Les crues du Nil et l'impôt

Deux problèmes de partage où la partie partielle se paie en sacs de grain

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On construit deux problèmes de taxation agricole, inspirés de l'Égypte ancienne, dans lesquels les racines complexes d'un trinôme reçoivent une interprétation directe. Deux paysans rebornent chaque année, au cordeau, le champ de blé qu'ils cultivent ensemble ; l'impôt est fixé en sacs de grain, et le rendement du champ dépend de la crue du Nil. Le cordeau donne la somme des côtés, l'impôt et le rendement donnent la surface nécessaire, c'est-à-dire le produit. Lorsque la surface nécessaire dépasse ce que le cordeau peut enclore, les côtés demandés sont complexes. On montre que leur partie propre donne le cordeau que chacun tend, dans l'unité fine, et que leur partie partielle donne le nombre de sacs à régler, dans l'unité grossière : le sac de grain est un grain grossier de surface, dont la taille est fixée par le rendement. Dans le premier problème, une crue faible fait baisser le rendement, et la partie partielle est une remise d'impôt : c'est la plus petite remise qui permette à la terre de payer. On la compare à la réduction proportionnelle que rapporte Hérodote, qui est une règle de trois : les deux remises diffèrent exactement du surplus d'une année normale, et ne coïncident que si l'impôt absorbe toute la récolte normale. Dans le second, une crue forte fait relever l'impôt, et la partie partielle est un paiement tiré des greniers. La conjugaison des racines indique, dans les deux cas, que la partie partielle se partage par moitié. On précise enfin le sens des termes : le rendement n'est pas une fonction croissante de la crue, la marge compare la récolte à l'impôt, et un impôt exactement indexé sur le rendement donne une racine double quelle que soit la crue ; les racines complexes mesurent l'écart de la règle fiscale à cette indexation. On compare enfin les petits et les gros producteurs : avec un impôt fixe par lot, la remise minimale protège les lots en déficit chaque année, et la règle de trois favorise ceux qui ont un surplus.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels **2**
2.1 Le trinôme par les moyennes 2
2.2 Le partage à deux unités 3

3 Le contexte historique **3**

4 Le cadre commun **3**

5 Problème 1 : la crue faible et la remise d'impôt **4**
5.1 Deux remises : la remise minimale et la règle de trois 5

6 Problème 2 : la crue forte et le paiement sur les réserves **6**

7 Comparaison des deux problèmes **7**

8 La crue comme paramètre **7**

9 Crue, rendement et impôt : le sens des termes **8**
9.1 Le rendement n'est pas une fonction croissante de la crue 9
9.2 Ce que compare la marge 9
9.3 L'impôt indexé 9
9.4 Le sens des termes 10

10 Petits et gros producteurs **11**
10.1 Un impôt proportionnel à la taille 11
10.2 Un impôt fixe par lot 11
10.3 L'effet du sac entier 12
10.4 Bilan de la comparaison 12

11 Lecture dans la théorie du grain **13**

12 Bilan **13**

1 Introduction

Dans un précédent travail [1], on a construit un problème de partage, le vivier de deux pêcheurs, dans lequel la partie propre des racines d'un trinôme se répartit dans une unité fine et divisible, tandis que leur partie partielle se règle en unités grossières, individuées. On a dégagé trois conditions pour que cette lecture s'applique : une ressource fine qui entre dans la somme, un objectif qui est un produit, et une ressource grossière mesurée dans le carré de l'unité fine.

On en donne ici une seconde illustration, agricole et fiscale. La ressource fine est le cordeau de l'arpenteur ; l'objectif est la surface de blé nécessaire pour payer l'impôt ; la ressource grossière est le sac de grain, dont la valeur en surface dépend du rendement, donc de la crue. Deux problèmes, une crue faible et une crue forte, montrent que la même structure peut représenter une remise ou un paiement.

Statut. Les énoncés sont construits : ils s'inspirent de pratiques attestées, rappelées à la section 3, mais ne reproduisent aucun document ancien, et les nombres sont choisis pour la clarté. Les propositions sont de l'algèbre élémentaire et sont démontrées. La section 11 relève de l'interprétation.

2 Rappels

2.1 Le trinôme par les moyennes

Pour un trinôme réel $x^2 - \Sigma x + \Pi$, on note $\mu_a = \Sigma/2$ la moyenne arithmétique des racines, $\mu_g^2 = \Pi$ le carré de leur moyenne géométrique, et $D = \mu_a^2 - \mu_g^2$ la *marge*. Avec $X = x - \mu_a$, le trinôme s'écrit $X^2 - D$:

— si $D > 0$, les racines sont réelles, $\mu_a \pm \delta$ avec $\delta^2 = D$: le grain des racines est *couché* ;

— si $D = 0$, la racine est double, μ_a : le grain est *ponctuel* ;

— si $D < 0$, les racines sont complexes, $\mu_a \pm i\beta$ avec $\beta^2 = -D$: le grain est *debout*.

La *partie propre* des racines est μ_a ; dans le cas complexe, leur *partie partielle* est β.

Proposition 1 (Produit maximal et décomposition)**.** *Pour deux réels u, v de somme Σ, on a $uv = \mu_a^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leq \mu_a^2$, avec égalité si et seulement si $u = v = \mu_a$. Si les racines sont complexes,*

$$\Pi = (\mu_a + i\beta)(\mu_a - i\beta) = \mu_a^2 + \beta^2,$$

alors que leur somme $2\mu_a$ ne contient pas β.

Démonstration. $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = uv$. Ensuite $(\mu_a + i\beta)(\mu_a - i\beta) = \mu_a^2 - i^2\beta^2$. □

Parmi les rectangles de demi-périmètre Σ, le carré de côté μ_a a la plus grande aire, μ_a^2. Une surface demandée $\Pi > \mu_a^2$ se décompose en la surface du carré, μ_a^2, et un déficit, β^2.

