

Arborescence de séries

Divergence à chaque étage, convergence le long des branches

Hugues Genyvin

Version révisée, octobre 2026

Résumé

À partir d'une série divergente à termes positifs décroissants, comme la série des inverses des nombres premiers ou la série harmonique, on construit un arbre binaire de séries en séparant à chaque étape les termes de rang impair et ceux de rang pair. On démontre par récurrence que toutes les séries de l'arbre divergent, et l'on précise leur vitesse de divergence ; dans le cas harmonique, on obtient toutes les constantes exactement. On montre ensuite que, le long de chaque branche infinie, les séries « tendent » vers une série ayant au plus un terme. Cette apparente contradiction n'en est pas une : elle illustre le fait que la divergence ne se conserve pas par passage à une limite non uniforme. Le raisonnement par récurrence n'est pas en cause.

1 Construction de l'arbre

Dans tout le texte, $(a_n)_{n \geq 1}$ est une suite de réels strictement positifs, décroissante, de limite nulle, telle que la série $\sum a_n$ diverge. Les deux exemples étudiés sont :

- $a_n = 1/p_n$, où p_n est le n -ième nombre premier ($p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$) ;
- $a_n = 1/n$, la série harmonique.

Définition 1. On note $s_{1,1} = \sum_{n \geq 1} a_n$. Si $s_{k,q}$ est une série de l'arbre, de termes $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots$, ses deux *enfants* sont

$$s_{k+1,2q-1} = b_1 + b_3 + b_5 + \dots \quad \text{et} \quad s_{k+1,2q} = b_2 + b_4 + b_6 + \dots,$$

formées respectivement des termes de rang impair et de rang pair de $s_{k,q}$. L'étage k compte 2^{k-1} séries, $1 \leq q \leq 2^{k-1}$.

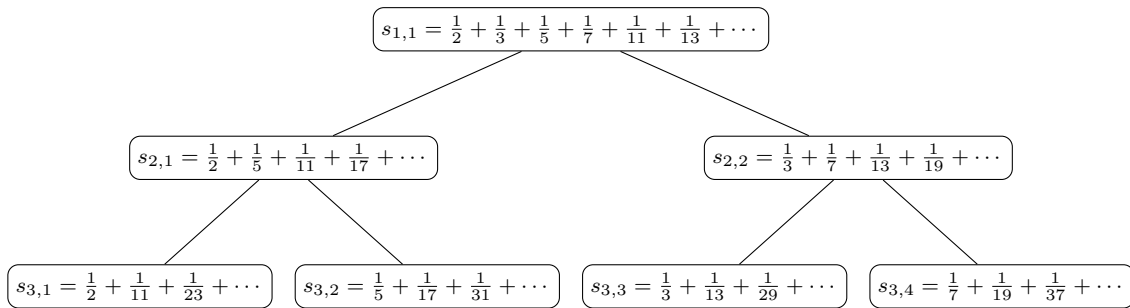


FIGURE 1 – Les trois premiers étages de l'arbre issu de la série des inverses des nombres premiers.

Lemme 2 (Indices d'une série de l'arbre). *Les indices des termes d'une série de l'étage k forment une progression arithmétique*

$$\{r, r + 2^{k-1}, r + 2 \cdot 2^{k-1}, \dots\}, \quad 1 \leq r \leq 2^{k-1},$$

et les 2^{k-1} séries de l'étage k correspondent exactement aux 2^{k-1} valeurs possibles de r .

