Axiomatique du grain

Construction détaillée du corps partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$
et de sa restriction $\mathbb{R}$

Hugues Genvrin

22 mai 2026

Table des matières

Introduction

Ce document propose une axiomatique fondée sur un procédé géométrique : une famille de cercles tangents en un point, parcourus par une trajectoire continue avec doublement d'angle. De ce procédé émergent successivement les multiplicités (finies et transfinies), les entiers $\mathbb{N}$, le continu linéaire, et finalement une structure de corps partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$ dont la restriction standard donne le corps $\mathbb{R}$.

L'idée directrice est que les nombres ne préexistent pas à la géométrie : ils sont des comptages, et la géométrie circulaire avec doublement d'angle offre le mécanisme générateur naturel.

Première partie

Axiomatique du grain

1 Primitives

(P1) **Plan euclidien.** Le plan $\mathbb{E}^2$ avec sa structure euclidienne ordinaire : distance, angles, droites, cercles. On fixe un point $O \in \mathbb{E}^2$ et une droite verticale Δ passant par O.

(P2) **Famille des cercles porteurs.** Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, le cercle C_k de centre $O_k = (-2^k\rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k\rho_0$, tangent à Δ en O. On fixe $\rho_0 = 1$.

(P3) **Trajectoire universelle.** Pour chaque $\theta_1 \in [0, 2\pi[$, la trajectoire γ_{θ_1} est la courbe continue qui, sur chaque cercle C_k, passe par le point d'angle $\theta_k = 2^{1-k}\theta_1$ depuis O_k. Le *flot universel* est la famille $\Gamma = \{\gamma_{\theta_1} : \theta_1 \in [0, 2\pi[\}$.

Sur C_1, le flot parcourt le cercle une fois. Sur C_0 ($\theta_0 = 2\theta_1$), il le parcourt deux fois. Sur C_{-1}, quatre fois. Etc. À l'inverse, sur C_2 ($\theta_2 = \theta_1/2$), il ne parcourt qu'un demi-cercle. Sur C_3, un quart. Etc.

(P4) **Symbole de niveau limite.** Le symbole $-n_\infty$, posé comme niveau idéal au-delà de tous les niveaux entiers négatifs : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-n_\infty < -n$.

Remarque 1. *Les primitives (P1)–(P3) sont entièrement géométriques. (P4) est le seul ingrédient idéal : on adjoint un niveau limite à $\mathbb{Z}$, comme on adjoindrait ∞ à $\mathbb{R}$ pour faire de l'analyse asymptotique. Tout le reste est dérivé.*

2 Niveaux, grains, résolutions

Définition 1 (Ensemble des niveaux)**.**

$$\mathcal{N} := \mathbb{Z} \cup \{-k \cdot n_\infty : k \in \mathbb{N}^*\},$$

muni de l'ordre étendant celui de $\mathbb{Z}$ par : pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $k \geq 1$, $-kn_\infty < n$, et $-kn_\infty < -jn_\infty$ ssi $k > j$.

Définition 2 (Grain)**.** *Un* grain *de niveau $\nu \in \mathcal{N}$ est une forme géométrique du plan de la forme :*

- *Si $\nu = k \in \mathbb{Z}$ avec $k \leq 1$: le cercle C_k tout entier, parcouru par le flot 2^{1-k} fois (donc 1 fois pour $k = 1$, 2 fois pour $k = 0$, 4 fois pour $k = -1$, etc.).*
- *Si $\nu = k \in \mathbb{Z}$ avec $k \geq 2$: un arc de C_k correspondant à un intervalle $[\theta, \theta'] \subset [0, 2\pi \cdot 2^{k-1}[$ — le flot ne couvre qu'une portion $1/2^{k-1}$ de C_k pour $\theta_1 \in [0, 2\pi[$.*
- *Si $\nu = -kn_\infty$ avec $k \geq 1$: un point géométrique recouvert, de C_1 atteint à la résolution limite $-kn_\infty$.*

On note $\mathcal{G}$ la classe des grains, $\mathcal{G}_\nu$ ceux de niveau ν, et $g_0 := C_1$ le grain initial *(niveau 1, multiplicité 1).*

Remarque 2 (Interprétation hiérarchique)**.** *Les niveaux* croissants *$(k \geq 2)$ correspondent à des grossissements croissants : on observe une portion de plus en plus restreinte d'un cercle de plus en plus grand. Les niveaux* décroissants *$(k \leq 0$, puis $-n_\infty$, $-2n_\infty$, $\ldots)$ correspondent à des résolutions de plus en plus fines à l'intérieur de la structure de C_1.*

Définition 3 (Inclusion et adjacence)**.** *$g_1 \subset_g g_2$ ssi le support de g_1 est inclus dans celui de g_2 (via projection par doublement d'angle si les niveaux diffèrent). Deux grains de même niveau sont* adjacents *s'ils sont distincts et leurs supports tangents.*

Définition 4 (Raffinement)**.** *Pour $g \in \mathcal{G}_\nu$ avec $\nu \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{F}(g)$ désigne la famille des grains de niveau $\nu - 1$ obtenus par le doublement d'angle, contenus dans g via $\subset_g$.*

Définition 5 (Multiplicité totale et position ordinale)**.** *Soit g un grain et $r \in \mathcal{N}$ une résolution avec $r \leq \nu(g)$.*

- *La* multiplicité totale *de g à la résolution r, notée $\mu(g, r)$, est le nombre de fois que le flot universel Γ recouvre un point générique de g observé à résolution r.*
- *Une* position ordinale *dans g à résolution r est l'index $i \in \{1, 2, \ldots, \mu(g, r)\}$ d'un passage particulier du flot.*

Définition 6 (Factorisation)**.** *Considérer différents niveaux d'observation à la résolution limite pour le déploiement du grain.*

3 Stratification de $\widetilde{\mathbb{N}}$

Définition 7 (Strates)**.** *Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$\widetilde{\mathbb{N}}_k := \{n : 1 \leq n \leq 2^{kn_\infty}\} \quad (\textit{avec } \widetilde{\mathbb{N}}_0 = \mathbb{N}).$$

*$\widetilde{\mathbb{N}}_k$ est l'ensemble des positions ordinales de passage du flot universel sur g_0 à la résolution $-kn_\infty$. L'*ensemble total *des multiplicités est*

$$\widetilde{\mathbb{N}} := \bigcup_{k \geq 0} \widetilde{\mathbb{N}}_k.$$

Remarque 3 (Filtration)**.** *On a une filtration croissante*

$$\mathbb{N} = \widetilde{\mathbb{N}}_0 \subset \widetilde{\mathbb{N}}_1 \subset \widetilde{\mathbb{N}}_2 \subset \cdots \subset \widetilde{\mathbb{N}}.$$

Chaque $\widetilde{\mathbb{N}}_k$ est totalement ordonné par l'ordre des positions de passage. n_∞ est un élément ordinaire de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$, situé entre les entiers finis et 2^{n_∞} ; kn_∞ est un élément ordinaire de $\widetilde{\mathbb{N}}_k$.

Définition 8 (Construction de $\mathbb{N}$)**.** $\mathbb{N} = \widetilde{\mathbb{N}}_0$ *est le plus petit sous-ensemble de $\widetilde{\mathbb{N}}$* contenant 1 *et clos par successeur, où le successeur de n est $n + 1$, défini par juxtaposition de grains adjacents.*

Définition 9 (Multiplication sur $\widetilde{\mathbb{N}}$)**.** *La multiplication $\cdot : \widetilde{\mathbb{N}} \times \widetilde{\mathbb{N}} \to \widetilde{\mathbb{N}}$ est définie par :*

- *Sur $\mathbb{N}$: multiplication ordinaire.*
- $2^a \cdot 2^b = 2^{a+b}$ *pour tout $a, b \in \widetilde{\mathbb{N}}$ (en particulier $2^{n_\infty} \cdot 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty}$).*
- *Distributivité par rapport à l'addition (juxtaposition de passages).*

Proposition 1 (Compatibilité avec la filtration)**.** *Pour tous $a, b \in \mathbb{N}$, $\widetilde{\mathbb{N}}_a \cdot \widetilde{\mathbb{N}}_b \subset \widetilde{\mathbb{N}}_{a+b}$.*

Démonstration. Soient $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_a$ et $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_b$. Par définition, $m \leq 2^{an_\infty}$ et $n \leq 2^{bn_\infty}$. Le produit mn vérifie alors $mn \leq 2^{an_\infty} \cdot 2^{bn_\infty}$. Par la définition 9, $2^{an_\infty} \cdot 2^{bn_\infty} = 2^{(a+b)n_\infty}$, donc $mn \leq 2^{(a+b)n_\infty}$, c'est-à-dire $mn \in \widetilde{\mathbb{N}}_{a+b}$. □

4 Axiomes

Trois axiomes seulement sont irréductibles : tout le reste se déduit du procédé géométrique.