2.2 Le partage à deux unités

Principe 2 (Lecture à deux unités [2, 1])**.** La partie propre se répartit dans l'unité fine ; la partie partielle se compte en unités grossières.

Proposition 3 (Partage à deux unités [1])**.** *Soit une ressource fine dont le total Σ se répartit en deux apports $x' + x'' = \Sigma$, un objectif de produit $\Pi > \mu_a^2$, et une ressource grossière faite d'unités qui valent chacune c dans l'unité du produit. Alors la répartition équitable de la ressource fine est $x' = x'' = \mu_a$, qui réalise μ_a^2 ; le déficit $\beta^2 = \Pi - \mu_a^2$ est comblé par $K = \lceil \beta^2/c \rceil$ unités grossières, avec un excédent $Kc - \beta^2 < c$; et le partage équitable de ces unités en donne $\lfloor K/2 \rfloor$ à chacun, plus une unité commune si K est impair.*

Démonstration. La première affirmation est la proposition 1. K est le plus petit entier tel que $Kc \geq \beta^2$, d'où $0 \leq Kc - \beta^2 < c$. Le reste est la division euclidienne de K par 2. □

3 Le contexte historique

Trois éléments de l'Égypte ancienne inspirent les énoncés.

— *L'arpentage au cordeau.* Les champs étaient mesurés à l'aide de cordes ; une tradition grecque, rapportée par un fragment de Démocrite que cite Clément d'Alexandrie, appelle les arpenteurs égyptiens *harpédonaptes*, « tendeurs de cordeau ».

— *Le remesurage après la crue.* Hérodote attribue au roi Sésostris un partage des terres en lots carrés égaux, soumis à un impôt annuel. Lorsque le fleuve emportait une partie d'un lot, le détenteur le déclarait au roi, qui envoyait des hommes examiner et mesurer la diminution, afin que le lot ne paie plus que la part de l'impôt correspondant à ce qui restait ; Hérodote y voit l'origine de la géométrie [3]. Le récit, écrit au V^e^ siècle avant notre ère et attribué à un roi en partie légendaire, ne mentionne ni scribe, ni rendement, ni crue faible : la cause du déficit y est une perte de surface.

— *La crue et la récolte.* La hauteur de la crue, relevée sur des nilomètres, permettait d'anticiper la récolte ; Strabon décrit celui d'Éléphantine et son utilité pour les cultivateurs comme pour l'administration [5].

On en retient un schéma simplifié : le champ est reborné chaque année au cordeau ; l'impôt est dû en sacs de grain ; le rendement du champ dépend de la crue.

4 Le cadre commun

Deux paysans, A et B, cultivent ensemble un champ de blé rectangulaire, qu'ils reborнent après chaque crue avec un cordeau de 200 m. Le paysan A tend les deux côtés de longueur x', le paysan B les deux côtés de longueur x'' :

$$x' + x'' = \Sigma = 100 \text{ m}, \qquad \mu_a = 50 \text{ m}, \qquad \mu_a^2 = 2500 \text{ m}^2.$$

Le champ doit un impôt de T sacs. L'année considérée, le rendement est d'un sac pour c m^2.

Lemme 4 (Le sac, grain grossier de surface)**.** *Avec un rendement d'un sac pour c m^2, payer T sacs avec la récolte demande une surface*

$$\Pi = T\,c \text{ m}^2,$$

et un sac équivaut à une surface de c m^2. Les côtés du champ nécessaire sont les racines de $X^2 - 100X + Tc$.

Démonstration. Une surface S produit S/c sacs ; $S/c = T$ équivaut à $S = Tc$. Les côtés x', x'' ont pour somme 100 et pour produit Tc. □

Le lemme montre que la troisième condition de la lecture à deux unités est remplie : la ressource grossière, le sac, est mesurée dans l'unité du produit, le m^2, carré de l'unité fine, le mètre de cordeau. Sa taille c n'est pas fixée une fois pour toutes : elle dépend du rendement, donc de la crue.

Remarque (Pourquoi le cordeau et non la surface). On pourrait vouloir prendre pour unité fine la surface elle-même, en répartissant un total de m^2 entre deux champs. Le produit serait alors en m^4, et il faudrait une ressource grossière mesurée en m^4, ce qui n'a pas de sens. C'est la longueur qui entre dans la somme, et la surface qui forme le produit.

5 Problème 1 : la crue faible et la remise d'impôt

Problème 5. L'impôt est de $T = 23$ sacs, inscrit au cadastre. En année normale, le rendement est d'un sac pour 100 m^2 : le carré de 2500 m^2 récolte alors 25 sacs, et laisse aux paysans un surplus de 2 sacs. Cette année, la crue est faible, et le rendement tombe à un sac pour $c = 125$ m^2. Comment les deux paysans doivent-ils borner leur champ, et que doit faire le scribe ?

La lecture classique. Il faudrait $\Pi = 23 \times 125 = 2875$ m^2. Les côtés sont les racines de

$$X^2 - 100X + 2875 = 0, \qquad D = -375, \qquad X = 50 \pm i\sqrt{375} \approx 50 \pm 19{,}36\,i.$$

Aucun champ réel ne convient : le cordeau ne peut pas enclore plus de 2500 m^2.

La lecture à deux unités.

— *Partie propre, dans l'unité fine.* Chacun tend deux côtés de 50 m : le champ est le carré de 2500 m^2, qui produit $2500/125 = 20$ sacs.

— *Partie partielle, en unités grossières.* Le déficit est $\beta^2 = 375$ m^2, soit $375/125 = 3$ sacs. Le scribe constate que la terre ne peut pas produire l'impôt et accorde une remise de 3 sacs.