Démonstration. Par récurrence sur k . À l'étage 1, $r = 1$ et la raison est 1. Si une série de l'étage k a pour indices $r + 2^{k-1}j$, $j \geq 0$, ses termes de rang impair correspondent à j pair et ont pour indices $r + 2^k j'$; ses termes de rang pair correspondent à j impair et ont pour indices $(r + 2^{k-1}) + 2^k j'$. Les deux enfants sont donc associés aux restes r et $r + 2^{k-1}$ modulo 2^k , qui décrivent bien tous les restes de 1 à 2^k lorsque r décrit les restes de 1 à 2^{k-1} . $\square$

2 Toutes les séries de l'arbre divergent

Lemme 3 (Différence de deux enfants). *Soit une série de termes $b_1 \geq b_2 \geq \dots > 0$, et soient s' et s'' ses deux enfants. Pour tout J , notons $s'(J) = \sum_{j \leq J} b_{2j-1}$ et $s''(J) = \sum_{j \leq J} b_{2j}$. Alors*

$$0 \leq s'(J) - s''(J) \leq b_1,$$

et la différence $s'(J) - s''(J)$ converge lorsque $J \rightarrow +\infty$.

Démonstration. On a $s'(J) - s''(J) = \sum_{j \leq J} (b_{2j-1} - b_{2j})$: c'est une somme de termes positifs, donc croissante en J et positive. Elle s'écrit aussi

$$b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \dots - (b_{2J-2} - b_{2J-1}) - b_{2J} \leq b_1.$$

Croissante et majorée, elle converge. C'est le critère des séries alternées. $\square$

Théorème 4. *Pour tout entier $k \geq 1$ et tout q tel que $1 \leq q \leq 2^{k-1}$, la série $s_{k,q}$ diverge.*

Démonstration. Par récurrence sur k . Pour $k = 1$, $s_{1,1} = \sum a_n$ diverge par hypothèse.

Supposons que $s = s_{k,q}$ diverge, et soient s' , s'' ses enfants. Avec les notations du lemme, et en notant $s(2J)$ la somme des $2J$ premiers termes de s :

$$s'(J) + s''(J) = s(2J) \xrightarrow{J \rightarrow \infty} +\infty, \quad 0 \leq s'(J) - s''(J) \leq b_1.$$

Il en résulte

$$s'(J) = \frac{s(2J) + (s'(J) - s''(J))}{2} \geq \frac{s(2J)}{2}, \quad s''(J) = \frac{s(2J) - (s'(J) - s''(J))}{2} \geq \frac{s(2J) - b_1}{2},$$

et les deux enfants divergent. $\square$

Remarque. Pour la série des inverses des nombres premiers, on peut aussi conclure directement. Comme $p_n \sim n \ln n$, le terme d'indice $r + 2^{k-1}j$ est équivalent à $\frac{1}{2^{k-1}j \ln j}$, et la série de Bertrand $\sum \frac{1}{j \ln j}$ diverge.

3 Vitesse de divergence

Pour tout entier N , notons $S(N) = \sum_{n \leq N} a_n$ et $S_{k,q}(N)$ la somme des termes de $s_{k,q}$ d'indice au plus N .

Proposition 5. *Pour tous k , q et N ,*

$$\left| S_{k,q}(N) - \frac{S(N)}{2^{k-1}} \right| < a_1.$$

Démonstration. Soit s une série de l'arbre et s' , s'' ses enfants. Le lemme sur la différence de deux enfants, appliqué aux termes d'indice au plus N , donne $S'(N) = \frac{1}{2}S(N) + e$ et $S''(N) = \frac{1}{2}S(N) - e$, où S désigne ici la somme partielle du parent et où $|e| \leq \frac{1}{2}b_1 \leq \frac{1}{2}a_1$. En itérant depuis la racine, on obtient

$$S_{k,q}(N) = \frac{S(N)}{2^{k-1}} + \sum_{i=2}^k \frac{e_i}{2^{k-i}}, \quad |e_i| \leq \frac{a_1}{2},$$

et le reste est majoré en valeur absolue par $\frac{a_1}{2} (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots) < a_1$. $\square$

Chaque étage divise donc la vitesse de divergence par 2, à une erreur bornée près, mais chaque série continue de diverger.