Axiome 1 (Existence des résolutions limites)**.** *Pour tout* $k \in \mathbb{N}^*$*, la résolution* $-kn_\infty$ *est atteinte par le flot universel : il existe des grains de niveau* $-kn_\infty$ *(qui sont des points géométriques de* C_1*), et la multiplicité totale de* g_0 *à cette résolution vaut* $\mu(g_0, -kn_\infty) = 2^{kn_\infty}$*.*

Axiome 2 (Stratification stricte)**.** *Pour tous* $k \neq j$*,* $\widetilde{\mathbb{N}}_k \neq \widetilde{\mathbb{N}}_j$ *; en particulier* $2^{kn_\infty} \neq 2^{jn_\infty}$ *(non-idempotence cardinale, type B).*

Axiome 3 (Ordre)**.** $\widetilde{\mathbb{N}}$ *est totalement ordonné, étendant l'ordre de* $\mathbb{N}$*, et tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $k \geq 1$ *:*

$$n < n_\infty < 2^{n_\infty} < 2 \cdot 2^{n_\infty} < \cdots < 2^{2n_\infty} < \cdots$$

5 Théorèmes fondamentaux

Théorème 1 (Existence du grain initial)**.** $g_0 = C_1$ *est un grain de niveau* 1*, multiplicité* 1 *à sa résolution canonique.*

Démonstration. Par la définition 2, un grain de niveau 1 est le cercle C_k avec $k = 1$ tout entier, parcouru $2^{1-1} = 2^0 = 1$ fois par le flot. Donc $g_0 = C_1$ est bien un grain de niveau 1, et sa multiplicité (nombre de passages du flot par un point générique) vaut exactement 1. □

Théorème 2 (Doublement de multiplicité par raffinement)**.** *Pour tout* g *de niveau* $\nu(g) \in \mathbb{Z}$*,* $\nu(g) \leq 1$*, et tout* $g' \in \mathcal{F}(g)$ *(donc* $\nu(g') = \nu(g) - 1$*), on a* $\mu(g') = 2\mu(g)$*.*

Démonstration. Soit g un grain de niveau $k \leq 1$. Par la définition 2, g est un cercle C_k parcouru 2^{1-k} fois par le flot. Considérons $g' \in \mathcal{F}(g)$: c'est un grain de niveau $k-1$, donc C_{k-1} parcouru $2^{1-(k-1)} = 2^{2-k} = 2 \cdot 2^{1-k}$ fois.

La multiplicité d'un grain est le nombre de passages du flot par un point générique. Sur C_k, le flot effectue 2^{1-k} passages pour $\theta_1 \in [0, 2\pi[$; sur C_{k-1}, $2 \cdot 2^{1-k}$ passages pour le même intervalle de θ_1. Donc $\mu(g') = 2 \cdot 2^{1-k} = 2\mu(g)$. □

Théorème 3 (Transitivité et compatibilité aux niveaux)**.** $\subset_g$ *est transitif, et* $g_1 \subset_g g_2 \implies \nu(g_1) \leq \nu(g_2)$*.*

Démonstration. Transitivité. Si $g_1 \subset_g g_2$ et $g_2 \subset_g g_3$, alors par définition le support de g_1 est inclus dans celui de g_2 via projection, et celui de g_2 est inclus dans celui de g_3 via projection. La composition de deux projections par doublement d'angle est encore une projection par doublement d'angle (itéré). Donc le support de g_1 est inclus dans celui de g_3 via projection, c'est-à-dire $g_1 \subset_g g_3$.

Compatibilité. Si $g_1 \subset_g g_2$ avec $\nu(g_1) > \nu(g_2)$, alors le support de g_1 serait sur un cercle $C_{\nu(g_1)}$ plus profondément raffiné que $C_{\nu(g_2)}$, mais devrait être inclus dans celui de g_2. La projection par doublement d'angle va dans le sens inverse : elle envoie un niveau plus fin vers un niveau plus grossier. L'inclusion $g_1 \subset_g g_2$ exige donc $\nu(g_1) \leq \nu(g_2)$. □

Théorème 4 (Limite des raffinements)**.** *La suite* $(\mathcal{F}^n(g_0))_{n \in \mathbb{N}}$ *admet pour limite un grain* g_∞ *de niveau* $-n_\infty$ *avec* $\mu(g_\infty) = 2^{n_\infty}$ *et* $g_\infty \subset_g \mathcal{F}^n(g_0)$ *pour tout* n*.*

Démonstration. Par le théorème 2, $\mathcal{F}^n(g_0)$ a multiplicité 2^n et niveau $1 - n$. Quand n parcourt $\mathbb{N}$, le niveau $1 - n$ descend vers $-\infty$ dans $\mathbb{Z}$, mais l'axiome 1 garantit l'existence d'un niveau limite $-n_\infty$ strictement plus profond que tous les niveaux entiers négatifs. À ce niveau limite, la multiplicité est 2^{n_∞} (axiome 1). L'inclusion $g_\infty \subset_g \mathcal{F}^n(g_0)$ pour tout n traduit le fait que $-n_\infty < 1 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la compatibilité aux niveaux. □

Théorème 5 (Comparaisons fondamentales)**.** *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \geq 1$: $n < n_\infty$ et $kn_\infty < 2^{kn_\infty}$.*

Démonstration. Première inégalité. Directement de l'axiome 3.

Seconde inégalité. On procède en deux étapes.

Étape 1 : à toute résolution finie $-m$ avec $m \in \mathbb{N}$, on a $m < 2^m$. C'est l'inégalité élémentaire $m < 2^m$ valable pour tout $m \geq 1$ dans $\mathbb{N}$ (preuve par récurrence : vrai pour $m = 1$ car $1 < 2$; et si $m < 2^m$, alors $m + 1 \leq m + m = 2m < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1}$).

Étape 2 : passage à la limite. L'axiome 2 garantit que les strates sont strictement distinctes ; en particulier, à la résolution $-n_\infty$, la position ordinale du dernier niveau d'observation (à savoir n_∞ lui-même, par l'axiome 3) reste strictement inférieure à la multiplicité totale 2^{n_∞}. Pour k général, on applique le même argument à la résolution $-kn_\infty$: la position ordinale $kn_\infty \in \widetilde{\mathbb{N}}_k$ est strictement inférieure à 2^{kn_∞}, qui borne la strate. □

Deuxième partie
Arithmétique des positions

6 Vue d'ensemble

Cette partie comble une dette technique de la suite : la multiplication sur les positions de $\widetilde{\mathbb{R}}$ y est utilisée comme s'il s'agissait de la multiplication réelle ordinaire, sans justification.

L'enjeu est de montrer que la multiplication des positions a un *fondement géométrique* : elle est l'image, via un isomorphisme d'anneaux, de la multiplication binaire des écritures lexicales à n_∞ chiffres après la virgule. La structure d'ordre, d'addition et de multiplication sur C_1 à résolution $-n_\infty$ provient alors entièrement de la combinatoire des mots binaires de longueur n_∞, elle-même héritée de $\mathbb{N}$.

L'outil central est une *homothétie de normalisation* $h_O^{1/(2\pi)} : C_1 \to C_1'$ qui envoie le cercle de référence sur un cercle de circonférence unité, où la correspondance entre positions géométriques et écritures binaires est immédiate.

7 Le cercle normalisé C_1'

Définition 10 (Homothétie de normalisation)**.** *Soit $h := h_O^{1/(2\pi)}$ l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{2\pi}$. On pose*

$$C_1' := h(C_1).$$

C_1' est un cercle de centre $O_1' = h(O_1)$, tangent à Δ en O (car h fixe O et préserve les tangences), et de circonférence 1 (puisque C_1 a circonférence 2π et h multiplie les longueurs par $\frac{1}{2\pi}$).

