Achille, la tortue et le grain

Le paradoxe de Zénon et le niveau d'observation

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

Le paradoxe d'Achille et de la tortue affirme que le coureur le plus rapide ne rattrape jamais le plus lent, puisqu'il doit d'abord atteindre chacun des points que la tortue vient de quitter. Nous le reformulons dans un modèle non standard de l'arithmétique, au sens de Skolem, muni de la numérosité ν, de la notion de grain et de celle de niveau d'observation. L'écart entre Achille et la tortue ne s'annule à aucun rang, même illimité. Mais au niveau d'observation k, dont le point de résolution a l'épaisseur $2^{-k\nu}$, l'écart devient ponctuel exactement au rang $k\nu + \ell$, où ℓ ne dépend que de l'avance initiale. Chaque cran d'observation ajoute donc exactement ν étapes à la poursuite. La zone de rencontre, limitée au niveau k, est à l'infini au niveau $k + 1$, où elle contient ces ν étapes : le point de rencontre est un grain. Enfin, la course est auto-similaire sous une homothétie de centre le point de rencontre. Zénon la lit en laissant le niveau d'observation suivre l'objet, et les étapes forment alors une partie propre qui ne s'achève pas ; à niveau d'observation fixe, elles forment une partie partielle, et la course s'achève. Les deux lectures diffèrent exactement d'un changement de niveau d'observation.

Table des matières

1 Introduction historique **2**
- 1.1 Zénon d'Élée . . . 2
- 1.2 Les quatre arguments contre le mouvement . . . 2
- 1.3 Les réponses classiques . . . 2
- 1.4 L'infiniment petit retrouvé . . . 3

2 Cadre **3**
- 2.1 Le modèle et la numérosité . . . 3
- 2.2 Infinitésimaux, monades et point absolu . . . 3
- 2.3 Niveau d'observation . . . 4
- 2.4 Partie partielle et partie propre . . . 4

3 La course **4**
- 3.1 Modélisation . . . 4
- 3.2 Le paradoxe subsiste à tout rang . . . 5

4 La course à un niveau d'observation **6**
- 4.1 Le rang de rattrapage . . . 6
- 4.2 Les trois régimes de la poursuite . . . 6

5 Que le point de rencontre est un grain **7**

6 Deux lectures : partie propre et partie partielle **8**
6.1 L'auto-similarité de la course 8
6.2 Les deux lectures de la dilatation 8
6.3 Le regard de Zénon 9
6.4 Les étapes et la définition de l'infini 9

7 Bilan **10**

1 Introduction historique

1.1 Zénon d'Élée

Zénon est né à Élée, colonie grecque du sud de l'Italie, vers -490. Platon, dans le *Parménide* [11], le décrit à quarante ans environ, venu à Athènes avec son maître Parménide, alors âgé d'environ soixante-cinq ans, et rencontrant le jeune Socrate. Zénon y explique que son livre défendait la thèse de Parménide, l'unité et l'immobilité de l'être, en montrant que la thèse adverse, celle de la pluralité et du mouvement, conduit à des conséquences plus absurdes encore. Diogène Laërce rapporte qu'Aristote voyait en lui l'inventeur de la dialectique [5].

Le livre de Zénon est perdu. Nous connaissons ses arguments par Platon, par Aristote, et par les commentateurs tardifs, Simplicius surtout, qui en citent quelques fragments. Ces arguments se répartissent en deux familles : ceux contre la pluralité, et ceux contre le mouvement.

1.2 Les quatre arguments contre le mouvement

Aristote expose les quatre arguments contre le mouvement au livre VI de la *Physique* [1]. On les désigne habituellement ainsi.

1. *La dichotomie.* Pour parcourir une distance, il faut d'abord en parcourir la moitié, puis la moitié du reste, et ainsi de suite : le mobile n'arrive jamais.
2. *Achille et la tortue.* Le plus rapide ne rattrape jamais le plus lent, car il doit d'abord atteindre le point d'où le plus lent est parti, et pendant ce temps celui-ci a toujours un peu avancé.
3. *La flèche.* À chaque instant, la flèche en vol occupe un espace égal à elle-même ; elle est donc au repos à chaque instant, et ne se meut jamais.
4. *Le stade.* Deux rangées de corps égaux se croisant en sens contraire conduiraient à ce que la moitié d'un temps soit égale à son double.

Aristote note lui-même qu'Achille n'est qu'une variante de la dichotomie : dans les deux cas, la distance restante est divisée sans fin.

