Autour des racines d'un trinôme

Moyennes, constructions et degrés supérieurs

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

Les racines d'un trinôme s'écrivent à l'aide de deux moyennes de ces racines : $x = \mu_a \pm \sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$, où μ_a est leur moyenne arithmétique et μ_g leur moyenne géométrique. On montre que la demi-différence des racines, $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$, s'exprime aussi par la moyenne quadratique, $\sqrt{\mu_q^2 - \mu_a^2}$, ce qui donne la relation $\mu_a^2 = \frac{1}{2}(\mu_g^2 + \mu_q^2)$. Ces relations se lisent sur une seule figure, le demi-cercle de Pappus, qui porte aussi la moyenne harmonique. Elles donnent une construction à la règle et au compas des racines, où les trois cas du trinôme apparaissent comme les trois positions d'une droite par rapport à un cercle : sécante, tangente ou extérieure ; dans le dernier cas, un second cercle construit les racines complexes. On en déduit que les racines sont constructibles si et seulement si les deux moyennes le sont, c'est-à-dire si et seulement si les coefficients le sont. On examine enfin ce qui subsiste de cette structure en degrés 3, 4 et 5 : le centrage par la moyenne et les moyennes symétriques de Maclaurin survivent ; l'équivalence entre inégalité des moyennes et racines réelles, la formule « centre plus ou moins racine carrée » et la constructibilité générale ne survivent pas.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Trois moyennes de deux racines **2**

3 La relation des trois moyennes **3**

4 Le demi-cercle de Pappus **3**

5 Résoudre le trinôme à la règle et au compas **4**

6 Constructibilité des racines **5**

7 En degré supérieur **5**

7.1 Le centrage survit 6

7.2 Les moyennes de Maclaurin 6

7.3 La formule ne survit pas 6

7.4 La constructibilité devient un vrai critère 7

7.5 Ce que Descartes faisait à la place 7

7.6 Bilan 7

1 Introduction

On sait depuis Viète que les coefficients d'un trinôme sont la somme et le produit de ses racines. On propose ici de les relire comme des *moyennes* : la demi-somme est la moyenne arithmétique des racines, et la racine carrée du produit leur moyenne géométrique. Cette lecture a trois conséquences.

— Elle donne une formule des racines où n'interviennent que des moyennes, et une relation simple entre les moyennes arithmétique, géométrique et quadratique.

— Elle se dessine : toutes ces moyennes vivent sur un même demi-cercle, et la résolution du trinôme devient une construction à la règle et au compas.

— Elle invite à chercher ce qui en subsiste en degré supérieur, et la réponse dessine une frontière nette entre le degré 2 et les autres.

Statut. Tous les énoncés sont démontrés ou rapportés à des résultats classiques, cités. La relation entre les trois moyennes et la lecture des trois cas du trinôme sur la figure de Pappus sont présentées pour elles-mêmes ; les résultats sur les degrés supérieurs sont rappelés sans démonstration lorsqu'ils relèvent de la théorie de Galois.

2 Trois moyennes de deux racines

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de racines u et v. On note $\Sigma = u + v = -\frac{b}{a}$ et $\Pi = uv = \frac{c}{a}$.

Définition 1 (Moyennes)**.**

$$\mu_a = \frac{u+v}{2}, \qquad \mu_g^2 = uv, \qquad \mu_q^2 = \frac{u^2+v^2}{2}, \qquad \mu_h = \frac{2uv}{u+v}.$$

Ce sont, pour $u, v > 0$, les moyennes arithmétique, géométrique, quadratique et harmonique de u et v, avec $\mu_g, \mu_q \geq 0$.

Remarque (Les cas de signe)*.* La moyenne géométrique n'est un réel que si $uv \geq 0$. Dans les énoncés algébriques qui suivent, seul $\mu_g^2 = \Pi$ intervient, et l'on peut prendre cette égalité pour définition, quel que soit le signe de Π. Pour des racines complexes conjuguées, $\Pi = |u|^2 > 0$, et $\mu_g = \sqrt{\Pi}$ est leur module commun.

Théorème 2 (Les racines par les moyennes)**.** *Les racines du trinôme sont*

$$x = \mu_a \pm \sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}.$$

Elles sont réelles et distinctes si $\mu_g^2 < \mu_a^2$, égales si $\mu_g^2 = \mu_a^2$, complexes conjuguées si $\mu_g^2 > \mu_a^2$.