Inverses des nombres premiers. Le théorème de Mertens donne $\sum_{n \leq N} 1/p_n = \ln \ln N + M + o(1)$, où $M \approx 0,2615$ est la constante de Meissel–Mertens. D'où

$$S_{k,q}(N) = \frac{\ln \ln N}{2^{k-1}} + O(1),$$

avec un reste borné par $\frac{M}{2^{k-1}} + \frac{1}{2} + o(1)$. Pour $k = 2$, la différence $s_{2,1} - s_{2,2}$ converge vers une constante $\omega \in]0, \frac{1}{2}[$ et

$$S_{2,1}(N) = \frac{\ln \ln N}{2} + \frac{M + \omega}{2} + o(1), \quad S_{2,2}(N) = \frac{\ln \ln N}{2} + \frac{M - \omega}{2} + o(1).$$

Série harmonique : les constantes exactes. Notons $\gamma \approx 0,5772$ la constante d'Euler et $\psi = \Gamma'/\Gamma$ la fonction digamma.

Proposition 6. Pour $m \geq 1$ et $1 \leq r \leq m$,

$$\sum_{\substack{n \leq N \\ n \equiv r \pmod{m}}} \frac{1}{n} = \frac{\ln N - \ln m - \psi(r/m)}{m} + o(1).$$

Démonstration. Les indices sont $n = mj + r$ avec $0 \leq j \leq J$, où $J \approx N/m$. On a

$$\sum_{j=0}^J \frac{1}{mj+r} = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^J \frac{1}{j+r/m} = \frac{1}{m} \left(\psi(J+1+r/m) - \psi(r/m) \right),$$

et $\psi(x) = \ln x + o(1)$ quand $x \rightarrow +\infty$, donc $\psi(J+1+r/m) = \ln(N/m) + o(1)$. $\square$

Avec $m = 2^{k-1}$ et les valeurs $\psi(1) = -\gamma$, $\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2 \ln 2$, $\psi(\frac{1}{4}) = -\gamma - \frac{\pi}{2} - 3 \ln 2$, $\psi(\frac{3}{4}) = -\gamma + \frac{\pi}{2} - 3 \ln 2$, on obtient les trois premiers étages. On a vérifié numériquement ces valeurs pour $N = 4 \cdot 10^6$.

Série	Indices	Reste r	Somme partielle $S_{k,q}(N)$, à $o(1)$ près
$s_{1,1}$	tous	1	$\ln N + \gamma$
$s_{2,1}$	1, 3, 5, ...	1	$\frac{1}{2} \ln N + \frac{\gamma}{2} + \frac{\ln 2}{2}$
$s_{2,2}$	2, 4, 6, ...	2	$\frac{1}{2} \ln N + \frac{\gamma}{2} - \frac{\ln 2}{2}$
$s_{3,1}$	1, 5, 9, ...	1	$\frac{1}{4} \ln N + \frac{\gamma}{4} + \frac{\ln 2}{4} + \frac{\pi}{8}$
$s_{3,2}$	3, 7, 11, ...	3	$\frac{1}{4} \ln N + \frac{\gamma}{4} + \frac{\ln 2}{4} - \frac{\pi}{8}$
$s_{3,3}$	2, 6, 10, ...	2	$\frac{1}{4} \ln N + \frac{\gamma}{4}$
$s_{3,4}$	4, 8, 12, ...	4	$\frac{1}{4} \ln N + \frac{\gamma}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

On retrouve les séries alternées classiques : $s_{2,1} - s_{2,2} \rightarrow \ln 2$ et $s_{3,1} - s_{3,2} \rightarrow 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots = \frac{\pi}{4}$. On vérifie aussi que la somme des deux enfants redonne toujours le parent, par exemple $s_{3,1} + s_{3,2} = s_{2,1}$.

4 Que se passe-t-il quand $k \rightarrow +\infty$?

4.1 L'ordre des limites compte

La proposition sur la vitesse de divergence donne, pour la série des inverses des nombres premiers, $S_{k,q}(N) \approx \frac{\ln \ln N}{2^{k-1}}$. Selon l'ordre dans lequel on fait tendre N et k vers l'infini, on obtient deux résultats opposés :

- à k fixé, $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln N}{2^{k-1}} = +\infty$: chaque série de l'arbre diverge ;
- à N fixé, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln N}{2^{k-1}} = 0$: dès que $2^{k-1} \geq N$, une série de l'étage k contient au plus un terme d'indice $\leq N$.