1.3 Les réponses classiques

Aristote. Au livre VI de la *Physique*, Aristote répond que le temps est divisible comme la longueur : à une infinité de segments correspond une infinité d'intervalles de temps, et l'on peut parcourir en un temps fini une longueur divisible sans fin. Au livre VIII, il précise sa réponse. Une ligne n'est pas faite de points, et les points de division n'existent qu'en puissance tant qu'on ne s'y arrête pas : Achille ne parcourt pas une infinité *en acte* de segments.

La somme des séries. Archimède sait déjà sommer une série géométrique dans sa *Quadrature de la parabole*, mais c'est Grégoire de Saint-Vincent qui, en 1647, lie explicitement le paradoxe d'Achille au calcul de la somme d'une progression géométrique infinie et au lieu précis du rattrapage [10]. Après la définition de la limite par Cauchy [4], la réponse devient standard :

les durées des étapes forment une série convergente, la somme est finie, et Achille rejoint la tortue au point limite.

Les objections. Cette réponse a été jugée insuffisante. Bergson [3] y voit une confusion entre le mouvement, acte indivisible, et la trajectoire parcourue, divisible à volonté. Thomson [14] pose la question des *supertâches* : qu'une somme infinie converge ne dit pas comment l'on achève une infinité d'actes successifs. Le calcul des limites répond à la question « où et quand » ; il laisse ouverte la question « comment ».

1.4 L'infiniment petit retrouvé

Le cadre de Cauchy et de Weierstrass écarte les infinitésimaux. Ils reviennent au XX$^{\text{e}}$ siècle par deux voies. Skolem construit en 1934 un modèle non standard de l'arithmétique, qui contient des entiers plus grands que tous les entiers usuels [13]. Robinson fonde en 1961 l'analyse non standard, où les infinitésimaux sont de vrais nombres [12]. Benci et Di Nasso introduisent ensuite la numérosité, une manière de compter les ensembles infinis qui conserve le principe d'Euclide selon lequel le tout est plus grand que la partie [2].

La théorie du grain [6] s'inscrit dans la voie de Skolem. Elle ajoute une donnée que les réponses classiques laissent implicite : le *niveau d'observation* [7], c'est-à-dire le grain qui joue le rôle du point. Toute affirmation de la forme « Achille a rattrapé la tortue » suppose un tel niveau : elle signifie que l'écart n'est plus discernable. Nous montrons qu'avec cette donnée, le paradoxe reçoit une réponse précise et quantitative. À chaque niveau, la poursuite s'achève à un rang déterminé ; d'un niveau au suivant, elle s'allonge d'exactement ν étapes ; et le « jamais » de Zénon tient à ce qu'il laisse le niveau d'observation suivre la course.

2 Cadre

2.1 Le modèle et la numérosité

On se place, comme dans [8], dans un modèle non standard $\mathcal{M}$ de l'arithmétique de Peano au sens de Skolem. Ses éléments sont appelés entiers ; ceux qui proviennent de $\mathbb{N}$ sont dits *standard*, les autres *illimités*. Toute propriété arithmétique vraie dans $\mathbb{N}$ est vraie dans $\mathcal{M}$ (transfert), et le schéma de récurrence vaut pour les formules arithmétiques.

On fixe un entier illimité H et l'on pose $\nu = H!$. La *numérosité* d'une partie définissable F de $\mathbb{N}$ est le nombre $\operatorname{num} F$ de ses éléments dans la fenêtre $[1, \nu]$.

On note $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ l'ensemble des fractions p/q formées avec les entiers de $\mathcal{M}$, $q \neq 0$. Toutes les grandeurs de ce texte sont des éléments de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$; on n'a jamais besoin des nombres réels. Un élément de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ est *limité* s'il est majoré en valeur absolue par un entier standard, *illimité* sinon.

2.2 Infinitésimaux, monades et point absolu

Définition 2.1. Un élément $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ est *infinitésimal* si $|\varepsilon| < 1/n$ pour tout entier standard $n \geq 1$. La *monade* de $a \in \mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ est

$$\mu(a) = \{b \in \mathbb{Q}_{\mathcal{M}} : b - a \text{ infinitésimal}\} = \bigcap_{n \geq 1 \text{ standard}} \left[a - \tfrac{1}{n},\ a + \tfrac{1}{n}\right].$$

Définition 2.2 (Point absolu)**.** Un rationnel a est un *point absolu* de $\mathbb{Q}$ si

$$\bigcap_{n \geq 1} \left[a - \tfrac{1}{n},\ a + \tfrac{1}{n}\right] \cap \mathbb{Q} = \{a\}.$$

Tout rationnel standard est un point absolu de $\mathbb{Q}$: la division sans fin aboutit, dans $\mathbb{Q}$, à une épaisseur nulle.