Démonstration. $\frac{1}{a}P(x) = x^2 - \Sigma x + \Pi = x^2 - 2\mu_a x + \mu_g^2 = (x - \mu_a)^2 - (\mu_a^2 - \mu_g^2)$. □

Pour $u, v > 0$, l'inégalité $\mu_g \leq \mu_a$ est l'inégalité entre moyennes arithmétique et géométrique : à somme fixée, le produit de deux réels est maximal lorsqu'ils sont égaux. Les racines sont donc complexes exactement lorsque le produit demandé dépasse ce que deux réels de même somme peuvent donner.

3 La relation des trois moyennes

Théorème 3 (Demi-différence et trois moyennes)**.** *Notons $\delta = \frac{|u-v|}{2}$ la demi-différence de deux racines réelles. Alors*

$$\delta^2 = \mu_a^2 - \mu_g^2 = \mu_q^2 - \mu_a^2, \qquad \text{et donc} \qquad \mu_a^2 = \frac{\mu_g^2 + \mu_q^2}{2}.$$

De plus, $\mu_a \mu_h = \mu_g^2$: la moyenne géométrique est la moyenne géométrique des moyennes arithmétique et harmonique.

Démonstration. $\mu_a^2 - \mu_g^2 = \frac{(u+v)^2-4uv}{4} = \frac{(u-v)^2}{4}$, et $\mu_q^2 - \mu_a^2 = \frac{2(u^2+v^2)-(u+v)^2}{4} = \frac{(u-v)^2}{4}$. En ajoutant $\mu_a^2 - \mu_g^2 = \mu_q^2 - \mu_a^2$ à $2\mu_a^2$, on obtient la relation annoncée. Enfin $\mu_a\mu_h = \frac{u+v}{2} \cdot \frac{2uv}{u+v} = uv$. □

Corollaire 4 (Chaîne des moyennes)**.** *Pour $u, v > 0$,*

$$\mu_h \leq \mu_g \leq \mu_a \leq \mu_q,$$

avec égalité partout si et seulement si $u = v$.

Démonstration. Par le théorème 3, $\mu_g^2 = \mu_a^2 - \delta^2 \leq \mu_a^2 \leq \mu_a^2 + \delta^2 = \mu_q^2$, et $\mu_h = \mu_g^2/\mu_a \leq \mu_g$ puisque $\mu_g \leq \mu_a$. Toutes les inégalités sont des égalités si et seulement si $\delta = 0$. □

Remarque (Une confusion à éviter). On pourrait être tenté d'écrire $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2} = \sqrt{\mu_q}$. C'est inexact, et l'on peut le voir sans calcul : si u et v sont des longueurs, $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$ est une longueur, tandis que $\sqrt{\mu_q}$ est la racine carrée d'une longueur. La bonne relation fait intervenir le *carré* de la moyenne quadratique : $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2} = \sqrt{\mu_q^2 - \mu_a^2}$.

Le théorème 3 dit que la demi-différence δ s'obtient par Pythagore de deux façons :

— comme côté d'un triangle rectangle d'hypoténuse μ_a et d'autre côté μ_g ;

— comme côté d'un triangle rectangle d'hypoténuse μ_q et d'autre côté μ_a.

La figure 1 réunit les deux triangles.

4 Le demi-cercle de Pappus

Proposition 5 (Les quatre moyennes sur un demi-cercle)**.** *Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$, de centre O, avec $AB = u + v$, et C le point de $[AB]$ tel que $AC = u$ et $CB = v$. Soit D le point du demi-cercle à la verticale de C, E le point du demi-cercle à la verticale de O, et F le projeté orthogonal de C sur $[OD]$. Alors*

$$OD = \mu_a, \qquad CD = \mu_g, \qquad OC = \delta, \qquad CE = \mu_q, \qquad DF = \mu_h.$$

Démonstration. OD est un rayon : $OD = \frac{u+v}{2} = \mu_a$. $OC = |AC - AO| = |u - \mu_a| = \delta$. Le triangle OCD est rectangle en C, donc $CD^2 = OD^2 - OC^2 = \mu_a^2 - \delta^2 = \mu_g^2$ (c'est aussi la proposition VI.13 d'Euclide [4] : la hauteur CD est moyenne proportionnelle entre AC et CB). Le triangle OCE est rectangle en O, donc $CE^2 = OC^2 + OE^2 = \delta^2 + \mu_a^2 = \mu_q^2$. Enfin, dans le triangle OCD rectangle en C, la projection de C sur l'hypoténuse donne $DF \cdot DO = DC^2$, d'où $DF = \mu_g^2/\mu_a = \mu_h$. □

Cette figure est traditionnellement attribuée à Pappus d'Alexandrie, qui l'utilise pour comparer les moyennes. Elle rend visibles d'un seul coup d'œil la chaîne $\mu_h \leq \mu_g \leq \mu_a \leq \mu_q$ et la relation du théorème 3 : les deux triangles rectangles OCD et OCE ont en commun le côté $OC = \delta$.