Proposition 6 (Solution du problème 1)**.** *Les paysans bornent le carré de côté 50 m, chacun tendant 100 m de cordeau. La récolte paie 20 sacs ; la remise est de 3 sacs, dont 1 est imputé à A, 1 à B, et 1 en commun. L'impôt est exactement couvert : $20 + 3 = 23$.*

Démonstration. Proposition 3 avec $\Sigma = 100$, $\Pi = 2875$ et $c = 125$: $K = \lceil 375/125 \rceil = 3$, l'excédent est nul, et $\lfloor 3/2 \rfloor = 1$ avec un reste de 1. □

La part de l'impôt que paie la terre est $\mu_a^2/\Pi = 2500/2875 = 20/23$, c'est-à-dire 20 sacs sur 23 ; elle est égale à $\cos^2\varphi$, où φ est l'argument des racines $50 \pm i\beta$. En effet, le module des racines est la moyenne géométrique, $|50 \pm i\beta|^2 = 50^2 + 375 = \Pi = \mu_g^2$, d'où

$$\cos\varphi = \frac{\mu_a}{\mu_g} = \frac{50}{\sqrt{2875}} \approx 0{,}933, \qquad \cos^2\varphi = \frac{\mu_a^2}{\Pi} = \frac{20}{23}, \qquad \sin^2\varphi = \frac{\beta^2}{\Pi} = \frac{3}{23}.$$

La moyenne quadratique n'intervient pas ici : pour des racines complexes, $\mu_q^2 = \frac{x'^2+x''^2}{2} = \mu_a^2 - \beta^2$ est la partie réelle de x'^2, et non le carré du module.

5.1 Deux remises : la remise minimale et la règle de trois

La remise lue sur le trinôme n'est pas la seule possible. On la compare ici à la remise que donnerait une règle de trois sur les rendements, qui est aussi la règle que rapporte Hérodote.

Définition 7 (Les deux remises)**.** Soit $c_0 = 100$ m^2 par sac le rendement normal, sur lequel l'impôt T a été fixé, et c le rendement de l'année.

— La *remise minimale* est $R_{\min} = T - \mu_a^2/c$: la plus petite remise qui permette au carré de payer l'impôt avec sa récolte. C'est la partie partielle comptée en sacs, β^2/c.

— La *remise proportionnelle* est $R_{\mathrm{p}} = T\big(1 - c_0/c\big)$: l'impôt est réduit dans la proportion où la récolte a baissé, de sorte qu'il reste la même fraction de la récolte qu'en année normale.

La remise proportionnelle est la règle d'Hérodote transposée : Hérodote réduit l'impôt dans la proportion de la terre restante, c'est-à-dire de la capacité productive restante ; ici, c'est le rendement qui diminue, et la capacité productive avec lui.

Proposition 8 (Les deux remises diffèrent du surplus normal)**.** *Notons $D_0 = \mu_a^2 - Tc_0$ la marge d'une année normale. Alors*

$$R_{\mathrm{p}} - R_{\min} = \frac{D_0}{c}.$$

Les deux remises coïncident si et seulement si $D_0 = 0$, c'est-à-dire si l'impôt est exactement égal à la récolte normale du carré. Si l'impôt laisse un surplus en année normale ($D_0 > 0$), la remise proportionnelle est plus grande que la remise minimale.

Démonstration. $R_{\mathrm{p}} - R_{\min} = T - \frac{Tc_0}{c} - T + \frac{\mu_a^2}{c} = \frac{\mu_a^2 - Tc_0}{c}$. □

Avec les nombres du problème, $D_0 = 2500 - 2300 = 200$ m^2 : en année normale, la terre produit 2 sacs de plus que l'impôt. La remise proportionnelle vaut $23 \times 0{,}2 = 4{,}6$ sacs, la remise minimale 3 sacs, et leur différence $200/125 = 1{,}6$ sac est ce surplus, mesuré au rendement de l'année.

Ce que fait chaque règle.

— *La remise minimale* rend l'impôt tout juste payable : après la remise, l'impôt vaut 20 sacs, toute la récolte. Le trésor ne prend rien de plus que ce que la terre peut donner, mais il prend tout ; les paysans perdent leur surplus. Le trinôme devient alors à racine double : $D = 0$.

— *La remise proportionnelle* partage la mauvaise année entre le trésor et les paysans : après la remise, l'impôt vaut 18,4 sacs, soit 92 % de la récolte, comme en année normale (23 sur 25), et les paysans gardent 1,6 sac. Le trinôme garde la marge de l'année normale, $D = D_0 = 200 > 0$: ses racines sont réelles, $50 \pm \sqrt{200} \approx 50 \pm 14{,}1$, et le grain reste couché.

Aucune des deux règles n'est « plus juste » en soi : elles répondent à deux questions différentes. La remise minimale répond à la question « que manque-t-il pour que la terre puisse payer ? », et c'est elle que mesure la partie partielle des racines. La remise proportionnelle répond à la question « comment partager la perte de l'année ? » ; elle maintient le taux de l'impôt et protège le surplus des paysans. Du point de vue des paysans, la remise proportionnelle est la plus favorable dès que l'impôt laisse un surplus en année normale. Les deux ne coïncident

que dans le cas particulier où l'impôt épuise la récolte normale, cas que les nombres de ce problème évitent à dessein, car il ferait croire que la partie partielle est une règle de trois.

Le récit d'Hérodote, enfin, ne dit rien du partage entre deux détenteurs, ni de l'indivisibilité du sac, ni du sac commun. Ce que le calcul ajoute, c'est la mesure du manque, la décomposition du déficit en deux parties partielles conjuguées, une par paysan, et le règlement en unités entières. Les lots d'Hérodote sont carrés : c'est précisément la forme que donne la partie propre, le carré de côté μ_a.