Dans $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$, la même intersection, prise sur les n standard, n'est plus réduite à $\{a\}$: c'est la monade $\mu(a)$, qui contient $a + 2^{-\nu}$, $a + 2^{-2\nu}$, et ainsi de suite. Ce que la droite standard voit comme un point est un grain : c'est le contenu de l'énoncé « le point absolu est un grain » [9].

2.3 Niveau d'observation

Nous reprenons les définitions de [7], en identifiant le cran n_∞ de la tour des grains à la numérosité ν.

Définition 2.3 (Niveau d'observation)**.** Soit $k \geq 0$ un entier. On pose $\delta_k = 2^{-k\nu}$. Une représentation est *au niveau d'observation* k si son unité élémentaire est le grain d'épaisseur δ_k, appelé *point de résolution*. Pour un objet X de longueur $|X|$, on note

$$\#_k(X) = \frac{|X|}{\delta_k}$$

son nombre de points de résolution au niveau k.

Le niveau 0 a pour point de résolution l'unité. Le niveau 1 est le *continu de base* de [8], le segment $[0, 1]$ découpé en 2^ν grains d'épaisseur $2^{-\nu}$.

Définition 2.4 (Statut relatif)**.** Au niveau d'observation k, un objet X est

(a) *ponctuel* si $\#_k(X) \leq 1$;

(b) *limité* si $\#_k(X)$ est limité ;

(c) *à l'infini* si $\#_k(X)$ est illimité.

Proposition 2.5 (Relativité [7])**.** *Pour tout objet X et tout k, $\#_{k+1}(X) = 2^\nu \#_k(X)$. En particulier, un objet limité et non ponctuel au niveau k est à l'infini au niveau $k + 1$.*

Démonstration. $\delta_k = 2^\nu \delta_{k+1}$. Si $1 < \#_k(X)$, alors $\#_{k+1}(X) > 2^\nu$ est illimité. □

« Ponctuel », « limité » et « à l'infini » ne sont donc pas des propriétés d'un objet, mais d'un objet *à un niveau d'observation*.

2.4 Partie partielle et partie propre

Rappelons la distinction introduite dans [8]. Une partie F d'un ensemble E est considérée :

— comme *partie partielle* lorsqu'on la regarde incluse dans E, au grain de base de E ;

— comme *partie propre* lorsqu'on la regarde comme un tout, renuméroté par une bijection avec E.

Ce n'est pas une propriété de F, mais du regard porté sur elle. Nous verrons à la section 6 que, pour la course, ces deux regards sont exactement les deux lectures de la dilatation de [7] : niveau d'observation fixe, ou niveau d'observation qui suit l'objet.

3 La course

3.1 Modélisation

Achille, noté A, poursuit la tortue, notée T, le long d'une droite. Achille court deux fois plus vite que la tortue. On fixe un rationnel standard $x_0 > 0$, l'avance initiale de la tortue. À l'étape x, Achille rejoint le point où se trouvait la tortue au début de l'étape ; pendant ce temps, la tortue parcourt la moitié de cette distance.

Définition 3.1. On pose $A_0 = 0$, $T_0 = x_0$ et, pour tout entier x de $\mathcal{M}$,

$$A_{x+1} = T_x, \qquad T_{x+1} = T_x + \frac{x_0}{2^{x+1}}.$$

L'*écart* au rang x est $\Delta_x = T_x - A_x$. L'*étape* x est le segment $E_x = [A_x, A_{x+1}]$ parcouru par Achille.

Lemme 3.2. *Pour tout entier x de $\mathcal{M}$,*

$$T_x = x_0\Big(2 - \frac{1}{2^x}\Big), \qquad A_x = x_0\Big(2 - \frac{2}{2^x}\Big), \qquad \Delta_x = |E_x| = \frac{x_0}{2^x}.$$

Démonstration. Pour $x = 0$: $T_0 = x_0(2-1) = x_0$ et $A_0 = x_0(2-2) = 0$. Si la formule vaut au rang x, alors

$$T_{x+1} = x_0\Big(2 - \frac{1}{2^x}\Big) + \frac{x_0}{2^{x+1}} = x_0\Big(2 - \frac{1}{2^{x+1}}\Big), \qquad A_{x+1} = T_x = x_0\Big(2 - \frac{2}{2^{x+1}}\Big).$$

L'énoncé est arithmétique ; il vaut donc pour tout x de $\mathcal{M}$ par le schéma de récurrence. Enfin $\Delta_x = T_x - A_x = x_0/2^x$, et $|E_x| = A_{x+1} - A_x = T_x - A_x$. □

Chaque pas d'Achille est égal à l'écart qu'il vient de combler, et la suite des A_x croît vers le point de rencontre $2x_0$ sans l'atteindre.