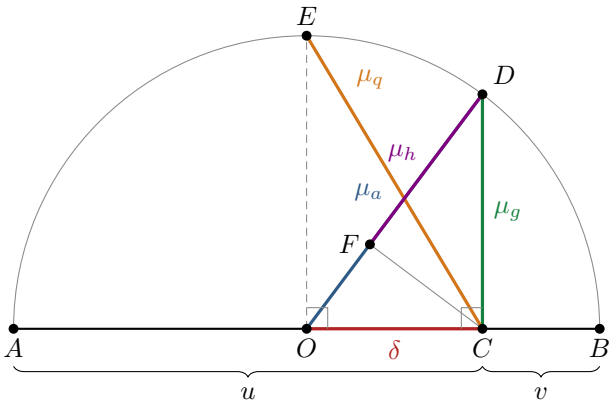


FIGURE 1 – Le demi-cercle de Pappus, ici pour $u = 4$ et $v = 1$. Le rayon OD est la moyenne arithmétique $\mu_a = 2{,}5$, la hauteur CD la moyenne géométrique $\mu_g = 2$, le segment CE la moyenne quadratique $\mu_q \approx 2{,}92$, et le segment FD la moyenne harmonique $\mu_h = 1{,}6$. La demi-différence $\delta = OC = 1{,}5$ est un côté commun aux deux triangles rectangles OCD (hypoténuse μ_a) et OCE (hypoténuse μ_q).

5 Résoudre le trinôme à la règle et au compas

La figure de Pappus se lit aussi dans l'autre sens : connaissant les deux moyennes, on construit les racines.

Proposition 6 (Construction des racines réelles)**.** *Soient $\mu_a > 0$ et $\mu_g \geq 0$ des longueurs données. On trace un demi-cercle de centre O et de rayon μ_a, de diamètre $[AB]$, et la droite parallèle à (AB) à la hauteur μ_g.*

(i) Si $\mu_g < \mu_a$, la droite coupe le demi-cercle en deux points D et D', dont les pieds C et C' sur $[AB]$ vérifient $AC = \mu_a - \delta$ et $AC' = \mu_a + \delta$: ce sont les deux racines.

(ii) Si $\mu_g = \mu_a$, la droite est tangente au demi-cercle en son sommet, dont le pied est O : $AO = \mu_a$ est la racine double.

(iii) Si $\mu_g > \mu_a$, la droite ne rencontre pas le demi-cercle : il n'y a pas de racine réelle.

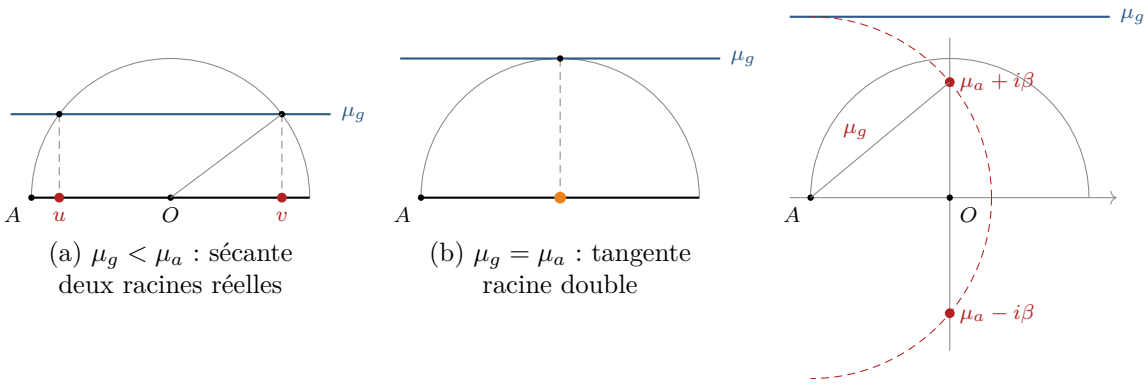
Démonstration. Un point du demi-cercle à la hauteur μ_g a pour pied un point situé à la distance $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2} = \delta$ de O, par Pythagore ; il en existe deux si $\mu_g < \mu_a$, un si $\mu_g = \mu_a$, aucun si $\mu_g > \mu_a$. Les distances à A sont $\mu_a \mp \delta$, qui sont les racines par le théorème 2. □