Proposition 2 (Préservation de l'ordre)**.** *L'homothétie h est une bijection $C_1 \to C_1'$ qui préserve l'ordre des positions sur le cercle (au sens de l'orientation héritée du flot universel).*

Démonstration. Une homothétie de rapport positif est une bijection continue qui préserve l'orientation. Si $\theta \mapsto P_\theta$ est le paramétrage de C_1 par l'angle au centre, alors $\theta \mapsto h(P_\theta)$ paramètre C_1' par le même angle (au centre O_1'), avec la même orientation. La relation $P_\theta < P_{\theta'}$ (au sens du flot) se traduit en $\theta < \theta'$, donc en $h(P_\theta) < h(P_{\theta'})$ sur C_1'. □

Remarque 4. *Le flot universel sur C_1' est défini par transport via h : si γ_{θ_1} traverse C_1 au point P_{θ_1}, alors elle traverse C_1' au point $h(P_{\theta_1})$. La résolution limite reste la même : $-n_\infty$, avec 2^{n_∞} recouvrements de chaque point de C_1'. On note $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ les grains de C_1' à cette résolution :*

$$\mathcal{G}'_{-n_\infty} = \{g'^k_{-n_\infty} : k \in \widetilde{\mathbb{N}}_1\}.$$

8 Écritures lexicales binaires

Définition 11 (Mots binaires de longueur n_∞). *Un* mot binaire de longueur n_∞ *est une suite* $c = (c_1, c_2, \dots, c_{n_\infty})$ *avec* $c_j \in \{0, 1\}$ *pour tout* $j \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$ *avec* $j \leq n_\infty$*. On note* $\mathcal{B}_{n_\infty}$ *l'ensemble de ces mots.*

Proposition 3 (Cardinal). $|\mathcal{B}_{n_\infty}| = 2^{n_\infty}$.

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ fini, $|\mathcal{B}_n| = 2^n$: à chaque chiffre c_j correspondent deux choix indépendants, et il y a n chiffres, donc 2^n mots par dénombrement standard. Cette identité passe à la limite par définition même de 2^{n_∞} comme multiplicité totale à la résolution $-n_\infty$ (axiome 1) : le nombre de mots binaires de longueur n_∞ est précisément $\mu(g_0, -n_\infty) = 2^{n_\infty}$. □

Définition 12 (Écriture lexicale). *À chaque mot* $c \in \mathcal{B}_{n_\infty}$ *on associe l'*écriture lexicale

$$b(c) := 0, c_1 c_2 \dots c_{n_\infty} \quad \textit{(en base 2).}$$

Formellement, $b(c)$ *est un symbole dans* $[0, 1[$ *représentant la position ordinale du mot* c *dans l'ordre lexicographique. On notera* b^k *le* k*-ième mot dans cet ordre,* $k \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$*.*

Définition 13 (Ordre lexicographique). *Pour deux mots* $c, c' \in \mathcal{B}_{n_\infty}$*, on dit que* $c <_{lex} c'$ *ssi il existe* $j_0 \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$ *avec* $j_0 \leq n_\infty$ *tel que* $c_j = c'_j$ *pour tout* $j < j_0$ *et* $c_{j_0} < c'_{j_0}$ *(c'est-à-dire* $c_{j_0} = 0$ *et* $c'_{j_0} = 1$*).*

Proposition 4 (Ordre total). $(\mathcal{B}_{n_\infty}, <_{lex})$ *est totalement ordonné, et la correspondance* $k \leftrightarrow b^k$ *est un isomorphisme d'ordre avec* $\widetilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$*.*

Démonstration. Antisymétrie. Si $c <_{\text{lex}} c'$ avec rang j_0, alors $c_{j_0} = 0 < 1 = c'_{j_0}$, donc on ne peut avoir $c' <_{\text{lex}} c$ (qui exigerait $c'_{j'_0} < c_{j'_0}$ pour un certain j'_0 ; si $j'_0 < j_0$, on aurait $c_j = c'_j$ pour $j < j_0$, donc $c_{j'_0} = c'_{j'_0}$, contradiction ; si $j'_0 = j_0$, on aurait $c'_{j_0} < c_{j_0}$, contredisant $c_{j_0} < c'_{j_0}$; si $j'_0 > j_0$, on aurait $c_{j_0} = c'_{j_0}$ par hypothèse de $<_{\text{lex}}$ avec rang j'_0, contredisant $c_{j_0} \neq c'_{j_0}$).

Transitivité. Si $c <_{\text{lex}} c'$ avec rang j_0 et $c' <_{\text{lex}} c''$ avec rang j'_0, soit $j''_0 = \min(j_0, j'_0)$. Pour $j < j''_0$, $c_j = c'_j = c''_j$. Si $j_0 < j'_0$, alors $c_{j_0} = 0$ et $c'_{j_0} = 1 = c''_{j_0}$ (puisque $j_0 < j'_0$ donc $c'_{j_0} = c''_{j_0}$), donc $c_{j_0} < c''_{j_0}$. Si $j_0 = j'_0$, alors $c_{j_0} = 0 < 1 = c''_{j_0}$. Si $j_0 > j'_0$, alors $c_{j'_0} = c'_{j'_0} = 0$ et $c''_{j'_0} = 1$, donc $c_{j'_0} < c''_{j'_0}$. Dans tous les cas, $c <_{\text{lex}} c''$.

Totalité. Pour deux mots distincts c, c', soit j_0 le plus petit indice où ils diffèrent (il existe car les mots sont distincts). Alors $c_{j_0} = 0, c'_{j_0} = 1$ ou inversement. Dans le premier cas $c <_{\text{lex}} c'$, dans le second $c' <_{\text{lex}} c$.

Isomorphisme avec $\widetilde{\mathbb{N}}_1$. L'ordre lexicographique sur $\mathcal{B}_{n_\infty}$ est un ordre total sur un ensemble de cardinal 2^{n_∞} (proposition 3). Tout ordre total sur un ensemble de cardinal 2^{n_∞} se met en bijection préservant l'ordre avec $\widetilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \dots, 2^{n_\infty}\}$ par énumération : on associe à c son rang dans l'ordre lexicographique. □

9 Isomorphisme d'ordre lexical ↔ géométrique

Définition 14 (Correspondance position-mot). *On définit* $\varphi : \mathcal{B}_{n_\infty} \to \mathcal{G}'_{-n_\infty}$ *par*

$$\varphi(b^k) := g'^k_{-n_\infty},$$

où b^k *est le* k*-ième mot dans l'ordre lexicographique et* $g'^k_{-n_\infty}$ *est le* k*-ième grain dans l'ordre géométrique du flot sur* C'_1*.*

Théorème 6 (Isomorphisme d'ordre). φ *est une bijection préservant l'ordre :*

$$b^k <_{lex} b^{k'} \iff g'^k_{-n_\infty} <_{géom} g'^{k'}_{-n_\infty}.$$

Démonstration. Bijection. L'ensemble $\mathcal{B}_{n_\infty}$ est en bijection avec $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ par la proposition 4. L'ensemble $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ est aussi en bijection avec $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ par construction (axiome 1 : $\mu(g'_0, -n_\infty) = 2^{n_\infty}$, donc $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$ a 2^{n_∞} éléments). La correspondance φ composée de ces deux bijections (par leur indexation commune k) est elle-même une bijection.

Préservation de l'ordre. Par construction, $b^k <_{\text{lex}} b^{k'}$ ssi $k < k'$ dans $\widetilde{\mathbb{N}}_1$; et $g'^{k}_{-n_\infty} <_{\text{géom}} g'^{k'}_{-n_\infty}$ ssi $k < k'$ dans $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ également. Les deux conditions sont équivalentes. $\square$

10 Opérations lexicales

Définition 15 (Addition lexicale)**.** *Pour $b^{k_1}, b^{k_2} \in \mathcal{B}_{n_\infty}$ identifiés à leurs écritures binaires dans $[0, 1[$,*

$$b^{k_1} + b^{k_2} := \textit{addition binaire avec retenue, modulo } 1.$$

Plus précisément : si l'addition binaire des écritures donne un résultat ≥ 1, on retient un tour entier de cercle et on garde la partie fractionnaire ; sinon on garde le résultat tel quel.

Définition 16 (Multiplication lexicale)**.** *Pour $b^{k_1}, b^{k_2} \in \mathcal{B}_{n_\infty}$,*

$$b^{k_1} \times b^{k_2} := \textit{multiplication binaire ordinaire.}$$

Le résultat est un mot binaire de longueur $\leq 2n_\infty$ chiffres après la virgule, donc un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$, indexé par $\widetilde{\mathbb{N}}_2$.

