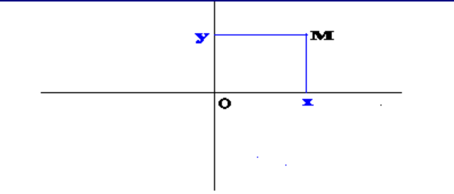
Equation Diophantienne

Ce sont des équations algébriques à coefficients entiers(ou rationnels) dans laquelle on recherche des solutions qui sont des entiers ou des rationnels.

On distingue 6 problèmes dont certains ont été résolus.
Le plus connu est le problème de Fermat résolu par Wiles.

L'algèbre

Dès le XIII° siècle, Jordanus Nemorarius utilise des variables littérales dans ses calculs.
Viète et Girard au XVI° et XVII° vont promouvoir le calcul littéral.
Liaison avec l'approche géométrique : le repère Cartésien



Les équations algébriques

Un ou des nombres peuvent être des solutions d'une équation

1. 1° Degré
2. 2° Degré :Babyloniens (-1600), Grecs
3. 3° Degré : Tartaglia(1535), Cardan(1545), Lagrange (1770), Euler
4. 4° Degré : Euler,Ferrari(1545),Lagrange (1770)
5. 5° Degré : Abel(1824), Galois (1830/1843)
6. ...

La résolution des problèmes antiques

Théorème de Wantzel (1837)

Tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et son degré est une puissance de 2.

Les nombres transcendants

Définition

Un nombre a est algébrique sur $\mathbb{K}$ s'il existe un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ ayant a pour racine.

Définition

Un nombre non algébrique sur $\mathbb{K}$ est transcendant sur $\mathbb{K}$

Liouville (1844) donne les premiers exemples de nombres transcendants sur $\mathbb{Q}$: $\sum_{n>0} 10^{-n!}$.
Hermitte démontre la transcendance de e en 1873.
Lindemann démontre la transcendance de π en 1882.
Gel'fond démontre la transcendance de e^{π} en 1929.

Les structures algébriques

1. Monoïde
2. Groupe
3. Anneaux : $\mathbb{Z}/n$,...
4. Corps (Dedekind : 1870) : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$,...
5. Espaces Vectoriels : $\mathbb{R}^n$,...

Les calculs pratiques

Dès l'ére Egyptienne, les nombres ont servi à mesurer des champs, pour le paiement des impôts.
Les nombres décimaux émergent au $XV°$ siècle en Europe ; avec des applications en comptabilité.
Les nombres calculables par ordinateurs (exemples)

Type	Définitions
Boolean	0-1
Char	-128 $\longrightarrow$ 127
Int	-32 768 $\longrightarrow$ 32767
Long	2 147 483 648 $\longrightarrow$ 2147483647
Double	-1.7 $\times 10E - 308 \longrightarrow 1.7 \times 10E + 308$

Quelques problèmes entre l'informatique et la théorie des nombres

1. Trier une liste finie de nombres le plus rapidement possible (ex :Algorithme de Hoare)
2. Gestion d'une base de données (Structure des tables, bases objets)
3. Cryptologie (ex : algorithme RSA)
4. Compression d'un fichier (Images-JPG,Sons-MP3,Vidéos-Mpeg4)
5. Recherche opérationnelle (Gestion d'une tournée, de positionnements d'entrepôts,...)
6. ...

Approche philosophique

1. Euclide : "Un nombre est une quantité d'unité"
2. Bolzano : "On peut voir certains infinis comme des touts achevés"
3. Cantor : Passage à la quantification des infinis.
4. Frege : "Un nombre cardinal est une classe d'ensembles"
5. Husserl : "La quantité est définie comme un tout dont les parties sont unifiées par des liaisons collectives"

Approche logique

1. Zermelo (1908) : Axiome du choix, Axiome de l'infini, Axiome de l'union, Principe du bon ordre.
2. Peano (1889) : Construction de l'ensemble des entiers naturels, ou chaque entier à un successeur. L'unité étant définie de manière axiomatique.

On peut critiquer certains choix axiomatiques, ou démonstrations.

L'analyse

1. Méray, Cantor, Heine : les irrationnels sont des limites de suites de rationnels
2. Les coupures de Dedekind

Les ensembles infinis

Définition A

Un ensemble est infini s'il n'est pas fini.