Proposition 7 (Construction des racines complexes)**.** *Si $\mu_g > \mu_a$, on place l'origine en A et l'on trace le cercle de centre A et de rayon μ_g. Il coupe la perpendiculaire à (AB) menée par O en deux points, d'ordonnées $\pm\beta$ avec $\beta = \sqrt{\mu_g^2 - \mu_a^2}$. Lus dans le plan complexe d'origine A, ces deux points sont les racines $\mu_a \pm i\beta$.*

Démonstration. Le point de la perpendiculaire en O situé à la distance μ_g de A a pour ordonnée β telle que $\mu_a^2 + \beta^2 = \mu_g^2$. Par le théorème 2, les racines sont $\mu_a \pm \sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2} = \mu_a \pm i\sqrt{\mu_g^2 - \mu_a^2}$. □

Les rôles des deux moyennes s'échangent d'un cas à l'autre : dans le cas réel, μ_a est l'hypoténuse et μ_g un côté ; dans le cas complexe, μ_g est l'hypoténuse et μ_a un côté. Les racines complexes sont sur le cercle de centre A et de rayon μ_g, ce qui exprime que leur module est la moyenne géométrique.

Remarque (Les trois positions d'une droite). Les trois cas du trinôme sont les trois positions d'une droite par rapport à un cercle : sécante, tangente, extérieure. Ils correspondent aux trois états du *grain des racines*, le segment qui joint les deux racines : couché sur l'axe réel, réduit à son centre, ou redressé d'un quart de tour [5].



(a) $\mu_g < \mu_a$: sécante deux racines réelles

(b) $\mu_g = \mu_a$: tangente racine double

(c) $\mu_g > \mu_a$: extérieure racines complexes

FIGURE 2 – Résoudre un trinôme à la règle et au compas, pour $\mu_a = 2$. (a) Pour $\mu_g = 1{,}2$, la droite coupe le demi-cercle ; les pieds des intersections donnent les racines 0,4 et 3,6. (b) Pour $\mu_g = 2$, la droite est tangente ; la racine double est 2. (c) Pour $\mu_g = 2{,}6$, la droite passe au-dessus du demi-cercle ; le cercle de centre A et de rayon μ_g (tirets) coupe la perpendiculaire en O aux points $2 \pm 1{,}66\,i$.

6 Constructibilité des racines

Définition 8 (Nombres constructibles)**.** Un réel positif est *constructible* s'il est la longueur d'un segment que l'on peut tracer à la règle et au compas à partir d'un segment unité. Les nombres constructibles forment un sous-corps de $\mathbb{R}$, stable par racine carrée des éléments positifs ; c'est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ qui ait ces propriétés [9]. Un nombre complexe est constructible si ses parties réelle et imaginaire le sont.

Théorème 9 (Critère de constructibilité)**.** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) les racines u et v sont constructibles ;

(ii) les moyennes μ_a et μ_g^2 sont constructibles ;

(iii) les coefficients $\Sigma = -b/a$ et $\Pi = c/a$ sont constructibles.

Lorsque $\Pi \geq 0$, on peut remplacer μ_g^2 par μ_g dans (ii).

Démonstration. (ii)⇔(iii) : $\Sigma = 2\mu_a$ et $\Pi = \mu_g^2$. (ii)⇒(i) : par le théorème 2, u et v s'obtiennent à partir de μ_a et μ_g^2 par des opérations de corps et une racine carrée, ce que réalisent les propositions 6 et 7. (i)⇒(iii) : $\Sigma = u + v$ et $\Pi = uv$. Enfin, si $\Pi \geq 0$, $\mu_g = \sqrt{\Pi}$ est constructible si et seulement si Π l'est. □

Remarque (Portée du critère)*.* Le critère est exact, mais il ne trie pas les trinômes à coefficients constructibles : il dit que *tous* ont des racines constructibles. C'est précisément la propriété qui distingue le degré 2. Elle est le point de départ du théorème de Wantzel, qui montre qu'en degré supérieur, des coefficients constructibles ne suffisent plus (section 7.4).