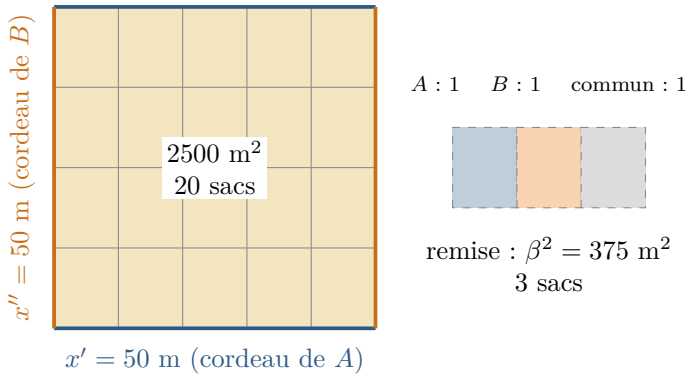


FIGURE 1 – Schéma : la crue faible. Le carré de 50 m de côté est fait de 20 parcelles de 125 m², qui produisent chacune un sac. Les 3 sacs manquants correspondent à 3 parcelles qui n'existent pas (en pointillés) : c'est la remise, partagée par moitié, avec un sac commun.

6 Problème 2 : la crue forte et le paiement sur les réserves

Problème 9. La crue est forte, sans être excessive : le rendement monte à un sac pour $c = 80$ m², et le trésor relève l'impôt à $T = 40$ sacs. Comment répartir la charge ?

La lecture classique. Il faudrait $\Pi = 40 \times 80 = 3200$ m², et

$$X^2 - 100X + 3200 = 0, \qquad D = 2500 - 3200 = -700, \qquad X = 50 \pm i\sqrt{700} \approx 50 \pm 26{,}46\, i.$$

La lecture à deux unités.

— *Partie propre, dans l'unité fine.* Le carré de 2500 m² produit $2500/80 = 31{,}25$ sacs. Cette quantité n'est pas entière, mais la récolte se mesure finement, au boisseau : la partie propre se raffine.

— *Partie partielle, en unités grossières.* Le déficit est $\beta^2 = 700$ m², soit $700/80 = 8{,}75$ sacs. Les sacs des greniers ne se divisent pas : les paysans en prélèvent $K = \lceil 8{,}75 \rceil = 9$ sur leurs réserves.

Proposition 10 (Solution du problème 2)**.** *Les paysans bornent le carré de côté* 50 *m. La récolte paie* 31,25 *sacs ; les réserves fournissent* 9 *sacs, dont* 4 *par A,* 4 *par B et* 1 *en commun. Le total,* 40,25 *sacs, couvre l'impôt avec un excédent d'un quart de sac, inférieur à une unité grossière.*

Démonstration. Proposition 3 avec $\Pi = 3200$ et $c = 80$: $K = \lceil 700/80 \rceil = 9$, l'excédent vaut $9 \times 80 - 700 = 20$ m², soit un quart de sac, et $\lfloor 9/2 \rfloor = 4$ avec un reste de 1. □

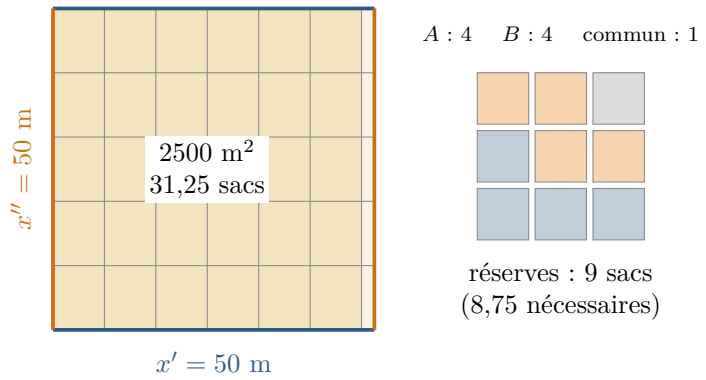


FIGURE 2 – Schéma : la crue forte. Le carré se découpe en parcelles de 80 m^2 ; la dernière colonne, de 2 m, ne donne qu'un quart de sac par parcelle : la partie propre se raffine. Le déficit de 8,75 sacs se règle en 9 sacs entiers tirés des greniers, partagés par moitié avec un sac commun.

7 Comparaison des deux problèmes

	Crue faible	Crue forte
Rendement : un sac pour	125 m^2	80 m^2
Impôt T	23 sacs	40 sacs
Surface nécessaire $\Pi = Tc$	2875 m^2	3200 m^2
Racines	$50 \pm i\sqrt{375}$	$50 \pm i\sqrt{700}$
Récolte du carré, μ_a^2/c	20 sacs	31,25 sacs
Déficit β^2/c	3 sacs	8,75 sacs
Sacs entiers K	3	9
Par paysan, plus commun	$1+1+1$	$4+4+1$
Sens de l'échange	remise du trésor	paiement des greniers
Part payée par la terre, $\cos^2\varphi$	$20/23 \approx 87\,\%$	$78{,}125\,\%$

Trois observations se dégagent.

(i) *La structure est la même, le sens de l'échange s'inverse.* Dans la crue faible, la partie partielle est ce que le trésor renonce à percevoir ; dans la crue forte, ce que les paysans doivent ajouter. Le trinôme ne distingue pas ces deux lectures : il chiffre le déficit, et c'est l'institution qui décide qui le porte.

(ii) *L'unité grossière dépend de la crue.* Le même sac vaut 125 m^2 dans un cas et 80 m^2 dans l'autre. La partie partielle exprimée en m^2, β^2, et la même exprimée en sacs, β^2/c, ne varient pas de la même façon.

(iii) *L'indivisibilité laisse une trace.* Dans la crue faible, le déficit tombe juste (3 sacs) ; dans la crue forte, il faut un quart de sac de trop. Dans les deux cas, le nombre impair de sacs laisse un sac commun.

8 La crue comme paramètre

Fixons l'impôt à $T = 23$ sacs, comme dans le problème 5, et faisons varier le rendement c. La récolte du carré est $2500/c$ sacs, et le trinôme est $X^2 - 100X + 23c$, de marge $D = 2500 - 23c$.