Cependant, on peut avoir à faire à des ensembles finis inachevés. Un ensemble est achevé si on peut le voir comme une totalité accomplie.
De là nait la confusion Aristotélicienne entre l'infini potentiel et la notion d'ensembles finis inachevés.
Par exemple l'ensemble des nombres premiers, l'ensembles des nombres pairs, des carrés,...

Définition Bolzano-Dedekind B

Un ensemble est infini s'il peut être mis en bijection avec une de ses parties.

Pour la définition B, peut-on mettre en bijection une partie propre avec l'une de ses parties partielle ? Image du ressort de constante de raideur nulle. En fait on ne peut pas, on ne peut mettre en bijection un ensemble avec une de ses propres parties c'est à dire partielle, qu'en le considérant comme une partie propre. La granularité des points est donc modifiée.

Les ensembles infinis

Autre Définition C

Un ensemble est infini si l'ensemble de ses parties peut permettre l'indexation des éléments d'un continu.

En effet le cardinal d'un continu semi-ouvert comme par exemple $[0;1[$ est $2^{n\to+\infty}$, or l'ensemble des parties d'un ensemble X à pour cardinal 2^n ou n est le cardinal de X

Théorème

Le cardinal du plus petit ensemble infini est $n_{+\infty} = \#\{0,1,\ldots,n\}_{n\to+\infty} = \#\mathbb{N}$

Les nombres tansfinis - Cantor (1891)

Cantor : $Card(\mathbb{N}) = \aleph_0$ et $card([a, b]) = card(\mathbb{R}) = 2^{\aleph_0}$
Autre approche : $Card(\mathbb{N}, e) = n_{+\infty} + 1$.
Cela change beaucoup de choses dans l'univers des mathématiques. La définition de Cantor se base ici sur la notion d'infini potentiel pas d'un infini achevé.

Pluralités de zéros

Aristote rejetait le zéro tout comme l'infini achevé, le zéro est introduit par les Indiens au $V°$ siècle. On retrouve son usage et ses règles d'applications dans les écrits de Brahmagupta (VII°), et c'est Bhaskara (VII°) qui liera le premier le zéro à l'infini
$\frac{1}{0} = \infty$
C'est Léonard de Pise qui l'introduira en Europe au XI° siècle de retour d'Afrique du Nord.

La mesure

La clef véritable pour appréhender le continu est d'accepter que l'infini est lié au zéro. Donc s'il existe plusieurs infinis, il est logique qu'il y ait plusieurs zéros.
Le zéro en tant que mesure du point, est distinct du zéro des entiers. Zéro point signifie rien, mais un point de mesure zéro signfie que le point existe, qu'il à une mesure nulle.
Le point à la puissance du continu, et une infinité de points peuvent donc représenter le zéro.
La mesure d'un point d'un continu est nulle, mais ce n'est pas rien. Ce n'est pas également ce dont la partie est nulle.

Définition

La mesure nulle est la taille d'un point pouvant constituer un continu.

Généralisation de la partie entière

Partie entière

On appelle partie entière du nombre réel x et on note $[x]$ ou $E(x)$, l'entier n tel que $0 < x - n < 1$

Partie entière à l'ordre k fini ou transfini

On appelle partie entière du nombre réel x à l'ordre k et on note $[x]_k$ le réel n tel que $0 < x \times 10^k - n \times 10^k < 1$ avec $n \times 10^k$ entier.

On a alors : $[x]_0 = [x] = E(x)$. On peut appliquer la partie entière aux nombres transfinis, de sorte que $[\frac{1}{2^{n_{+\infty}}}]_{+\infty} = 0_{+\infty}$

Conséquences pour Zénon

Les deux premiers problèmes

Il existe n_0 fini tel que $\forall n > n_0,\ 2^n > n_{+\infty} \Leftrightarrow \frac{1}{2^n} < 0_{+\infty}$.

Remarque sur le premier problème

Si la série des T_n diverge, mais que $T_{+\infty} = 0$, alors c'est en l'infini qu'Achille rattrapera la Tortue.

Conclusion

La théorie des nombres peut être abordée sous plusieurs angles. On peut certes distinguer les problèmes pratiques et les problèmes qui le sont moins.
En général, les résultats et théories répondent à des questions ou problèmes posés.
Le système conceptuel défendu ici s'appuie sur une évidence empirique qui s'oppose à l'axiomatique basée sur des croyances non vérifiées par l'expèrience.