7 En degré supérieur

On examine ce qui subsiste de la structure précédente pour un polynôme unitaire de degré $n = 3$, 4 ou 5, de racines $x_1, \ldots, x_n$.

7.1 Le centrage survit

Proposition 10 (Centrage par la moyenne)**.** *Soit $\mu_a = \frac{1}{n}\sum x_k$ la moyenne arithmétique des racines. Le changement de variable $x = \mu_a + y$ transforme le polynôme en un polynôme en y sans terme de degré $n-1$.*

Démonstration. Les racines en y sont les $x_k - \mu_a$, dont la somme est nulle ; or le coefficient de y^{n-1} est l'opposé de cette somme. □

La moyenne arithmétique reste donc le centre des racines en tout degré. C'est la première étape des méthodes de Cardan (degré 3) et de Ferrari (degré 4).

7.2 Les moyennes de Maclaurin

Définition 11 (Moyennes symétriques)**.** Soit e_k la k-ième fonction symétrique élémentaire des racines. Les *moyennes symétriques* sont $S_k = e_k / \binom{n}{k}$. Le polynôme s'écrit

$$x^n - \binom{n}{1} S_1 x^{n-1} + \binom{n}{2} S_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n S_n.$$

En degré 2, $S_1 = \mu_a$ et $S_2 = \mu_g^2$: ce sont exactement les moyennes de la section 2. Pour des réels positifs, Maclaurin [7] a établi la chaîne

$$S_1 \;\geq\; S_2^{1/2} \;\geq\; S_3^{1/3} \;\geq\; \cdots \;\geq\; S_n^{1/n},$$

qui prolonge l'inégalité $\mu_a \geq \mu_g$, et Newton les inégalités $S_k^2 \geq S_{k-1} S_{k+1}$, qui sont vraies dès que toutes les racines sont réelles [6].

Proposition 12 (L'équivalence ne survit pas)**.** *En degré 2, les racines sont réelles si et seulement si $S_1^2 \geq S_2$. Dès le degré 3, les inégalités de Newton et de Maclaurin sont nécessaires, mais non suffisantes, pour que les racines soient réelles.*

Démonstration. Le degré 2 est le théorème 2. Pour le degré 3, le polynôme $x^3 - 4x^2 + 5x - 1$ a pour moyennes $S_1 = \frac{4}{3}$, $S_2 = \frac{5}{3}$, $S_3 = 1$. On vérifie $S_1^2 = \frac{16}{9} \geq \frac{5}{3} = S_2$, $S_2^2 = \frac{25}{9} \geq \frac{4}{3} = S_1 S_3$, et $S_1 \approx 1{,}33 \geq S_2^{1/2} \approx 1{,}29 \geq S_3^{1/3} = 1$. Pourtant ses racines sont $x_1 \approx 0{,}245$ et $x_{2,3} \approx 1{,}877 \pm 0{,}745\,i$: son discriminant est négatif. □

7.3 La formule ne survit pas

— **Degré 3.** Après centrage, $y^3 + py + q = 0$, et la formule de Cardan [2] donne

$$x = \mu_a + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Le centre subsiste, mais la demi-étendue est remplacée par une somme de racines cubiques.

— **Degré 4.** La méthode de Ferrari ramène l'équation à une équation de degré 3, la *cubique résolvante*, puis à deux équations du second degré.

— **Degré 5.** Il n'existe pas de formule générale par radicaux (Abel, 1824 ; Galois) [1].

7.4 La constructibilité devient un vrai critère

Théorème 13 (Wantzel, 1837)**.** *Si un nombre est constructible, le degré de son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de 2.*

Degré	Racines d'un polynôme irréductible sur $\mathbb{Q}$	Exemple
2	toujours constructibles	$x^2 - 2$
3	jamais constructibles	$x^3 - 2$ (duplication du cube) ; $8x^3 - 6x - 1$ (trisection de 60°)
4	constructibles si et seulement si la cubique résolvante a une racine rationnelle	$x^4 - 10x^2 + 1$, de racines $\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3}$: oui ; $x^4 - x - 1$: non
5	jamais constructibles (5 n'est pas une puissance de 2)	$x^5 - 4x + 2$

Pour $x^4 - x - 1$, la cubique résolvante $y^3 + 4y - 1$ n'a pas de racine rationnelle, et le discriminant -283 n'est pas un carré : le groupe de Galois est le groupe symétrique S_4, et les racines ne sont pas constructibles. Pour $8x^3 - 6x - 1$, la racine $\cos 20°$ vient de $\cos 60° = 4\cos^3 20° - 3\cos 20°$. Pour le degré 4, le critère est une conséquence de la théorie de Galois : les racines d'un polynôme irréductible sont constructibles si et seulement si son groupe de Galois est d'ordre une puissance de 2 [8].