La « double limite » quand N et k tendent ensemble vers l'infini n'existe donc pas. Dire que les séries « se mettent à converger » à partir d'un étage k_0 supposerait un k_0 indépendant de N ; or l'étage où la somme partielle devient petite croît avec N , comme $\log_2 N$.

4.2 Les branches de l'arbre

Une *branche* est un chemin infini depuis la racine, $s_{1,1} \rightarrow s_{2,q_2} \rightarrow s_{3,q_3} \rightarrow \dots$. D'après le lemme sur les indices, elle impose une suite de restes compatibles r_k modulo 2^{k-1} .

Proposition 7. *Le long d'une branche, l'intersection des ensembles d'indices des séries contient au plus un entier. La « série limite » de la branche a donc au plus un terme, et elle converge.*

Démonstration. Si deux entiers $n < n'$ appartaient à tous les ensembles d'indices de la branche, on aurait $n \equiv n' \pmod{2^{k-1}}$ pour tout k , donc 2^{k-1} diviserait $n' - n > 0$ pour tout k , ce qui est impossible. $\square$

Par exemple, la branche qui prend toujours le premier enfant ($s_{1,1} \rightarrow s_{2,1} \rightarrow s_{3,1} \rightarrow \dots$) a pour indices 1, puis $\{1, 3, 5, \dots\}$, puis $\{1, 5, 9, \dots\}$, $\dots$: la série limite se réduit au seul terme a_1 . La branche qui prend toujours le second enfant a pour indices les multiples de 2^{k-1} : son intersection est vide et la série limite est nulle.

4.3 Il n'y a pas de paradoxe

Les deux raisonnements portent sur des objets différents :

- la récurrence établit que $s_{k,q}$ diverge *pour tout entier* k , ce qui est vrai ;
- la série limite d'une branche n'est la série $s_{k,q}$ d'aucun étage : c'est un objet obtenu par passage à la limite, auquel la récurrence ne s'applique pas.

La seule leçon est que *la divergence ne se conserve pas par passage à une limite non uniforme*. C'est un phénomène bien connu : chaque fonction $x \mapsto x^k$ est continue sur $[0, 1]$, mais leur limite simple ne l'est pas ; chaque suite $n \mapsto n/2^k$ tend vers $+\infty$, mais pour chaque n fixé, $n/2^k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Pour que la convergence d'une limite V se transmette aux séries U^k , il faudrait que $U^k - V$ tende vers 0 *uniformément* en N , c'est-à-dire $\sup_N |U^k(N) - V(N)| \rightarrow 0$. Ici, au contraire, $\sup_N S_{k,q}(N) = +\infty$ pour tout k .

Le raisonnement par récurrence n'est donc pas en défaut, même pour une propriété qualitative comme la divergence : il démontre exactement ce qu'il prétend démontrer, un énoncé pour chaque entier k .

4.4 Une lecture non standard

L'analyse non standard donne une image fidèle de cette situation. Par transfert, l'énoncé « pour tout entier k , toute série de l'étage k diverge » reste vrai pour un étage k_∞ hyperfini. Mais

une série de l'étage k_∞ a pour raison $2^{k_\infty-1}$, qui est infiniment grande : parmi ses termes, au plus un a un indice standard. Sa divergence ne se manifeste qu'au-delà des indices standard.

Autrement dit, la série limite d'une branche est l'*ombre* standard d'une série de l'étage k_∞ : divergente en tant que série hyperfinie, elle n'a qu'un terme visible à l'échelle standard. L'intuition de la version initiale, selon laquelle les entiers finis seraient « consommés » au-delà d'un certain étage, trouve là sa formulation rigoureuse.