Elle s'annule pour le rendement d'équilibre $c^* = 2500/23 \approx 108{,}7$ m^2 par sac.

Proposition 11 (Trois régimes)**.** *(i) Si $c < c^*$, $D > 0$: les racines sont réelles, le grain est couché, et le carré produit un surplus de $\delta^2/c = 2500/c - 23$ sacs, qui se mesure dans l'unité fine. C'est le cas de la crue normale ($c = 100$, surplus de 2 sacs) et de la bonne crue ($c = 80$, surplus de 8,25 sacs).*

(ii) Si $c = c^*$, $D = 0$: la racine est double, le carré paie l'impôt exactement.

(iii) Si $c > c^*$, $D < 0$: les racines sont complexes, le grain est debout, et le déficit $\beta^2/c = 23 - 2500/c$ sacs se règle en sacs entiers. C'est le cas de la crue faible ($c = 125$, déficit de 3 sacs).

Démonstration. $D = 2500 - 23c$ a le signe de $c^* - c$. Dans le cas (i), $\delta^2 = D$ et $\delta^2/c = 2500/c - 23$; dans le cas (iii), $\beta^2 = -D$ et $\beta^2/c = 23 - 2500/c$. □

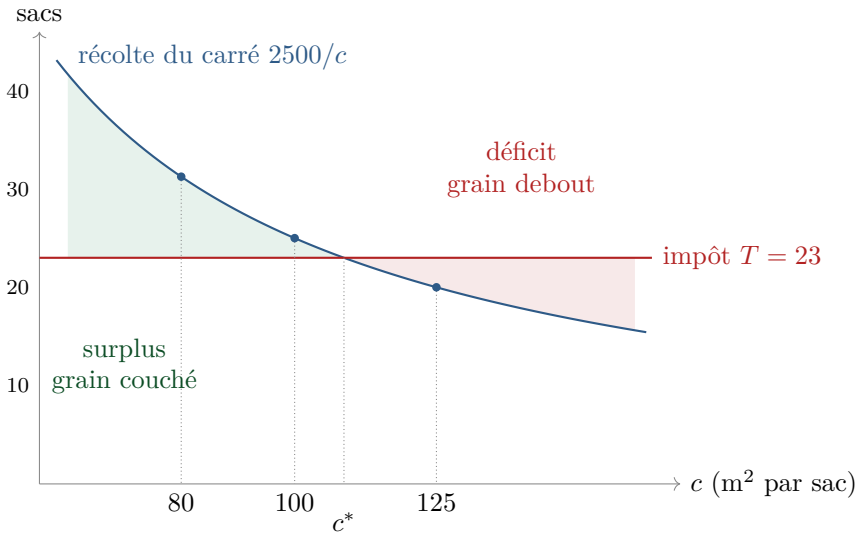


FIGURE 3 – Schéma : la récolte du carré en fonction du rendement, pour un impôt de 23 sacs. À gauche de $c^* \approx 108{,}7$, la récolte dépasse l'impôt (racines réelles), y compris en année normale ($c = 100$) ; à droite, elle ne le couvre pas (racines complexes), et l'écart vertical est la partie partielle comptée en sacs.

Le passage du grain couché au grain debout est le moment où la terre seule ne suffit plus à payer l'impôt. Le surplus d'une bonne crue est une quantité réelle de grain, que l'on peut mesurer finement ; le déficit d'une crue faible est une créance ou une remise, qui se règle par sacs entiers. Le rendement d'équilibre c^* est la racine double : le grain ponctuel, où le champ carré paie l'impôt sans reste. Il ne coïncide pas avec le rendement normal, $c = 100$: l'impôt de 23 sacs laisse un surplus en année normale, et c'est seulement au-delà de c^* que la crue devient trop faible pour lui.

9 Crue, rendement et impôt : le sens des termes

Les deux problèmes pourraient laisser croire que le trinôme compare la crue à quelque chose. Il n'en est rien : il compare la récolte à l'impôt. Cette section sépare les trois grandeurs en jeu, la crue, le rendement et l'impôt, et fixe le sens de chaque terme.

9.1 Le rendement n'est pas une fonction croissante de la crue

La crue apporte l'eau et le limon : sans elle, il n'y a pas de récolte. Mais elle doit être ni trop faible ni trop forte. Une crue insuffisante n'irrigue pas les bassins, et c'est la disette ; une crue excessive emporte les digues et les villages, et les eaux, qui se retirent tard, retardent les semailles. Pline l'Ancien rapporte une échelle en coudées qui exprime cette idée : douze coudées annoncent la famine, seize l'abondance [4].

On représente donc le rendement $\rho(h)$, en sacs par m^2, comme une fonction de la hauteur h de la crue qui croît jusqu'à une crue optimale h^*, puis décroît (figure 4). Le nombre de m^2 par sac est l'inverse, $c(h) = 1/\rho(h)$. La forme exacte de la courbe n'importe pas ici ; seule compte sa forme en cloche.

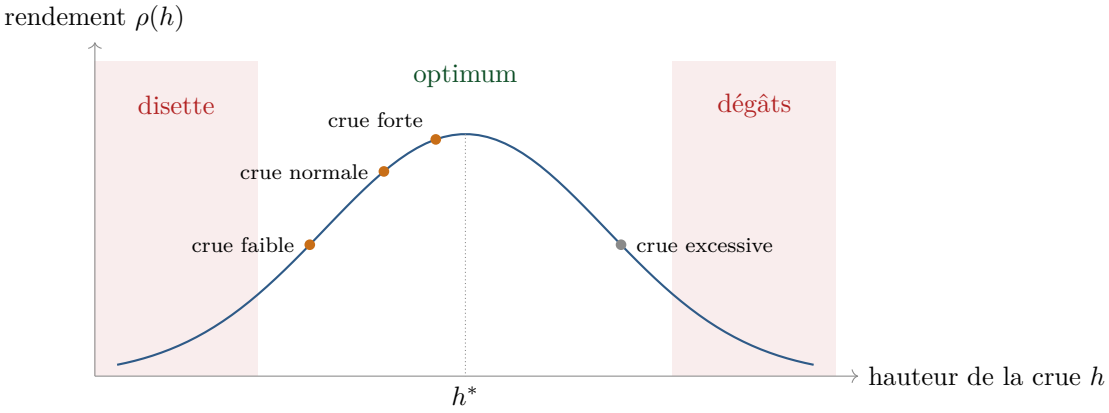


FIGURE 4 – Schéma : le rendement en fonction de la hauteur de la crue, en cloche. Les trois crues des problèmes sont placées sur la partie montante ; une crue excessive, sur la partie descendante, fait baisser le rendement comme une crue faible. La courbe est qualitative.