7.5 Ce que Descartes faisait à la place

Faute de règle et de compas, Descartes construisait les racines des équations de degré 3 et 4 en coupant un cercle par une parabole [3].

Proposition 14 (Cercle et parabole)**.** *Les abscisses des points d'intersection, autres que l'origine, de la parabole $y = x^2$ et du cercle*

$$x^2 + y^2 + q\,x + (p-1)\,y = 0$$

sont les racines réelles de $x^3 + px + q = 0$.

Démonstration. En remplaçant y par x^2 : $x^2 + x^4 + qx + (p-1)x^2 = x\,(x^3 + px + q)$. □

7.6 Bilan

Degré	Centre	Formule par radicaux	Moyennes ⇔ réalité	Règle et compas
2	oui	$\mu_a \pm \sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$	oui	toujours
3	oui	Cardan (racines cubiques)	non	jamais (irréductible)
4	oui	Ferrari (via une cubique)	non	selon la résolvante
5	oui	aucune en général	non	jamais (irréductible)

Conclusion

Les racines d'un trinôme sont entièrement décrites par deux moyennes de ces racines : un centre, la moyenne arithmétique, et une demi-étendue $\sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$ qui est aussi $\sqrt{\mu_q^2 - \mu_a^2}$, d'où

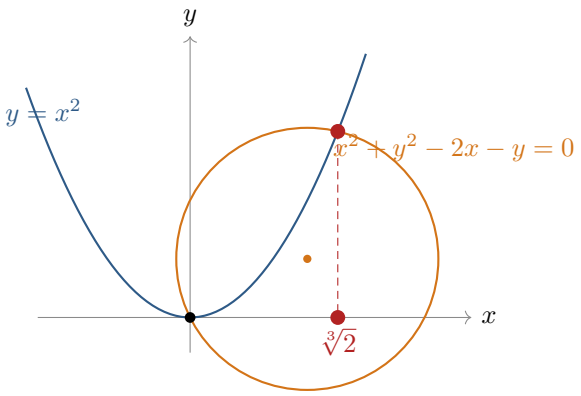


FIGURE 3 – La duplication du cube par Descartes : la parabole $y = x^2$ et le cercle $x^2 + y^2 - 2x - y = 0$ ($p = 0$, $q = -2$) se coupent, hors de l'origine, au point d'abscisse $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. Une conique est nécessaire : la règle et le compas ne suffisent pas.

la relation $\mu_a^2 = \frac{1}{2}(\mu_g^2 + \mu_q^2)$. Toutes ces grandeurs se lisent sur le demi-cercle de Pappus, et la résolution du trinôme devient une construction : une droite à la hauteur μ_g coupe, touche ou manque un demi-cercle de rayon μ_a, et dans le dernier cas un cercle de rayon μ_g construit les racines complexes. Le critère de constructibilité qui en découle est exact, mais il exprime une propriété propre au degré 2. En degré supérieur, le centre subsiste et les moyennes de Maclaurin prolongent la chaîne des inégalités, mais l'équivalence avec la réalité des racines, la formule « centre plus ou moins racine carrée » et la constructibilité générale disparaissent : il faut des racines cubiques, des coniques, et finalement la théorie de Galois.

Références

[1] N. H. Abel, *Mémoire sur les équations algébriques où l'on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, Christiania, 1824.

[2] G. Cardano, *Ars Magna*, Nuremberg, 1545.

[3] R. Descartes, *La Géométrie*, Leyde, 1637, livre III.

[4] Euclide, *Éléments*, livre VI, proposition 13.

[5] H. Genvrin, *Le grain des racines*, 2026.

[6] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.

[7] C. Maclaurin, « A second letter to Martin Folkes, Esq. ; concerning the roots of equations », *Philosophical Transactions* 36 (1729).

[8] I. Stewart, *Galois Theory*, 4e éd., CRC Press, 2015.

[9] P. L. Wantzel, « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 2 (1837), 366–372.