Remarque 5 (Sortie de strate)**.** *La multiplication lexicale fait* sortir *de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ pour entrer dans $\widetilde{\mathbb{N}}_2$. C'est la traduction lexicale de la proposition 1 pour $a = b = 1$, et c'est ce qui justifie le besoin d'un déploiement à la résolution $-2n_\infty$ pour représenter le résultat d'un produit de positions. On prend la factorisation $(\ell = 2\pi, |\mathcal{G}_{-2n_\infty}| = 2^{2n_\infty})$.*

Proposition 5 (Propriétés algébriques des opérations lexicales)**.** $(\mathcal{B}_{n_\infty}, +, \times)$ *vérifie :*

1. *$+$ est commutative, associative, avec neutre $b^0 = 0,00\ldots0$;*
2. *chaque élément $b^k \neq 0$ admet un opposé $-b^k$ tel que $b^k + (-b^k) = 0$ (modulo 1) ;*
3. *$\times$ est commutative et associative, avec neutre $b^* = 1,00\ldots0$ (qui sort en réalité de $\mathcal{B}_{n_\infty}$ mais agit comme neutre par convention) ;*
4. *$\times$ est distributive sur $+$.*

Démonstration. Ces propriétés sont des conséquences directes de la structure de $\mathbb{N}$ et de la définition des opérations binaires. Plus précisément :

Commutativité de $+$. L'addition binaire avec retenue est commutative car elle peut être réalisée par n'importe quel ordre des opérandes (la retenue propagée ne dépend que des sommes locales $c_j + c'_j$, qui sont commutatives dans $\mathbb{N}$).

Associativité de $+$. L'addition binaire est associative dans $\mathbb{N}$; le passage modulo 1 préserve l'associativité car $(a + b) \mod 1$ et $a + (b \mod 1)$ donnent le même résultat modulo 1.

Neutre additif. $b^0 + b^k$: aucune retenue, le résultat est b^k.

Opposé. Pour $b^k \neq 0$, $-b^k := b^{2^{n_\infty}-k}$, et on vérifie que $b^k + b^{2^{n_\infty}-k} = b^0$ modulo 1 (la somme fait exactement 1).

Commutativité et associativité de $\times$, distributivité. Héritées de la multiplication des entiers binaires non négatifs : pour b^{k_1}, b^{k_2} vus comme entiers binaires (de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$), le produit lexical est le produit dans $\widetilde{\mathbb{N}}_2$, qui vérifie ces propriétés héritées de $\mathbb{N}$.

Neutre multiplicatif. Le neutre b^* correspond à l'entier 1 de $\widetilde{\mathbb{N}}$, qui sort de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ vu comme fraction (puisque $b^* = 1 \geq 1$), mais agit bien comme neutre dans le sens où $b^* \times b^k = b^k$ pour tout b^k. $\square$

11 Transport vers la géométrie

Théorème 7 (Isomorphisme additif)**.** *La correspondance φ transporte l'addition lexicale vers l'addition géométrique sur $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$:*

$$\varphi(b^{k_1} + b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1}) \oplus \varphi(b^{k_2}),$$

où $\oplus$ est l'addition modulaire sur le cercle C'_1 (de circonférence 1).

Démonstration. Considérons les deux ensembles $\mathcal{B}_{n_\infty}$ et $\mathcal{G}'_{-n_\infty}$, tous deux indexés par $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ via leur ordre respectif.

Du côté lexical, l'addition + est définie comme addition binaire modulo 1 (définition 15). Vue comme opération sur les indices : $b^{k_1} + b^{k_2} = b^{k_1+k_2 \mod 2^{n_\infty}}$.

Du côté géométrique, $\oplus$ est l'addition modulaire sur C'_1, c'est-à-dire la translation circulaire. Si on indexe les grains $g'^k_{-n_\infty}$ par leur position ordinale $k \in \widetilde{\mathbb{N}}_1$, alors la translation de g'^k par $g'^{k'}$ produit $g'^{k+k' \mod 2^{n_\infty}}$.

Donc $\varphi(b^{k_1} + b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1+k_2 \mod 2^{n_\infty}}) = g'^{k_1+k_2 \mod 2^{n_\infty}}_{-n_\infty}$, et de même $\varphi(b^{k_1}) \oplus \varphi(b^{k_2}) = g'^{k_1}_{-n_\infty} \oplus g'^{k_2}_{-n_\infty} = g'^{k_1+k_2 \mod 2^{n_\infty}}_{-n_\infty}$. Les deux côtés sont égaux. □

Théorème 8 (Isomorphisme multiplicatif partiel)**.** *La correspondance φ se prolonge en un isomorphisme multiplicatif vers $\mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ (grains de C'_1 à résolution $-2n_\infty$). Plus précisément, il existe $\varphi_2 : \mathcal{B}_{2n_\infty} \to \mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ étendant φ, telle que*

$$\varphi_2(b^{k_1} \times b^{k_2}) = \varphi(b^{k_1}) \odot \varphi(b^{k_2}),$$

où $\odot$ désigne la multiplication géométrique des grains, définie par transport.

Démonstration. Existence de φ_2. On applique la construction du théorème 6 en remplaçant n_∞ par $2n_\infty$: $\mathcal{B}_{2n_\infty}$ a 2^{2n_∞} éléments (par récurrence du même argument que la proposition 3), de même que $\mathcal{G}'_{-2n_\infty}$ par l'axiome 1. L'indexation commune par $\widetilde{\mathbb{N}}_2$ donne la bijection φ_2.

Extension de φ. Pour $b^k \in \mathcal{B}_{n_\infty}$, on identifie b^k à un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$ en complétant son écriture par n_∞ zéros à droite. Alors $\varphi_2(b^k) = \varphi(b^k)$, en convenant que tout grain $g'^k_{-n_\infty}$ s'identifie au grain de résolution plus fine qui en occupe la première sous-position.

Transport de la multiplication. La multiplication lexicale $b^{k_1} \times b^{k_2}$ donne par définition un élément de $\mathcal{B}_{2n_\infty}$ (remarque 5). On définit $\odot$ comme image de cette multiplication par φ_2 :

$$\varphi(b^{k_1}) \odot \varphi(b^{k_2}) := \varphi_2(b^{k_1} \times b^{k_2}).$$

L'équation du théorème est alors une définition. Elle est cohérente car φ_2 est une bijection préservant l'ordre, et la multiplication lexicale hérite ses propriétés (commutativité, associativité, distributivité sur l'addition) de la proposition 5. □

12 Retour à C_1 : épaississement et arithmétique des positions

L'homothétie réciproque $h^{-1} = h_O^{2\pi}$ envoie C'_1 sur C_1, et *épaissit* chaque grain $g'^k_{-n_\infty}$ par un facteur 2π :

$$g^k_{-n_\infty} = 2\pi \cdot g'^k_{-n_\infty}.$$

Définition 17 (Position épaissie)**.** *À chaque écriture lexicale $b^k \in [0, 1[$ on associe une* position *sur C_1 :*

$$x^k := 2\pi \cdot b^k \in [0, 2\pi[.$$

La correspondance $b^k \leftrightarrow x^k$ est l'homothétie de rapport 2π appliquée aux écritures lexicales.

Remarque 6 (Interpolation interne dans un grain de C_1). *Chaque grain $g^k_{-n_\infty}$ de C_1 a une « épaisseur » 2π fois plus grande que son homologue $g'^k_{-n_\infty}$ sur C'_1. À l'intérieur de chaque grain $g^k_{-n_\infty}$, on peut donc intercaler des positions intermédiaires b^ℓ_k d'épaisseur $\frac{1}{2\pi} \cdot g_{-n_\infty}$ — ce qui revient à descendre d'un cran de résolution, vers $-2n_\infty$.*

Théorème 9 (Multiplication par un scalaire = homothétie). *Soit $\lambda > 0$ un nombre réel standard (au sens de la Définition 26 de la Partie IV). La multiplication d'une position $x \in C_1$ par λ correspond à l'homothétie h^λ_O :*

$$\lambda \cdot x = h^\lambda_O(x).$$

Cette opération préserve la structure d'ordre des positions et change uniformément l'épaisseur des grains par un facteur λ.

Démonstration. Cas $\lambda = 2\pi$. Direct par définition de $x^k = 2\pi \cdot b^k$. La position b^k sur C'_1 (de circonférence 1) devient $x^k = 2\pi b^k$ sur C_1 (de circonférence 2π), ce qui est précisément l'effet de l'homothétie $h^{2\pi}_O$.

Cas λ dyadique fini. Soit $\lambda = m/2^n$ avec $m, n \in \mathbb{N}$. La multiplication par λ se décompose en : multiplication par m (juxtaposition de m copies, ce qui correspond à une dilatation entière), puis division par 2^n (raffinement de n niveaux, ce qui correspond à une homothétie de rapport $1/2^n$). Chaque opération élémentaire correspond à une homothétie ; leur composition est l'homothétie h^λ_O.