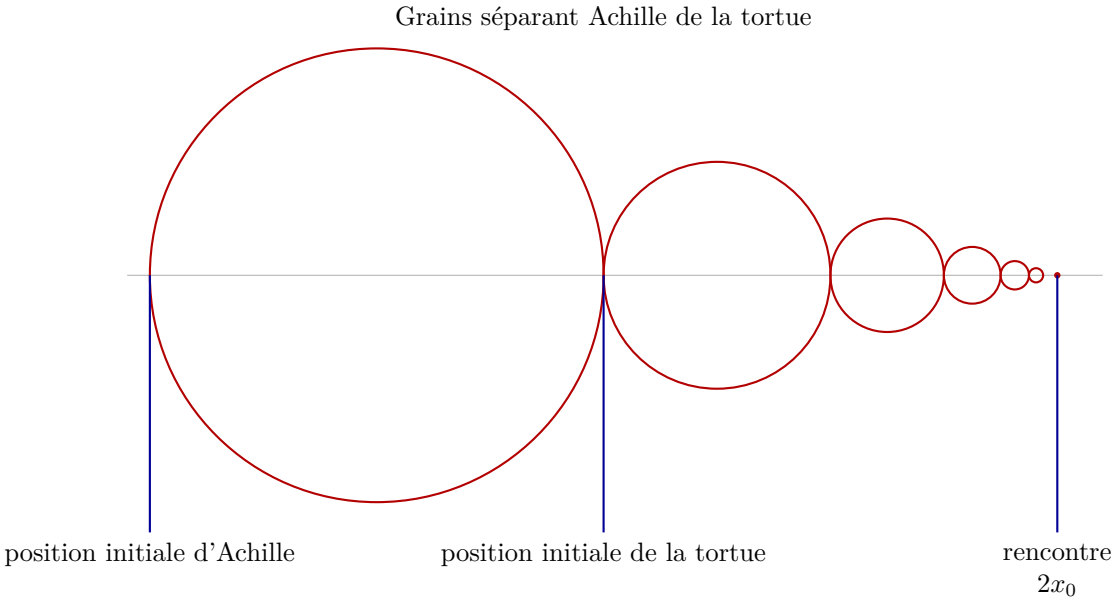


FIGURE 1 – Les étapes de la poursuite, avec $x_0 = 1$: l'étape E_x est le cercle de diamètre Δ_x. La figure est au niveau d'observation 0 ; son point de résolution, invisible à cette échelle, n'est pas dessiné.

3.2 Le paradoxe subsiste à tout rang

Proposition 3.3. *Pour tout entier x de $\mathcal{M}$, standard ou illimité, on a $\Delta_x > 0$: Achille n'atteint la tortue à aucun rang.*

Démonstration. $\Delta_x = x_0/2^x$, avec $x_0 > 0$ et $2^x > 0$. □

Le passage au modèle non standard ne lève donc pas le paradoxe au sens strict : l'égalité $A_x = T_x$ n'a lieu pour aucun x. Il faut, pour parler de rattrapage, dire à quel niveau d'observation l'écart cesse d'être discernable.

Proposition 3.4. *Si x est illimité, alors Δ_x est infinitésimal, et A_x et T_x appartiennent tous deux à la monade $\mu(2x_0)$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$ standard. Comme x_0 est standard et x illimité, on a $2^x > x > 2nx_0$, donc

$$0 < 2x_0 - T_x = \frac{x_0}{2^x} < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}, \qquad 0 < 2x_0 - A_x = \frac{2x_0}{2^x} < \frac{1}{n}.$$

Ainsi T_x et A_x sont dans $\mu(2x_0)$, et Δ_x, différence de deux éléments d'une même monade, est infinitésimal. □

Vu depuis la droite standard, à travers toutes les résolutions standard à la fois, Achille a donc rejoint la tortue à tout rang illimité. C'est la réponse classique, celle de la limite. Le niveau d'observation permet d'aller plus loin, en regardant *à l'intérieur* de la monade.