Une crue « forte » ne favorise donc la production que tant qu'elle reste en deçà de l'optimum. Dans le problème 9, on a supposé que c'était le cas : la crue est forte, mais non excessive.

9.2 Ce que compare la marge

Proposition 12 (La marge compare la récolte et l'impôt)**.** *Avec un cordeau de demi-longueur Σ, un impôt de T sacs et un rendement d'un sac pour c m^2, la marge du trinôme $X^2 - \Sigma X + Tc$ s'écrit*

$$D = \mu_a^2 - Tc = c\left(\frac{\mu_a^2}{c} - T\right) = c \times (\textit{récolte du carré} - \textit{impôt}).$$

Elle a le signe de la différence entre ce que le carré récolte et ce que l'impôt demande.

Démonstration. La récolte du carré de côté μ_a est μ_a^2/c sacs (lemme 4), et $c > 0$. □

La crue n'intervient dans la marge qu'à travers c, et seulement si l'impôt ne suit pas le rendement. C'est ce que précise l'indexation.

9.3 L'impôt indexé

Définition 13 (Impôt indexé)**.** L'impôt est *indexé sur le rendement* s'il est proportionnel au rendement de l'année, $T = \tau\,\rho = \tau/c$, où τ est une surface d'assiette fixée, en m^2.

Proposition 14 (L'indexation fait disparaître la crue)**.** *Si l'impôt est indexé, la surface nécessaire est $\Pi = Tc = \tau$, quelle que soit la crue, et la marge vaut $D = \mu_a^2 - \tau$. En particulier, si l'assiette est la capacité du cordeau, $\tau = \mu_a^2$, la racine est double pour toute crue : le carré paie l'impôt exactement.*

Démonstration. $Tc = (\tau/c)\,c = \tau$, puis $D = \mu_a^2 - \tau$. Pour $\tau = \mu_a^2$, $D = 0$. □

L'impôt de 23 sacs correspond, en année normale, à une assiette $\tau = 2300$ m^2. Indexé sur cette assiette, il vaudrait $2300/125 = 18{,}4$ sacs dans la crue faible et $2300/80 = 28{,}75$ sacs dans la crue forte ; la marge serait alors $2500 - 2300 = 200 > 0$ chaque année, et le carré paierait l'impôt avec un surplus. Avec l'assiette $\tau = 2500$ m^2, capacité du cordeau, l'impôt indexé vaudrait 20 et 31,25 sacs : exactement la récolte du carré. Les deux problèmes se relisent alors ainsi :

— *Problème 1.* Le rendement baisse, mais l'impôt reste à 23 sacs au lieu de descendre à 18,4 : l'impôt n'est pas indexé à la baisse, et le déficit par rapport à la récolte du carré est de 3 sacs.

— *Problème 2.* Le rendement monte, mais l'impôt passe à 40 sacs au lieu de 28,75 : il monte plus vite que le rendement, et le déficit est de 8,75 sacs.

Dans les deux cas, les racines complexes mesurent l'écart entre la règle fiscale et la proportion au rendement, et non la crue elle-même.

La règle d'Hérodote s'inscrit dans ce cadre. Elle porte sur l'assiette : quand le fleuve emporte une partie du lot, l'impôt est réduit en proportion de la surface restante, c'est-à-dire que l'assiette τ et la capacité μ_a^2 diminuent dans le même rapport. La règle conserve donc le rapport de l'assiette à la capacité ; si l'assiette était la capacité du lot, la marge reste nulle, et la règle maintient le lot à la racine double. C'est une indexation, appliquée à la surface plutôt qu'au rendement, comme la remise proportionnelle de la proposition 8.

9.4 Le sens des termes

Terme	Sens dans le problème	Rôle dans le trinôme
$\Sigma = x' + x''$	demi-longueur du cordeau (m)	somme des racines
$\mu_a = \Sigma/2$	côté du carré tendu par chacun	partie propre
μ_a^2	capacité du champ, surface du carré (m^2)	produit maximal
h	hauteur de la crue	n'apparaît pas
$c = 1/\rho(h)$	m^2 par sac, fixé par la crue	taille du grain grossier
T	impôt en sacs, fixé par le trésor	—
$\Pi = Tc$	surface qu'exige l'impôt (m^2)	produit des racines
$D = \mu_a^2 - Tc$	$c\times$(récolte du carré − impôt)	marge
$D > 0$, δ^2/c	surplus de grain, mesuré finement	grain couché
$D = 0$	impôt exactement indexé	grain ponctuel
$D < 0$, β^2/c	déficit en sacs : remise ou paiement	grain debout, partie partielle
$\cos^2\varphi = \mu_a^2/\Pi$	part de l'impôt payée par la terre	argument des racines

Trois distinctions résument la section.

(i) La *crue* est une cause naturelle ; elle n'entre dans le trinôme qu'à travers le rendement, et le rendement n'en est pas une fonction croissante.

(ii) Le *rendement* fixe la taille du grain grossier, le nombre de m^2 qu'un sac représente.