Cas λ standard général. Tout λ standard s'approche arbitrairement près par des dyadiques finis dans $\mathbb{R}$. La continuité de l'homothétie (par rapport à son rapport) et la continuité de la multiplication sur $\mathbb{R}$ (qu'on établira en Partie IV) assurent le passage à la limite : pour toute suite (λ_n) dyadique tendant vers λ, on a $\lambda_n \cdot x \to \lambda \cdot x$ et $h^{\lambda_n}_O(x) \to h^\lambda_O(x)$, donc $\lambda \cdot x = h^\lambda_O(x)$.

Préservation de l'ordre. L'homothétie de rapport positif préserve l'orientation, donc l'ordre des positions sur le cercle (idem proposition 2).

Changement d'épaisseur. L'homothétie de rapport λ multiplie toutes les longueurs par λ, donc l'épaisseur de chaque grain est multipliée uniformément par λ. □

Corollaire 1 (Invariance de la multiplication modulo épaisseur). *La multiplication des positions est un invariant modulo le changement d'épaisseur du grain : pour toutes positions x, y et tout scalaire $\lambda > 0$ standard,*

$$h^\lambda_O(x \cdot y) = \lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y).$$

Autrement dit, la structure multiplicative commute avec les homothéties au sens où celles-ci agissent par multiplication scalaire.

Démonstration. La première égalité est le théorème 9 appliqué à $x \cdot y$. La deuxième est l'associativité de la multiplication : $\lambda \cdot (x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y$ par associativité, et $= x \cdot (\lambda y)$ par associativité-commutativité. □

13 Synthèse de l'arithmétique des positions

— **Fondement combinatoire.** La multiplication des positions sur C_1 n'est pas posée *ad hoc* : elle dérive de la multiplication binaire des écritures lexicales de longueur n_∞, elle-même héritée de $\mathbb{N}$.

— **Rôle de l'homothétie.** L'homothétie $h^{1/(2\pi)}_O$ normalise la circonférence à 1, ce qui rend l'isomorphisme avec les écritures binaires immédiat. L'homothétie réciproque $h^{2\pi}_O$ revient au cercle C_1 et donne le facteur d'échelle 2π entre arithmétique lexicale et arithmétique des positions.

— **Sortie de strate.** La multiplication *sort* nécessairement de $\widetilde{\mathbb{N}}_1$ pour atteindre $\widetilde{\mathbb{N}}_2$. C'est l'origine combinatoire du besoin du déploiement à résolution $-2n_\infty$ pour la construction du corps partiel.

— **Multiplication scalaire = homothétie.** La multiplication par un scalaire λ correspond à l'homothétie de rapport λ, ce qui donne un sens géométrique précis à la multiplication arbitraire : c'est un changement d'épaisseur uniforme.

Troisième partie

Construction du corps partiel $\widetilde{\mathbb{R}}$

14 Le cercle C_1 à résolution $-n_\infty$

Remarque 7 (Multiplicité sans déploiement). *À la résolution $-n_\infty$, le flot universel sur C_1 effectue 2^{n_∞} passages* — mais sur le même cercle C_1 de longueur 2π. *Le support géométrique reste C_1 ; ce qui change, c'est le* comptage *interne des passages.*

Théorème 10 (Structure additive du cercle C_1 à résolution $-n_\infty$). *L'ensemble des grains $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ (points géométriques de C_1), muni de l'addition $\oplus$ héritée de l'addition modulaire sur $[0, 2\pi[$, forme un groupe abélien :*

$$(\mathcal{G}_{-n_\infty}, \oplus) \cong (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, +).$$

Démonstration. Par l'isomorphisme φ du théorème 7, transporté de C_1' à C_1 via l'homothétie $h^{-1} = h_O^{2\pi}$: la structure additive sur $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ est l'image de la structure additive lexicale $(\mathcal{B}_{n_\infty}, +)$, qui est un groupe abélien (proposition 5). L'isomorphisme avec $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ provient du fait que les écritures lexicales binaires forment une approximation de $[0, 1[$ à résolution $1/2^{n_\infty}$, multipliée par 2π pour obtenir $[0, 2\pi[$. □

15 Droite réelle déployée positive $\widetilde{\mathbb{R}}^+$

Définition 18 (Déploiement à résolution $-2n_\infty$). *Le* déploiement *de C_1 à la résolution $-2n_\infty$ consiste à distribuer chaque point de C_1 (parmi les 2^{n_∞} positions ordinales à résolution $-n_\infty$) en 2^{n_∞} sous-positions distinctes à résolution $-2n_\infty$, mises bout à bout sur une droite. La* longueur déployée *est alors :*

$$\mathcal{L} = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}.$$

Définition 19 ($\widetilde{\mathbb{R}}^+$). *$\widetilde{\mathbb{R}}^+$ est l'ensemble des positions*

$$X = (N - 1) \cdot 2\pi + x$$

avec $x \in [0, 2\pi[$ et $N \in \widetilde{\mathbb{N}}_1 = \{1, \ldots, 2^{n_\infty}\}$. C'est le segment $[0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$, vu comme déploiement de C_1 à la résolution $-2n_\infty$.

Définition 20 (Addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$). *Soient $X_1 = (N_1 - 1) \cdot 2\pi + x_1$ et $X_2 = (N_2 - 1) \cdot 2\pi + x_2$ deux éléments de $\widetilde{\mathbb{R}}^+$.*

— *Si $x_1 + x_2 < 2\pi$: $X_1 + X_2 := (N_1 + N_2 - 2) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$.*

— *Si $x_1 + x_2 \geq 2\pi$: $X_1 + X_2 := (N_1 + N_2 - 1) \cdot 2\pi + (x_1 + x_2 - 2\pi)$.*

L'addition est définie ssi le résultat reste dans $[0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$.

15.1 Compatibilité cercle / droite

Définition 21 (Projection). $\pi : \widetilde{\mathbb{R}}^+ \to \mathcal{G}_{-n_\infty}$, $X = (N-1)\cdot 2\pi + x \mapsto g$ *tel que* $\theta_1(g) = x$.

C'est la projection naturelle du déploiement vers le cercle C_1 *: on « rembobine » le déploiement modulo* 2π*.*

Théorème 11 (Morphisme partiel). *Pour tous* $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^+$ *tels que* $X_1 + X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}^+$,

$$\pi(X_1 + X_2) = \pi(X_1) \oplus \pi(X_2),$$

où $\oplus$ *est l'addition sur le cercle* C_1*.*

Démonstration. Écrivons $X_i = (N_i - 1)\cdot 2\pi + x_i$ avec $x_i \in [0, 2\pi[$. Alors $\pi(X_i) = g_{x_i}$ (le grain de C_1 à l'angle x_i).

Cas $x_1 + x_2 < 2\pi$. Par la définition 20, $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 2)\cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$, donc $\pi(X_1 + X_2) = g_{x_1+x_2}$ (puisque $x_1 + x_2 \in [0, 2\pi[$). Du côté du cercle, $\pi(X_1) \oplus \pi(X_2) = g_{x_1} \oplus g_{x_2} = g_{x_1+x_2 \mod 2\pi} = g_{x_1+x_2}$ (car $x_1 + x_2 < 2\pi$). Les deux côtés sont égaux.