4 La course à un niveau d'observation

4.1 Le rang de rattrapage

Définition 4.1. On dit qu'Achille a *rattrapé la tortue au niveau d'observation k* au rang x si l'écart Δ_x y est ponctuel : $\#_k(\Delta_x) \leq 1$, soit $\Delta_x \leq \delta_k$.

On note ℓ le plus petit entier relatif tel que $2^\ell \geq x_0$, soit $\ell = \lceil \log_2 x_0 \rceil$. C'est un entier standard, qui ne dépend que de l'avance initiale.

Lemme 4.2. *Pour tout rang x et tout niveau k, $\#_k(E_x) = \#_k(\Delta_x) = x_0\, 2^{k\nu - x}$.*

Démonstration. $\Delta_x/\delta_k = x_0\, 2^{-x}\, 2^{k\nu}$. □

Théorème 4.3 (Rang de rattrapage)**.** *Soit $k \geq 1$. Le premier rang où Achille rattrape la tortue au niveau d'observation k est*

$$r_k = k\nu + \ell.$$

En particulier $r_{k+1} - r_k = \nu$: chaque cran d'observation ajoute exactement ν étapes à la poursuite.

Démonstration. Par le lemme 4.2, $\#_k(\Delta_x) \leq 1$ équivaut à $2^{x-k\nu} \geq x_0$, c'est-à-dire, par définition de ℓ, à $x - k\nu \geq \ell$. Le plus petit rang qui convient est $k\nu + \ell$, qui est positif puisque $k\nu$ est illimité et ℓ standard. □

Remarque 4.4 (Le niveau 0)*.* Au niveau 0, dont le point de résolution est l'unité, la même preuve donne le rang $\max(\ell, 0)$, qui est standard : à l'échelle macroscopique, Achille rattrape la tortue après un nombre fini d'étapes. Ce n'est pas encore la réponse classique, qui demande que l'écart soit ponctuel à *toute* résolution standard (proposition 3.4).

Exemple 4.5. Pour $x_0 = 1$, on a $\ell = 0$ et $r_k = k\nu$: au rang $k\nu$, l'écart vaut exactement un point de résolution du niveau k. Au continu de base ($k = 1$), Achille rattrape la tortue au rang ν ; au niveau 2, au rang 2ν, et au rang ν l'écart y contient encore 2^ν points de résolution.

4.2 Les trois régimes de la poursuite

Proposition 4.6. *Soit $k \geq 1$. Au niveau d'observation k, l'étape E_x est*

(i) à l'infini *si et seulement si $k\nu - x$ est illimité positif ;*

(ii) limitée et non ponctuelle *si et seulement si $x - k\nu$ est un entier standard strictement inférieur à ℓ ;*

(iii) ponctuelle *si et seulement si $x \geq r_k$.*

Démonstration. Posons $m = k\nu - x$, de sorte que $\#_k(E_x) = x_0\, 2^m$. Le point (iii) est le théorème 4.3. Si m est standard, $x_0 2^m$ est limité, et il dépasse 1 si et seulement si $-m < \ell$: c'est le point (ii). Si m est illimité positif, $x_0 2^m \geq x_0\, m$ est illimité : c'est le point (i). Si m est illimité négatif, $x_0 2^m$ est infinitésimal, donc l'étape est ponctuelle, et $x \geq r_k$. □

Rangs x	$\#_k(E_x)$	Statut au niveau k
$k\nu - x$ illimité positif (dont tous les rangs standard)	illimité	à l'infini
$x = k\nu + j$, j standard, $j < \ell$	$x_0\, 2^{-j}$, limité > 1	limitée
$x \geq k\nu + \ell$	≤ 1	ponctuelle

Au niveau k, la poursuite traverse donc trois régimes. Pendant une durée illimitée, chaque étape contient une infinité de points de résolution. Puis, au voisinage du rang $k\nu$, les étapes deviennent limitées : c'est seulement là qu'elles ont la taille de ce que l'on voit. Enfin, à partir du rang $k\nu + \ell$, elles sont ponctuelles : la course est achevée pour ce niveau d'observation.

5 Que le point de rencontre est un grain

Définition 5.1. La *zone de rencontre* au niveau k est le segment $Z_k = [A_{r_k},\, 2x_0]$, qui contient toutes les étapes ponctuelles à ce niveau.