(iii) L'*impôt* est une règle humaine ; c'est son écart à la proportion au rendement qui fait passer le grain des racines de ponctuel à couché ou à debout.

10 Petits et gros producteurs

Les deux remises de la section 5, la remise minimale que mesure la partie partielle et la remise proportionnelle de la règle de trois, traitent-elles de la même façon les petits et les gros producteurs ? On compare ici des lots de tailles différentes, une même année de crue faible. Un lot est décrit par la demi-longueur Σ de son cordeau, donc par sa capacité $\mu_a^2 = (\Sigma/2)^2$; le rendement normal est d'un sac pour $c_0 = 100$ m^2, celui de l'année d'un sac pour $c = 125$ m^2. On note

$$R_{\min} = \max\Big(0,\ T - \frac{\mu_a^2}{c}\Big), \qquad R_{\mathrm{p}} = T\Big(1 - \frac{c_0}{c}\Big), \qquad D_0 = \mu_a^2 - Tc_0,$$

la remise minimale (nulle si le lot peut payer), la remise proportionnelle et la marge d'une année normale. La réponse dépend de la façon dont l'impôt est fixé.

10.1 Un impôt proportionnel à la taille

Proposition 15 (Pas d'effet de taille)**.** *Si chaque lot paie la même fraction $\kappa \in]0,1]$ de sa récolte normale, $T = \kappa\,\mu_a^2/c_0$, alors*

$$\frac{R_{\min}}{T} = \max\Big(0,\ 1 - \frac{c_0}{\kappa\, c}\Big), \qquad \frac{R_{\mathrm{p}}}{T} = 1 - \frac{c_0}{c},$$

quelle que soit la taille du lot. Les deux remises sont la même fraction de l'impôt pour tous, et la remise proportionnelle est la plus grande des deux pour tous, puisque $D_0 = (1-\kappa)\mu_a^2 \geq 0$.

Démonstration. $\mu_a^2/c = T\,c_0/(\kappa c)$, d'où la première égalité ; la seconde est la définition. Enfin $D_0 = \mu_a^2 - \kappa\mu_a^2$, et la proposition 8 donne $R_{\mathrm{p}} - R_{\min} = D_0/c \geq 0$ lorsque $R_{\min} > 0$. □

Avec $\kappa = 0{,}92$, l'impôt du problème 5 pour le lot de 2500 m^2, la remise minimale vaut environ 13 % de l'impôt et la remise proportionnelle 20 %, pour un petit comme pour un gros lot. Le modèle est homogène : multiplier la surface multiplie l'impôt, la récolte et les deux remises par le même facteur.

10.2 Un impôt fixe par lot

Supposons au contraire que tous les lots paient le même impôt, $T = 23$ sacs, quelle que soit leur taille.

Proposition 16 (Le signe de la marge normale décide)**.** *Avec un impôt fixe :*

(i) la remise proportionnelle est la même pour tous les lots, $R_{\mathrm{p}} = T(1 - c_0/c)$, tandis que la remise minimale décroît avec la taille ;

(ii) tant que $R_{\min} > 0$, la remise minimale est plus grande que la remise proportionnelle si et seulement si $D_0 < 0$, c'est-à-dire si la récolte normale du lot est inférieure à l'impôt ;

(iii) après la remise proportionnelle, un lot peut payer l'impôt avec sa récolte si et seulement si $D_0 \geq 0$.

Démonstration. (i) R_{p} ne dépend pas de μ_a, et $T - \mu_a^2/c$ décroît quand μ_a croît. (ii) La proposition 8 donne $R_{\mathrm{p}} - R_{\min} = D_0/c$. (iii) L'impôt réduit vaut Tc_0/c, et la récolte μ_a^2/c : la récolte couvre l'impôt réduit si et seulement si $\mu_a^2 \geq Tc_0$. □

Le seuil est $\mu_a^2 = Tc_0 = 2300$ m^2, soit un côté de $\sqrt{2300} \approx 48$ m. En deçà, le lot est en déficit même en année normale : son grain est debout chaque année. Au-delà, il a un surplus en année normale, et son grain est couché.

Lot	Surface	Récolte normale	D_0	Récolte de l'année	$R_{\min}$	R_{p}	Reste après R_{p}
petit ($\mu_a = 45$ m)	2025 m^2	20,25	-275	16,2	**6,8**	4,6	$-2,2$
moyen ($\mu_a = 50$ m)	2500 m^2	25	$+200$	20	3	**4,6**	$+1,6$
gros ($\mu_a = 60$ m)	3600 m^2	36	$+1300$	28,8	0	**4,6**	$+10,4$

Les quantités sont en sacs ; la dernière colonne est la récolte de l'année diminuée de l'impôt réduit, 18,4 sacs. On y lit les trois situations.

— *Le petit lot* est en déficit même en année normale. La règle de trois ne lui suffit pas : l'impôt réduit, 18,4 sacs, dépasse encore sa récolte de 2,2 sacs. Seule la remise minimale, 6,8 sacs, lui permet de payer ; en sacs entiers, elle est de $\lceil 6{,}8 \rceil = 7$ sacs.

— *Le lot moyen* est celui du problème 5 : la règle de trois lui laisse 1,6 sac, la remise minimale ne lui laisse rien.

— *Le gros lot* peut payer l'impôt entier avec sa récolte de l'année : la remise minimale est nulle. La règle de trois lui accorde pourtant 4,6 sacs, et lui laisse 10,4 sacs.