Cas $x_1 + x_2 \geq 2\pi$. $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 1)\cdot 2\pi + (x_1 + x_2 - 2\pi)$, et $x_1 + x_2 - 2\pi \in [0, 2\pi[$, donc $\pi(X_1 + X_2) = g_{x_1+x_2-2\pi}$. Du côté du cercle, $g_{x_1} \oplus g_{x_2} = g_{(x_1+x_2) \mod 2\pi} = g_{x_1+x_2-2\pi}$. Les deux côtés sont égaux. □

16 Symétrisation : la droite $\widetilde{\mathbb{R}}$

Définition 22 ($\widetilde{\mathbb{R}}$). $\widetilde{\mathbb{R}}$ *est l'ensemble des couples* (σ, X) *avec* $\sigma \in \{+, -\}$ *et* $X \in [0, 2\pi \cdot 2^{n_\infty}[$, *modulo* $(+, 0) \sim (-, 0)$*. On note* X *pour* $(+, X)$ *et* $-X$ *pour* $(-, X)$*.*

Définition 23 (Addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}$). *Soient* $X_1, X_2 \in \widetilde{\mathbb{R}}$*.*

- Cas $(++)$: $X_1, X_2 \geq 0$. $X_1 + X_2$ *est l'addition sur* $\widetilde{\mathbb{R}}^+$*.*
- Cas $(--)$: $X_1, X_2 \leq 0$. *Posant* $X_i = -Y_i$ *avec* $Y_i \geq 0$, $X_1 + X_2 := -(Y_1 + Y_2)$*.*
- Cas mixtes $(+-)$ et $(-+)$: *si* $|X_1| > |X_2|$, $X_1 + X_2$ *a le signe de* X_1 *et valeur absolue* $|X_1| - |X_2|$ *; symétriquement si* $|X_2| > |X_1|$ *; et* $X_1 + X_2 = 0$ *si* $|X_1| = |X_2|$*.*

17 Structure additive : groupe abélien partiel

Proposition 6 (Élément neutre). *Pour tout* $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$, $X + 0 = 0 + X = X$*.*

Démonstration. Si $X \geq 0$: on est dans le cas $(++)$ avec $X_2 = 0 = (1-1)\cdot 2\pi + 0$, donc $N_2 = 1$ et $x_2 = 0$. Alors $x_1 + 0 = x_1 < 2\pi$ (par hypothèse), donc $X + 0 = (N_1 + 1 - 2)\cdot 2\pi + (x_1 + 0) = (N_1 - 1)\cdot 2\pi + x_1 = X$. Si $X < 0$: par symétrie via le cas $(--)$, $X + 0 = -(|X| + 0) = -|X| = X$. La commutativité (établie ci-dessous) donne $0 + X = X + 0 = X$. □

Proposition 7 (Opposé). *Pour tout* $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$*, il existe* $-X \in \widetilde{\mathbb{R}}$ *tel que* $X + (-X) = 0$*.*

Démonstration. Si $X = (+, |X|)$, on pose $-X := (-, |X|)$. Si $X = (-, |X|)$, on pose $-X := (+, |X|)$. Dans les deux cas, X et $-X$ ont signes opposés et même valeur absolue. Par la définition 23, cas mixte avec $|X| = |-X|$, on obtient $X + (-X) = 0$. □

Proposition 8 (Commutativité). *Pour tous* $X, Y \in \widetilde{\mathbb{R}}$ *tels que* $X + Y$ *et* $Y + X$ *sont définis,* $X + Y = Y + X$*.*

Démonstration. Cas $(++)$. Pour $X_1, X_2 \geq 0$, écrivons $X_i = (N_i - 1)\cdot 2\pi + x_i$. La définition 20 est symétrique en (N_1, x_1) et (N_2, x_2) : si $x_1 + x_2 < 2\pi$, $X_1 + X_2 = (N_1 + N_2 - 2)\cdot 2\pi + (x_1 + x_2)$; et $X_2 + X_1 = (N_2 + N_1 - 2)\cdot 2\pi + (x_2 + x_1)$, qui est la même chose par commutativité de l'addition sur $\mathbb{N}$ et sur $[0, 2\pi[$. Le cas $x_1 + x_2 \geq 2\pi$ est traité de manière analogue.

Cas $(--)$. Symétrie via l'opposé : $X+Y=-((-X)+(-Y))=-((-Y)+(-X))=Y+X$.

Cas mixtes. La définition est symétrique : on compare $|X_1|$ et $|X_2|$ et on prend le signe du plus grand. L'inversion de l'ordre $(X_1,X_2)\to(X_2,X_1)$ ne change ni la comparaison ni la valeur absolue du résultat ; quant au signe, il reste celui du plus grand en valeur absolue, qui ne dépend pas de l'ordre. □

Proposition 9 (Associativité)**.** *Pour tous* $X,Y,Z\in\widetilde{\mathbb{R}}$ *tels que les expressions* $(X+Y)+Z$ *et* $X+(Y+Z)$ *sont définies,* $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$.

Démonstration. Le cœur de l'argument repose sur la correspondance entre l'addition sur $\widetilde{\mathbb{R}}^+$ et la translation : à toute position $X\in\widetilde{\mathbb{R}}^+$ on associe la translation $T_X:Y\mapsto X+Y$; la composition $T_X\circ T_Y=T_{X+Y}$ est associative.

Cas $(+++)$. Soient $X=(N_X-1)\cdot 2\pi+x$, $Y=(N_Y-1)\cdot 2\pi+y$, $Z=(N_Z-1)\cdot 2\pi+z$ avec $x,y,z\in[0,2\pi[$. On veut montrer que $(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$. On distingue les sous-cas selon les retenues.

Sous-cas A : $x+y+z<2\pi$. Alors $X+Y=(N_X+N_Y-2)\cdot 2\pi+(x+y)$ (sans retenue), $(X+Y)+Z=(N_X+N_Y+N_Z-3)\cdot 2\pi+(x+y+z)$ (sans retenue). De même $Y+Z=(N_Y+N_Z-2)\cdot 2\pi+(y+z)$, $X+(Y+Z)=(N_X+N_Y+N_Z-3)\cdot 2\pi+(x+y+z)$. Égalité.

Sous-cas B : $x+y+z\in[2\pi,4\pi[$. Exactement une retenue se produit sur le terme angulaire. Selon l'ordre du calcul, soit $x+y\geq 2\pi$ (retenue dans $X+Y$, puis sans retenue dans $(X+Y)+Z$), soit $x+y<2\pi$ mais $(x+y)+z\geq 2\pi$ (sans retenue dans $X+Y$, puis retenue dans $(X+Y)+Z$). Dans les deux cas, on totalise une retenue dans le terme N et le terme angulaire résiduel est $x+y+z-2\pi$. Le résultat est $(N_X+N_Y+N_Z-2)\cdot 2\pi+(x+y+z-2\pi)$. La même analyse pour $X+(Y+Z)$ donne le même résultat.

Sous-cas C : $x+y+z\in[4\pi,6\pi[$. Deux retenues, résultat $(N_X+N_Y+N_Z-1)\cdot 2\pi+(x+y+z-4\pi)$. Identique pour les deux parenthésages.

Autres combinaisons de signes. Les cas $(---)$ se déduisent par $X+Y+Z=-((-X)+(-Y)+(-Z))$. Pour les cas mixtes, on utilise le fait que l'addition de signes opposés correspond à une soustraction des valeurs absolues, donc se ramène à l'addition positive après simplification. □

Théorème 12 (Groupe abélien partiel)**.** $(\widetilde{\mathbb{R}},+)$ *est un groupe abélien partiel : commutatif, associatif (quand défini), avec neutre* 0 *et opposé* $-X$ *pour tout* X*. L'addition est partielle : non définie si la somme dépasse en valeur absolue* $2\pi\cdot 2^{n_\infty}$.

Démonstration. Conséquence des propositions 6, 7, 8, 9. □

18 Structure multiplicative

Définition 24 (Multiplication sur $\widetilde{\mathbb{R}}$)**.** *Soient* $X,Y\in\widetilde{\mathbb{R}}$ *avec signes* σ_X,σ_Y *et valeurs absolues* $|X|,|Y|\in[0,2\pi\cdot 2^{n_\infty}[$.

Le produit $X\cdot Y$ *est défini ssi* $|X|\cdot|Y|<2\pi\cdot 2^{n_\infty}$*, et vaut alors :*

$$X\cdot Y:=(\sigma_X\cdot\sigma_Y,|X|\cdot|Y|),$$

où $\sigma_X\cdot\sigma_Y$ *suit la règle des signes usuelle. Si* $X=0$ *ou* $Y=0$*,* $X\cdot Y=0$.

Le produit $|X|\cdot|Y|$ *des valeurs absolues est entendu au sens de l'arithmétique des positions développée en Partie II : il découle, via l'isomorphisme* φ *(Théorèmes 7 et 8), de la multiplication binaire lexicale.*

Proposition 10 (Commutativité)**.** *Pour tous* X,Y *tels que* $X\cdot Y$ *est défini,* $X\cdot Y=Y\cdot X$.

Démonstration. Le produit des signes est commutatif (règle des signes : $\sigma_X\cdot\sigma_Y=\sigma_Y\cdot\sigma_X$ se vérifie directement pour les quatre combinaisons possibles $(+,+),(+,-),(-,+),(-,-)$). Le produit des valeurs absolues est commutatif par le théorème 8 appliqué à $|X|,|Y|$: ce produit dérive de la multiplication lexicale binaire, qui est commutative (proposition 5). □

Proposition 11 (Associativité)**.** *Pour tous X, Y, Z tels que les expressions sont définies, $(X \cdot Y) \cdot Z = X \cdot (Y \cdot Z)$.*

Démonstration. Signes. Le produit des signes est associatif : $(\sigma_X \cdot \sigma_Y) \cdot \sigma_Z = \sigma_X \cdot (\sigma_Y \cdot \sigma_Z)$ se vérifie par énumération des $2^3 = 8$ combinaisons.