Lemme 5.2. *Pour tout $k \geq 1$, $\#_k(Z_k) = x_0\, 2^{1-\ell}$, qui est compris entre 1 (exclu) et 2 (inclus). La zone de rencontre est limitée et non ponctuelle au niveau k : elle a la taille d'un ou deux points de résolution.*

Démonstration. Par le lemme 3.2, $2x_0 - A_{r_k} = 2x_0/2^{r_k}$, d'où $\#_k(Z_k) = 2x_0\, 2^{k\nu - r_k} = 2x_0\, 2^{-\ell}$. Par définition de ℓ, $2^{\ell-1} < x_0 \leq 2^\ell$, donc $\frac{1}{2} < x_0\, 2^{-\ell} \leq 1$. □

Théorème 5.3 (Le point de rencontre est un grain)**.** *Soit $k \geq 1$.*

(i) La zone de rencontre Z_k est contenue dans la monade $\mu(2x_0)$: vue depuis la droite standard, elle est le point absolu $2x_0$.

(ii) Elle est limitée au niveau k et à l'infini au niveau $k+1$, où elle compte $x_0\, 2^{\nu+1-\ell}$ points de résolution.

(iii) Elle contient exactement ν étapes ponctuelles au niveau k et non ponctuelles au niveau $k+1$: celles de rang $r_k \leq x < r_{k+1}$.

(iv) Le reste de la course, à partir du rang r_{k+1}, est la zone de rencontre Z_{k+1}, limitée au niveau $k+1$.

Démonstration. (i) Tout point de Z_k est à distance au plus $2x_0/2^{r_k}$ de $2x_0$, et r_k est illimité ; on conclut comme dans la proposition 3.4. (ii) découle du lemme 5.2 et de la proposition 2.5. (iii) Pour $x \geq r_k$, l'étape E_x est contenue dans Z_k, puisque A_x croît vers $2x_0$. Par le théorème 4.3 appliqué aux niveaux k et $k+1$, elle est ponctuelle au niveau k, et non ponctuelle au niveau $k+1$ si et seulement si $x < r_{k+1} = r_k + \nu$. Il y a ν tels rangs. (iv) est la définition de Z_{k+1} et le lemme 5.2 au niveau $k+1$. □

Remarque 5.4. Le théorème 5.3 est la version, pour la course, de l'énoncé « le point absolu est un grain » [9]. Ce que la droite standard voit comme le point de rencontre $2x_0$ est, à chaque niveau k, une zone de un ou deux points de résolution ; au niveau suivant, cette zone est à l'infini et la poursuite y continue pendant ν étapes. La division ne s'arrête à aucun niveau : aucune zone de rencontre n'est un point absolu, et c'est pourquoi aucun rang n'est celui du rattrapage absolu.

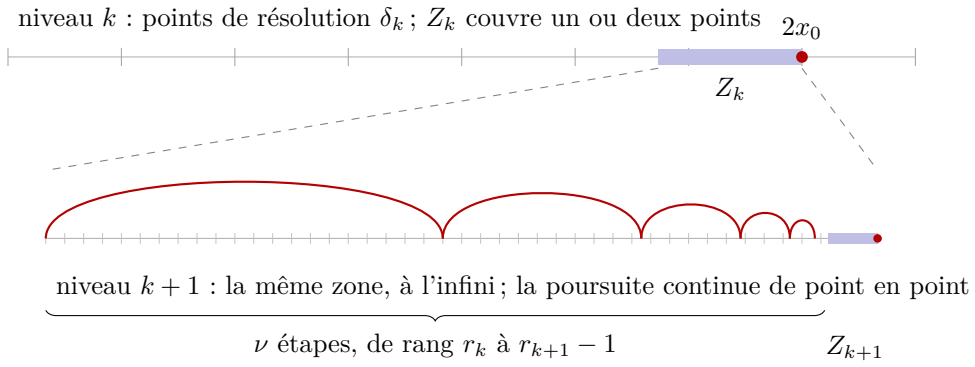


FIGURE 2 – La zone de rencontre au niveau k, puis la même zone au niveau $k+1$. Les rapports dessinés sont symboliques : chaque cran représente un facteur 2^ν.

6 Deux lectures : partie propre et partie partielle

6.1 L'auto-similarité de la course

Définition 6.1. On note h l'homothétie de centre le point de rencontre $2x_0$ et de rapport 2 : $h(y) = 2x_0 + 2(y - 2x_0)$.