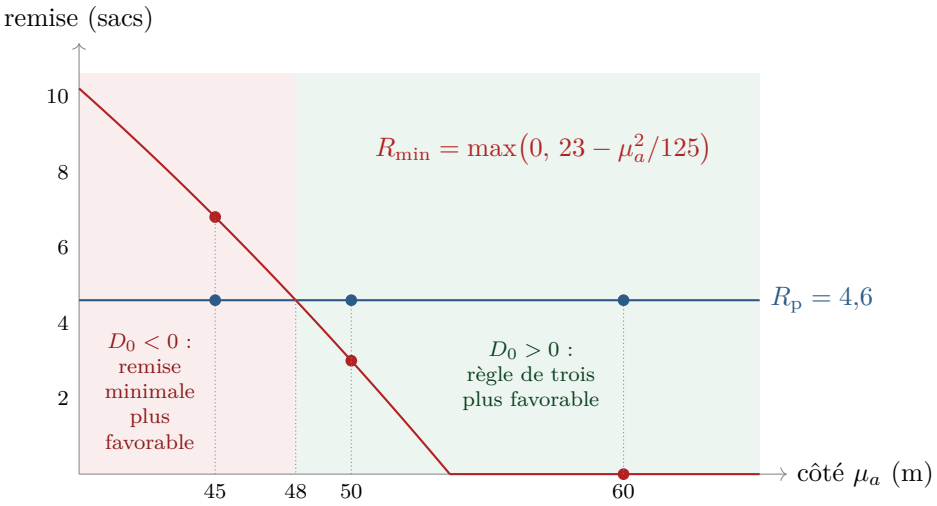


FIGURE 5 – Schéma : les deux remises en fonction de la taille du lot, pour un impôt fixe de 23 sacs et une crue faible. La règle de trois accorde la même remise à tous ; la remise minimale décroît avec la taille et s'annule pour un côté d'environ 53,6 m. Les deux se croisent au seuil $\mu_a \approx 48$ m, où la récolte normale égale l'impôt.

10.3 L'effet du sac entier

Le règlement en sacs entiers laisse un excédent inférieur à un sac (proposition 3). Pour une remise, cet excédent profite au paysan ; pour un paiement, comme dans le problème 9, il lui coûte. Rapporté à la récolte, il pèse davantage sur un petit lot : un quart de sac représente 1,5 % de la récolte du petit lot une année de crue faible, et moins de 0,9 % de celle du gros.

10.4 Bilan de la comparaison

— Avec un impôt proportionnel à la taille, aucune des deux règles n'avantage une taille de lot : le modèle est homogène.

— Avec un impôt fixe, la remise minimale, celle que mesurent les racines complexes, protège les lots en déficit, qui sont les petits ; la règle de trois favorise les lots qui ont un surplus, qui sont les gros, et peut ne pas suffire aux petits.

— Le critère est le signe de la marge d'une année normale : un lot dont le grain est debout chaque année a besoin de la remise minimale, un lot dont le grain est couché tire profit de la règle de trois.

Remarque. Dans le récit d'Hérodote, la question ne se pose pas : les lots de Sésostris sont égaux, et l'impôt qui les frappe aussi. C'est l'inégalité des lots, jointe à un impôt fixe, qui fait apparaître l'effet de taille. Le modèle retrouve ici, dans un cadre très simple, le caractère régressif d'un impôt forfaitaire.

11 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle ne contient pas d'énoncé nouveau.

Le cordeau joue le rôle du grain fin : il se tend à la longueur voulue, et la partie propre, 50 m, s'y exprime exactement. Le sac joue le rôle du grain grossier : il ne se divise pas, et la partie partielle s'y compte par unités entières. La récolte du carré, qui peut ne pas être un nombre entier de sacs, se raffine au boisseau : la partie propre est un grain grossier raffinable.

La particularité de ces deux problèmes est que la taille du grain grossier, c m^2 par sac, est fixée par la nature, à travers la crue. La même partie partielle en m^2 se compte en un nombre de sacs différent selon l'année. Le nilomètre, en mesurant la crue, fixe en quelque sorte l'unité grossière de l'année.

Enfin, la conjugaison des racines, $50 + i\beta$ et $50 - i\beta$, porte une partie partielle par paysan. C'est leur produit, $(i\beta)(-i\beta) = \beta^2$, qui forme le déficit : la charge est commune, et chaque paysan en porte la moitié.

12 Bilan

1. Le cordeau donne la somme des côtés, l'impôt et le rendement donnent la surface nécessaire : les côtés du champ sont les racines d'un trinôme (lemme 4).
2. Quand la surface nécessaire dépasse le carré du demi-cordeau, les racines sont complexes ; leur partie propre donne le cordeau de chacun, leur partie partielle le nombre de sacs à régler, et la conjugaison le partage par moitié (propositions 6 et 10).
3. Selon l'institution, la partie partielle est une remise du trésor ou un paiement des greniers. La remise qu'elle mesure est la remise minimale, qui rend l'impôt tout juste payable ; la règle de trois d'Hérodote donne une remise plus grande, qui en diffère du surplus d'une année normale (proposition 8).
4. Le sac est un grain grossier de surface, dont la taille dépend de la crue ; le passage du surplus au déficit est celui du grain couché au grain debout (proposition 11).
5. La marge compare la récolte à l'impôt, non la crue à quoi que ce soit ; un impôt indexé sur le rendement donne une racine double pour toute crue, et les racines complexes mesurent l'écart de la règle fiscale à cette indexation (propositions 12 et 14).
6. Avec un impôt proportionnel, les deux remises ne dépendent pas de la taille des lots ; avec un impôt fixe, la remise minimale protège les petits lots, en déficit chaque année, et la règle de trois favorise les gros, qui ont un surplus : le critère est le signe de la marge normale (propositions 15 et 16).

Références

[1] H. Genvrin, *Le partage d'une pêche. La partie propre dans l'unité fine, la partie partielle en unités grossières*, octobre 2026.

[2] H. Genvrin, *Le grain des racines. Pousser les formules de Viète jusqu'au bout : partie propre, partie partielle et unité imaginaire*, octobre 2026.

[3] Hérodote, *Histoires*, livre II, 109.

[4] Pline l'Ancien, *Histoire naturelle*, livre V, 58.

[5] Strabon, *Géographie*, livre XVII, 1, 48.