Valeurs absolues. L'associativité du produit des valeurs absolues provient de l'isomorphisme avec la multiplication lexicale, qui est associative (proposition 5, héritée de l'associativité multiplicative de $\mathbb{N}$).

Combinaison. $(X \cdot Y) \cdot Z = ((\sigma_X \sigma_Y)\sigma_Z, (|X||Y|)|Z|) = (\sigma_X(\sigma_Y \sigma_Z), |X|(|Y||Z|)) = X \cdot (Y \cdot Z)$. □

Proposition 12 (Élément neutre multiplicatif)**.** $1 \cdot X = X \cdot 1 = X$ *pour tout* $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$.

Démonstration. On suppose $1 = (+, 1)$ avec $|1| = 1$ et $\sigma_1 = +$. Alors $1 \cdot X = (\sigma_1 \cdot \sigma_X, 1 \cdot |X|) = (\sigma_X, |X|) = X$, en utilisant la règle des signes $+ \cdot \sigma_X = \sigma_X$ et le fait que 1 est neutre multiplicatif sur les positions (par proposition 5). Commutativité $\Rightarrow X \cdot 1 = X$. □

18.1 Inverse multiplicatif partiel

Définition 25 (Inverse)**.** *Pour $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$ non nul, l'*inverse multiplicatif *est*

$$X^{-1} := (\sigma_X, 1/|X|).$$

X^{-1} existe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ ssi $1/|X| < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, c'est-à-dire ssi $|X| > \dfrac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$.

Proposition 13 (Inverse partiel)**.** *Pour tout X avec $|X| > \dfrac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$: $X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = 1$.*

Démonstration. Pour $X = (\sigma_X, |X|)$ et $X^{-1} = (\sigma_X, 1/|X|)$, $X \cdot X^{-1} = (\sigma_X \cdot \sigma_X, |X| \cdot (1/|X|))$. Par règle des signes, $\sigma_X \cdot \sigma_X = +$ pour les deux signes possibles. Et $|X| \cdot (1/|X|) = 1$ par la propriété d'inverse multiplicatif des positions (héritée de $\mathbb{Q}$ via les écritures binaires). Donc $X \cdot X^{-1} = (+, 1) = 1$. Idem pour $X^{-1} \cdot X$ par commutativité. □

Remarque 8 (Infinitésimaux)**.** *Les éléments non nuls dont la valeur absolue est inférieure ou égale à $\dfrac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ n'ont pas d'inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: ils sont* infinitésimaux*. Conjecture : ces inverses existeraient dans une extension $\widetilde{\widetilde{\mathbb{R}}}$ obtenue par déploiement à la résolution $-3n_\infty$ (longueur déployée $2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$, seuil d'inversibilité $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{2n_\infty}}$).*

19 Distributivité

Théorème 13 (Distributivité)**.** *Pour tous $X, Y, Z \in \widetilde{\mathbb{R}}$ tels que $X \cdot (Y + Z)$, $X \cdot Y$, $X \cdot Z$ et $X \cdot Y + X \cdot Z$ sont définis,*

$$X \cdot (Y + Z) = X \cdot Y + X \cdot Z.$$

Démonstration. On procède par cas selon les signes de Y et Z.

Cas 1 : Y, Z de même signe (tous deux ≥ 0 ou tous deux ≤ 0). Quitte à factoriser le signe commun, on se ramène à $Y, Z \geq 0$. Alors $Y + Z \geq 0$ et $X \cdot (Y + Z)$ a même signe que X. Les valeurs absolues : $|X \cdot (Y + Z)| = |X| \cdot (Y + Z)$ par la définition 24. Par distributivité de la multiplication lexicale sur l'addition (proposition 5, transportée par φ), $|X| \cdot (Y + Z) = |X| \cdot Y + |X| \cdot Z$. Et $|X \cdot Y + X \cdot Z| = |X| \cdot Y + |X| \cdot Z$ car les signes de $X \cdot Y$ et $X \cdot Z$ sont les mêmes (signe de X multiplié par signe commun de Y, Z). Conclusion : $X \cdot (Y + Z)$ et $X \cdot Y + X \cdot Z$ ont même signe et même valeur absolue, donc sont égaux.

Cas 2 : Y, Z de signes opposés. Disons $Y \geq 0$ et $Z = -W$ avec $W > 0$. Alors $Y + Z = Y - W$. Trois sous-cas selon $|Y|$ vs $|W|$:

Sous-cas 2a : $Y > W$. Alors $Y - W > 0$, et $X \cdot (Y - W)$ a signe de X et valeur absolue $|X|(Y - W)$. Par distributivité positive, $|X|(Y - W) = |X|Y - |X|W$. D'autre part, $X \cdot Y$ a signe de X et valeur absolue $|X|Y$; $X \cdot Z = X \cdot (-W)$ a signe opposé à X et valeur absolue $|X|W$. Donc $X \cdot Y + X \cdot Z$ est cas mixte avec $|X \cdot Y| = |X|Y > |X|W = |X \cdot Z|$, donc le résultat a signe de $X \cdot Y$ ($=$ signe de X) et valeur absolue $|X|Y - |X|W = |X|(Y - W)$. Égalité.

Sous-cas 2b : $Y < W$. Alors $Y - W < 0$, et $X \cdot (Y - W)$ a signe opposé à X et valeur absolue $|X|(W - Y)$. D'autre part, $X \cdot Y + X \cdot Z$ est cas mixte avec $|X|Y < |X|W$, résultat de signe opposé à X et valeur absolue $|X|W - |X|Y = |X|(W - Y)$. Égalité.

Sous-cas 2c : $Y = W$. Alors $Y + Z = 0$, et $X \cdot 0 = 0$. D'autre part, $X \cdot Y$ et $X \cdot Z$ ont mêmes valeurs absolues et signes opposés, donc leur somme est 0. Égalité.

Symétrie en Y et Z. Par commutativité de l'addition, les rôles de Y et Z peuvent être échangés ; donc le cas $Y \leq 0, Z \geq 0$ se traite de manière analogue. □

20 Théorème principal : structure de corps partiel

Théorème 14 (Structure de corps partiel)**.** $(\widetilde{\mathbb{R}}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif partiel :*

1. $(\widetilde{\mathbb{R}}, +)$ *est un groupe abélien partiel.*
2. $(\widetilde{\mathbb{R}} \setminus \{0\}, \cdot)$ *est un magma commutatif et associatif partiel avec élément neutre* 1.
3. *Tout* $X \neq 0$ *avec* $|X| > \dfrac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ *admet un inverse* X^{-1}.
4. *La multiplication est distributive sur l'addition.*

Démonstration. (1) Théorème 12. (2) Propositions 10, 11, 12. (3) Proposition 13. (4) Théorème 13. □

Quatrième partie

Le corps $\mathbb{R}$ comme restriction standard

21 Éléments standards

L'objectif de cette partie est d'identifier dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ un sous-ensemble qui soit un *vrai* corps (sans partialité), et qui corresponde au $\mathbb{R}$ classique.

Définition 26 (Éléments standards)**.** *Un élément* $X \in \widetilde{\mathbb{R}}$ *est* standard *si :*

— *(*borné*) il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $|X| < 2^m$,

— *(*non infinitésimal*)* $X = 0$, *ou il existe* $m \in \mathbb{N}$ *tel que* $|X| > 2^{-m}$.

On note $\mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ *l'ensemble des éléments standards.*

Remarque 9. *Les bornes en* 2^m *avec* m *entier fini garantissent que* $|X|$ *ne s'approche ni de la borne supérieure* $2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ *ni de la borne inférieure* $\dfrac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$ *:* X *est strictement intérieur à la zone d'inversibilité totale.*

En effet, pour tout $m \in \mathbb{N}$ *fini,* $2^m < 2^{n_\infty}$ *par le théorème 5 (puisque* $m < n_\infty$ *par axiome 3, et l'exponentiation est croissante). A fortiori,* $2^m < 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$. *De même,* $2^{-m} = 1/2^m > 1/(2^{n_\infty}) > 1/(2\pi \cdot 2^{n_\infty})$.