Lemme 6.2. *Pour tout rang $x \geq 1$, $h(A_x) = A_{x-1}$ et $h(T_x) = T_{x-1}$. Par suite $h(E_x) = E_{x-1}$, et h^ν envoie l'étape E_x sur l'étape $E_{x-\nu}$ pour $x \geq \nu$, et la zone Z_{k+1} sur la zone Z_k.*

Démonstration. $h(A_x) = 2x_0 - 2 \cdot \frac{2x_0}{2^x} = 2x_0 - \frac{2x_0}{2^{x-1}} = A_{x-1}$, et de même $h(T_x) = 2x_0 - \frac{2x_0}{2^x} = T_{x-1}$. Comme h est croissante, elle envoie $[A_x, A_{x+1}]$ sur $[A_{x-1}, A_x]$. Enfin $r_{k+1} - \nu = r_k$, et h fixe $2x_0$. □

La course est donc auto-similaire : elle est sa propre image par l'homothétie de centre le point de rencontre, comme les cercles tangents de [7] sont images les uns des autres par une homothétie de centre le point de contact. La figure 1 est cette suite d'images.

6.2 Les deux lectures de la dilatation

Dilater la course par h^p, c'est passer de l'étape E_x à l'étape E_{x-p}. Comme dans [7], deux lectures sont possibles.

Définition 6.3 (Les deux lectures)**.** (A) *Le niveau d'observation suit l'objet.* On dilate tout, y compris le point de résolution. Chaque étape, vue à sa propre échelle, a le même nombre de points que la précédente : la course se répète identique à elle-même.

(B) *Le niveau d'observation reste fixe.* Le point de résolution garde son épaisseur δ_k. Les étapes successives contiennent de moins en moins de points, et deviennent ponctuelles au rang r_k.

Proposition 6.4 (Les deux lectures diffèrent d'un cran)**.** *Pour tout $k \geq 1$ et tout rang $x \geq \nu$,*

$$\#_{k+1}(E_x) = \#_k(E_{x-\nu}), \qquad \#_{k+1}(Z_{k+1}) = \#_k(Z_k).$$

La lecture (A) de la course, après une dilatation h^ν, au niveau $k+1$, coïncide avec la lecture (B) au niveau k.

Démonstration. Par le lemme 4.2, $\#_{k+1}(E_x) = x_0\, 2^{(k+1)\nu - x} = x_0\, 2^{k\nu - (x-\nu)} = \#_k(E_{x-\nu})$. La seconde égalité découle du lemme 5.2, qui ne dépend pas de k. □

6.3 Le regard de Zénon

Zénon adopte la lecture (A). Il suit chaque étape à sa propre échelle : le point de résolution rétrécit avec l'écart, et le niveau d'observation monte d'un cran toutes les ν étapes. Par la proposition 6.4, il voit alors à chaque niveau la même chose : une zone de rencontre d'un ou deux points, et, à l'intérieur, ν étapes de plus. Les étapes, renormalisées une à une, sont renumérotées par les entiers : elles forment une *partie propre*, qui a autant d'éléments que $\mathbb{N}$ et qui ne s'achève dans aucune fenêtre.

La course, elle, a lieu à un niveau d'observation donné : c'est la lecture (B). Les étapes y sont comptées parmi les points de résolution du segment $[0, 2x_0]$, et non plus comme des unités : elles forment une *partie partielle*, qui s'achève au rang r_k.

Regard	Niveau d'observation	La course
partie propre, lecture (A) (Zénon)	suit l'étape	ne s'achève pas
partie partielle, lecture (B), niveau 0	fixe, $\delta_0 = 1$	s'achève au rang $\max(\ell, 0)$
partie partielle, lecture (B), niveau 1	fixe, $\delta_1 = 2^{-\nu}$	s'achève au rang $\nu + \ell$
partie partielle, lecture (B), niveau k	fixe, $\delta_k = 2^{-k\nu}$	s'achève au rang $k\nu + \ell$

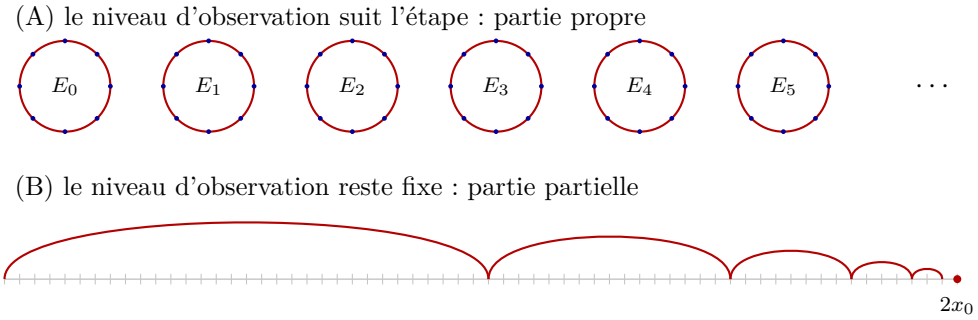


FIGURE 3 – En (A), chaque étape est vue avec le même nombre de points de résolution (en bleu) : elle se répète sans fin. En (B), les points de résolution ont une épaisseur fixe (traits gris), et les étapes deviennent ponctuelles.

