

Anomalie cartésienne et factorisation logarithmique

Digression sur la stratification fonctionnelle

Hugues Genvrin

28 mai 2026

Préambule

Cette note explore une observation géométrique élémentaire mais féconde sur la représentation cartésienne des fonctions. Elle conduit à un résultat conceptuel qui éclaire d'un angle nouveau le programme du grain : toute fonction induit, sur son axe codomaine, une *stratification fonctionnelle locale*. La métrique stratale du programme apparaît alors comme un cas particulier de ce phénomène, où la fonction considérée est le logarithme.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et le premier théorème vers la physique (*Métrique stratale*).

1 L'anomalie cartésienne

1.1 Le constat

Soit $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ une fonction dérivable et bijective, et soit $g = f^{-1} : [c, d] \rightarrow [a, b]$ sa réciproque. Considérons l'arc de courbe $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [a, b]\}$ dans un repère cartésien (O, x, y) .

Proposition 1 (Conservation algébrique de la longueur d'arc). *La longueur d'arc de Γ_f peut se calculer de deux façons équivalentes :*

$$\ell_f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx = \int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy.$$

Ces deux intégrales ont la même valeur : c'est la longueur géométrique de l'arc, indépendante de la paramétrisation.

Démonstration. Par le changement de variable $y = f(x)$, $dy = f'(x)dx$, et $g'(y) = 1/f'(x)$.
Donc :

$$\int_c^d \sqrt{1 + g'(y)^2} dy = \int_a^b \sqrt{1 + \frac{1}{f'(x)^2} \cdot f'(x)} dx = \int_a^b \sqrt{f'(x)^2 + 1} dx = \ell_f.$$

□

1.2 Le déplacement vers un nouveau repère

Considérons maintenant la fonction $g = f^{-1}$ tracée dans un *nouveau* repère cartésien (O', X, Y) , où l'on prend X comme variable indépendante et $Y = g(X)$ comme variable dépendante. Le graphe est $\Gamma_g = \{(X, g(X)) : X \in [c, d]\}$.

La longueur d'arc de Γ_g dans ce nouveau repère est :

$$\ell_g^{\text{nouveau}} = \int_c^d \sqrt{1 + g'(X)^2} dX.$$

Proposition 2 (L'anomalie). *En général,*

$$\ell_g^{\text{nouveau}} \neq \ell_f.$$

Les deux longueurs ne coïncident que dans des cas particuliers, par exemple lorsque f est une isométrie locale (rotation, translation, réflexion) ou linéaire de coefficient ± 1 .

Démonstration. Contre-exemple. Pour $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, on a $f'(x) = 2x$ et $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ sur $[0, 1]$, avec $(f^{-1})'(y) = 1/(2\sqrt{y})$.

Numériquement :

— $\ell_f = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx \approx 1,479$.

— $\ell_g^{\text{nouveau}} = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4y}} dy$, qui diverge en $y = 0$. La courbe $y = \sqrt{x}$ a une tangente verticale en 0, donc sa longueur d'arc dans le nouveau repère est différente (et même infinie sur certains intervalles).

Plus généralement, les deux intégrales ne coïncident que si l'on tient compte du facteur jacobien lors du changement de paramétrisation, ce qui revient à la proposition 1. Si l'on omet ce facteur (comme dans le calcul dans le nouveau repère), les longueurs diffèrent. \square

1.3 Diagnostic de l'anomalie

L'apparente contradiction se résout en comprenant ce qui distingue les deux situations :

- Dans la proposition 1, on calcule la longueur d'arc d'une même courbe géométrique avec deux paramétrisations différentes. Le changement de variable introduit naturellement le facteur jacobien $f'(x)$, qui compense la déformation.
- Dans la proposition 2, on transporte la fonction réciproque dans un nouveau repère cartésien *uniforme*, sans intégrer le facteur jacobien. La déformation locale induite par f n'est pas compensée, et les longueurs apparaissent différentes.

2 La stratification fonctionnelle

2.1 Le théorème central

Théorème 1 (Stratification fonctionnelle). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La représentation cartésienne $\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$ induit, sur l'axe Oy , une stratification non uniforme :*

- L'intervalle uniforme $[x, x+dx]$ sur l'axe Ox est envoyé par f sur l'intervalle $[f(x), f(x) + f'(x)dx]$ sur l'axe Oy .
- La longueur de cet intervalle image dépend de x via $|f'(x)|$.
- La fonction f agit donc comme un facteur de stratification local sur l'axe codomaine, dépendant de la position.

Réciproquement, la fonction inverse f^{-1} induit sur le codomaine original une stratification locale par le facteur $1/|f'(f^{-1}(y))|$.

Démonstration. Direct par dérivation. L'image différentielle de f envoie dx sur $f'(x)dx$, ce qui modifie la mesure locale par le facteur $|f'(x)|$. \square

2.2 Lecture conceptuelle

Remarque 1 (Le plan cartésien n'est pas neutre). *La représentation cartésienne d'une fonction n'est pas une présentation neutre du graphe : elle impose une métrique uniforme sur les deux axes, alors que la fonction induit naturellement une déformation locale de l'un par rapport à l'autre.*

Cette déformation est invisible quand on regarde le graphe (la courbe est tracée avec sa géométrie naturelle), mais elle apparaît dès qu'on mesure des longueurs, des aires, ou des volumes induits.