22 Stabilité de $\mathbb{R}$

Proposition 14 (Stabilité par addition)**.** *Si* $X, Y \in \mathbb{R}$, *alors* $X + Y$ *est défini dans* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *et* $X + Y \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Définition. Si $|X|, |Y| < 2^m$ pour un certain m, alors $|X+Y| \leq |X|+|Y| < 2^{m+1}$ (inégalité triangulaire pour la valeur absolue, vérifiable cas par cas selon les signes : si X, Y même signe, $|X+Y| = |X|+|Y|$; si signes opposés, $|X+Y| = ||X|-|Y|| \leq \max(|X|, |Y|) \leq |X|+|Y|$). Puisque 2^{m+1} est encore fini, donc $< 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$, l'addition est bien définie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Borné. L'inégalité précédente donne $|X+Y| < 2^{m+1}$, donc $X+Y$ est borné (par $2^{m+1} \in \mathbb{N}$).

Non infinitésimal. Cas 1 : $X+Y = 0$, alors $X+Y \in \mathbb{R}$ par convention.

Cas 2 : $X+Y \neq 0$ et X, Y de même signe. Alors $|X+Y| = |X|+|Y| \geq |X| > 2^{-m_X}$ pour un certain $m_X \in \mathbb{N}$ (puisque X non infinitésimal, supposé $X \neq 0$). Donc $|X+Y| > 2^{-m_X}$.

Cas 3 : $X+Y \neq 0$ et X, Y de signes opposés. Alors $|X+Y| = ||X|-|Y||$. Cette quantité peut être très petite si $|X|$ et $|Y|$ sont proches. Toutefois, puisque $X+Y \neq 0$, on a $|X| \neq |Y|$, et la différence est bornée inférieurement par la finesse de la résolution disponible dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, soit au minimum $\frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$. *Ce point mérite une discussion* : si l'on prend X et Y standards très proches, $|X|-|Y|$ peut être plus petit que 2^{-m} pour tout m fini, ce qui sortirait de $\mathbb{R}$. Mais alors, soit $|X|-|Y|$ est exactement 0 (cas 1 traité), soit cette différence reste représentable par une position dans $\widetilde{\mathbb{R}}$, ce qui requiert $||X|-|Y|| > \frac{1}{2\pi 2^{n_\infty}}$. Pour assurer la stabilité de $\mathbb{R}$, on stipule par définition 26 que toute différence non nulle d'éléments standards est encore standard — ce qui revient à demander que $\mathbb{R}$ soit fermé par sa propre topologie naturelle. Ceci est cohérent avec la construction classique de $\mathbb{R}$ comme complété de $\mathbb{Q}$. □

Remarque 10 (Sur la stabilité par soustraction)**.** *La preuve précédente met au jour une subtilité : la non-infinitésimalité n'est pas* automatiquement *préservée par soustraction dans $\widetilde{\mathbb{R}}$. La définition d'élément standard doit donc être interprétée de façon que toute différence non nulle d'éléments standards soit elle-même standard. Cela correspond à l'idée que* $\mathbb{R}$ *est un* corps archimédien *: la finesse interne de $\mathbb{R}$ est définie par les puissances finies de 2, et toute différence non nulle reste de cet ordre.*

Une formulation plus rigoureuse consisterait à définir $\mathbb{R}$ *comme* la clôture par limites de Cauchy *de $\mathbb{Q}$ dans $\widetilde{\mathbb{R}}$; cela est laissé pour un développement ultérieur.*

Proposition 15 (Stabilité par multiplication)**.** *Si $X, Y \in \mathbb{R}$, alors $X \cdot Y$ est défini dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ et $X \cdot Y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Définition. Si $|X|, |Y| < 2^m$, alors $|X \cdot Y| < 2^{2m}$. Comme 2^{2m} est encore fini, donc $< 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ (puisque $2m < n_\infty$ par axiome 3 et croissance de l'exponentielle), la multiplication est définie dans $\widetilde{\mathbb{R}}$.

Borné. $|X \cdot Y| < 2^{2m}$, donc $X \cdot Y$ borné par $2^{2m} \in \mathbb{N}$.

Non infinitésimal. Si $X = 0$ ou $Y = 0$, alors $X \cdot Y = 0 \in \mathbb{R}$. Sinon, $X, Y \neq 0$ et non infinitésimaux : $|X| > 2^{-m_X}$ et $|Y| > 2^{-m_Y}$ pour certains $m_X, m_Y \in \mathbb{N}$. Alors $|X \cdot Y| = |X| \cdot |Y| > 2^{-(m_X+m_Y)}$, donc $X \cdot Y$ non infinitésimal. □

Proposition 16 (Stabilité par opposé)**.** $X \in \mathbb{R} \implies -X \in \mathbb{R}$.

Démonstration. $|-X| = |X|$ donc les conditions de borné et non-infinitésimal sont identiques. □

Proposition 17 (Stabilité par inverse)**.** $X \in \mathbb{R}, X \neq 0 \implies X^{-1} \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Existence de l'inverse. X standard non nul est en particulier non infinitésimal : $|X| > 2^{-m}$ pour un certain $m \in \mathbb{N}$. Donc $|X| > 2^{-m} > 1/(2\pi \cdot 2^{n_\infty})$ (puisque $m < n_\infty$ et exponentiation décroissante pour les exposants négatifs), et l'inverse X^{-1} existe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ par la définition 25.

Borné. $|X| > 2^{-m}$ entraîne $|X^{-1}| = 1/|X| < 2^m$, donc X^{-1} borné.

Non infinitésimal. $|X| < 2^{m'}$ pour un certain m' (puisque X borné), donc $|X^{-1}| = 1/|X| > 2^{-m'}$, donc X^{-1} non infinitésimal. □

23 Théorème : $\mathbb{R}$ est un corps

Théorème 15 (Structure de corps de $\mathbb{R}$)**.** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *est un corps commutatif au sens classique :*

1. $(\mathbb{R}, +)$ *est un groupe abélien (addition totale).*
2. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ *est un groupe abélien (multiplication totale, tout élément non nul est inversible).*
3. *Distributivité.*

Démonstration. (1) Groupe abélien additif. Par les propositions 14 et la stabilité par opposé, $+$ et $-$ sont des opérations totales sur $\mathbb{R}$. Les propriétés algébriques (commutativité, associativité, neutre 0, opposé) sont héritées de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (propositions 6, 7, 8, 9), où elles tiennent dès que les expressions sont définies — ce qui est garanti sur $\mathbb{R}$ par la stabilité.

(2) Groupe abélien multiplicatif sur $\mathbb{R}^*$. Par les propositions 15 et 17, $\cdot$ et $^{-1}$ sont des opérations totales sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Commutativité, associativité, neutre 1, inverse : héritées de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (propositions 10, 11, 12, 13).

(3) Distributivité. Héritée du théorème 13 : la distributivité tient dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ dès que toutes les expressions sont définies, ce qui est le cas sur $\mathbb{R}$ par stabilité. □

Corollaire 2 ($\widetilde{\mathbb{R}}$ comme extension de $\mathbb{R}$)**.** *Le corps* $\mathbb{R}$ *ainsi obtenu est un sous-corps de* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *au sens partiel.* $\widetilde{\mathbb{R}}$ *peut être vu comme une extension non archimédienne de* $\mathbb{R}$ *: il contient des éléments* infiniment grands *($\geq 2^n$ pour tout n fini) et des* infinitésimaux non nuls *($\leq 2^{-n}$ pour tout n fini).*

Démonstration. Sous-corps. $\mathbb{R} \subset \widetilde{\mathbb{R}}$ par définition. Les opérations de $\mathbb{R}$ sont les restrictions de celles de $\widetilde{\mathbb{R}}$ (propositions de stabilité).

Éléments infiniment grands. Par exemple, $2^{n_\infty} \in \widetilde{\mathbb{R}}$ mais $2^{n_\infty} > 2^m$ pour tout m fini par théorème 5. Donc $2^{n_\infty} \notin \mathbb{R}$.

Infinitésimaux non nuls. $\dfrac{1}{2^{n_\infty}}$ existe dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ comme position, mais $\dfrac{1}{2^{n_\infty}} < 2^{-m}$ pour tout m fini, et $\dfrac{1}{2^{n_\infty}} \neq 0$. Donc $\dfrac{1}{2^{n_\infty}} \notin \mathbb{R}$.

(Note : $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ n'admet pas d'inverse dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ si $\frac{1}{2^{n_\infty}} \leq \frac{1}{2\pi \cdot 2^{n_\infty}}$, c'est-à-dire $2\pi \leq 1$, ce qui est faux. Donc $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ a un inverse, qui est 2^{n_∞}.) □