6.4 Les étapes et la définition de l'infini

Rappelons la définition de [8] : une partie, considérée comme partie partielle, est infinie si l'ensemble de ses parties permet d'indexer les 2^ν grains du continu de base, c'est-à-dire si sa numérosité est au moins ν.

Proposition 6.5. *Au niveau d'observation* 1*, l'ensemble des étapes non ponctuelles a pour numérosité* $r_1 = \nu + \ell$*. Elle atteint le seuil* ν *si et seulement si* $2x_0 > 1$*, c'est-à-dire si la course est plus longue que le segment unité.*

Démonstration. Par la proposition 4.6, les étapes non ponctuelles au niveau 1 sont celles de rang $0 \leq x < \nu + \ell$. On a $\nu + \ell \geq \nu$ si et seulement si $\ell \geq 0$, c'est-à-dire $x_0 > \frac{1}{2}$ par définition de ℓ. □

Remarque 6.6. Cet énoncé est une lecture dans la théorie du grain, et il faut le prendre comme tel : les étapes non ponctuelles forment un segment initial $[0, \nu + \ell[$ de $\mathcal{M}$, et non la trace ${}^*F \cap [1, \nu]$ d'une partie standard F de $\mathbb{N}$. Il montre cependant une cohérence : la course est infinie au sens de [8] exactement lorsque ses étapes, comptées au continu de base, suffisent à indexer le continu qu'elle parcourt.

7 Bilan

1. L'écart entre Achille et la tortue au rang x vaut $x_0/2^x$; il ne s'annule à aucun rang, même illimité (proposition 3.3). Parler de rattrapage suppose un niveau d'observation.
2. Au niveau d'observation k, le rattrapage a lieu exactement au rang $k\nu + \ell$; chaque cran d'observation ajoute ν étapes (théorème 4.3). La poursuite y traverse trois régimes : étapes à l'infini, étapes limitées, étapes ponctuelles (proposition 4.6).
3. Le point de rencontre, point absolu de la droite standard, est un grain : la zone de rencontre, limitée au niveau k, est à l'infini au niveau $k+1$ et contient ν étapes (théorème 5.3).
4. La course est auto-similaire sous l'homothétie de centre le point de rencontre. Si le niveau d'observation suit l'étape (lecture A), les étapes forment une partie propre et la course ne s'achève pas : c'est le regard de Zénon. Si le niveau reste fixe (lecture B), elles forment une partie partielle et la course s'achève. Les deux lectures diffèrent exactement d'un changement de niveau d'observation (proposition 6.4).

Pour Aristote, les points de division n'existent qu'en puissance. Le niveau d'observation en donne une version quantitative : à un niveau donné, il n'y a qu'un nombre déterminé d'étapes discernables, à savoir $k\nu + \ell$, et ce nombre croît de ν à chaque cran, sans qu'aucun niveau ne les épuise. Le « jamais » de Zénon n'est pas faux ; il est la description de la course par un observateur dont le point de résolution rétrécit avec elle.

Références

[1] Aristote, *Physique*, livre VI, chap. 2 et 9 ; livre VIII, chap. 8.

[2] V. Benci, M. Di Nasso, *Numerosities of labelled sets : a new way of counting*, Advances in Mathematics 173 (2003), 50–67.

[3] H. Bergson, *Essai sur les données immédiates de la conscience*, Alcan, Paris, 1889, chap. II.

[4] A.-L. Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*, Paris, 1821.

[5] Diogène Laërce, *Vies et doctrines des philosophes illustres*, livre IX, 25–29.

[6] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.

[7] H. Genvrin, *Niveau d'observation. Point de résolution, suite adjacente de trois grains et droite à l'infini*, manuscrit, septembre 2026.

[8] H. Genvrin, *Partie propre et partie partielle chez les entiers. Fini, illimité, infini*, octobre 2026.

[9] H. Genvrin, *Que le point absolu est un grain*, octobre 2026.

[10] Grégoire de Saint-Vincent, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni*, Anvers, 1647.

[11] Platon, *Parménide*, 127a–128e.

[12] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1966.

[13] T. Skolem, *Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen*, Fundamenta Mathematicae 23 (1934), 150–161.

[14] J. F. Thomson, *Tasks and super-tasks*, Analysis 15 (1954), 1–13.