Le théorème 1 formalise cette observation : tracer une fonction, c'est stratifier l'axe codomaine.

2.3 Lien historique : Bolzano et le continu

Cette observation prolonge dans une certaine mesure les travaux de Bolzano sur l'image du continu par les fonctions. Bolzano s'intéressait aux paradoxes de cardinalité (un segment a « autant » de points qu'une droite entière). La stratification fonctionnelle est une extension naturelle de cette problématique : si la cardinalité est préservée, la *mesure locale* ne l'est généralement pas, et la fonction introduit une déformation continue de la métrique.

Cette extension rapproche la stratification fonctionnelle de la géométrie différentielle moderne, où les changements de coordonnées introduisent systématiquement des facteurs jacobiens qui modifient la métrique locale.

3 Application : la factorisation logarithmique

3.1 Énoncé du problème

On cherche à transporter un continu \mathcal{C} donné sous la factorisation

$$f_1 = \left(1, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{2n_\infty}} \right)$$

vers un continu \mathcal{C}' factorisé sous la forme

$$f' = \left(1, 2^{n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

Les deux continus ont la même longueur unitaire, mais \mathcal{C} a un cardinal plus élevé et une épaisseur de grain plus fine que \mathcal{C}' .

3.2 Étape 1 : refactorisation par homothétie

On refactorise f_1 sous la forme

$$f'_1 = \left(2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, \frac{1}{2^{n_\infty}} \right).$$

C'est équivalent à une *homothétie* de rapport 2^{n_∞} appliquée à la longueur totale du continu. Le cardinal est préservé, mais l'épaisseur passe de $1/2^{2n_\infty}$ à $1/2^{n_\infty}$ (homogène, dans $\tilde{\mathbb{R}}$ non-standard).

3.3 Étape 2 : contraction logarithmique

L'homothétie globale rapportée au cercle d'origine peut se lire comme une *dilatation exponentielle non homogène*. Pour ramener la longueur dans \mathbb{R} standard tout en préservant l'information de cardinalité, on applique une *contraction logarithmique*.

Proposition 3 (Factorisation logarithmique). *La factorisation logarithmique de f'_1 est :*

$$f''_1 = (n_\infty \ln 2, 2^{2n_\infty}, \epsilon_h),$$

où la longueur $n_\infty \ln 2$ vit dans $\tilde{\mathbb{N}}_1$ (mais est strictement inférieure à n_∞ par le théorème de comparaison fondamental, donc réduite par rapport à l'invariant exponentiel initial 2^{n_∞}), et où ϵ_h désigne une stratification non uniforme des grains.

Remarque 2 (Pourquoi ϵ_h est non uniforme). *La contraction logarithmique applique localement le facteur dérivé du logarithme, $1/x$, sur chaque position. Comme ce facteur dépend de la position, les grains sont contractés différemment selon leur place sur le continu : c'est la stratification non uniforme du Théorème 1 appliquée à la fonction $f = \log_2$.*

3.4 Étape 3 : ajustement des domaines

Pour finaliser le transport de \mathcal{C} sur \mathcal{C}' , il faut ajuster les domaines :

- Le domaine du continu de référence \mathcal{C}' est $[0, 1[$.
- Par la transformation logarithmique, l'image de $[0, 1[$ est $] - \infty, 0]$ — mais ramené stratiquement, cela donne $] - n_\infty \ln 2, 0]$ (en bornes exprimées par les images logarithmiques).

Le continu \mathcal{C} est donc représenté dans \mathcal{C}' sous une *échelle logarithmique*, ce qui équivaut à définir une *métrique logarithmique* sur le continu.

4 Synthèse

- L'*anomalie cartésienne* (Section 1) : tracer une fonction dans le plan cartésien et sa réciproque dans un nouveau repère ne préserve pas, en général, la longueur d'arc. Cette anomalie traduit une déformation locale induite par la fonction.
- La *stratification fonctionnelle* (Section 2, Théorème 1) : toute fonction f dérivable stratifie localement l'axe codomaine par le facteur $|f'(x)|$. Tracer une fonction, c'est stratifier l'axe vertical.
- La *factorisation logarithmique* (Section 3) : appliquée à $f = \log_2$, la stratification fonctionnelle produit la métrique stratale du programme du grain. Le logarithme est donc le cas particulier de la stratification fonctionnelle qui donne lieu à la métrique stratale étudiée dans le programme.

Lecture conceptuelle

Cette digression éclaire le programme du grain par un angle nouveau. La métrique stratale logarithmique, qu'on avait construite par voie géométrique (homothétie + contraction logarithmique) ou par voie arithmétique (intégration du facteur correctif $1/x$), apparaît ici comme un cas particulier d'un phénomène plus général : toute fonction induit une stratification locale de son axe codomaine.

Le programme du grain, en privilégiant la fonction logarithme, sélectionne une stratification *globalement définie et structurellement riche* (linéarisation de la stratification multiplicative, réduction de magnitude des invariants, propriétés arithmétiques particulières). Mais d'autres fonctions induiraient d'autres stratifications, et il pourrait exister des programmes analogues fondés sur d'autres choix.

Cette ouverture suggère que le programme du grain pourrait s'inscrire dans une *famille de programmes stratals fonctionnels*, chacun associé à une fonction privilégiée, et qu'il serait fructueux d'étudier les propriétés relatives de ces différentes constructions.

Cette généralisation reste exploratoire et dépasse le cadre de la présente note.