

# Éléments de cartographie

Hugues GENVRIN

Juillet 2016

## 1 Introduction : La perspective géométrique des artistes du XV<sup>e</sup> et XVI<sup>e</sup>

### 1.1 Une perspective particulière

Ce fut en 1657 que Schott introduisit le mot anamorphose, il l'associa à une notion de « perspective dépravée ». En effet, l'anamorphose ôtait la forme d'une chose, néanmoins si on la replace dans le courant d'une perspective, celles-là étaient perçus comme un « facteur de réalisme [3]. La perspective anamorphique n'est donc pas une aberration, un trompe l'œil, même si elle fut souvent symbole de distorsion. La théorie des perspectives que développèrent les artistes et des savants : Dürer, Della Francesca, Alberti, entre autres, s'appuie sur le cadre mathématique d'une géométrie projective.

Dürer étudia en 1525 une forme de perspective ralentie particulièrement intéressante. L'accroissement des éléments éloignés relativement à ceux plus proches entraîne qu'ils apparaissent plus proches qu'ils ne le sont. Nous voyons là une mise en correspondance entre un domaine angulaire linéaire et des tranches d'un co-domaine symbolisé par la fonction tangente par rapport aux éléments d'un cercle donné. On sait bien que la tangente tend rapidement à l'infini,  $x = \frac{\pi}{2}$  déterminant une asymptote. Ainsi le procédé employé par Dürer pour ralentir la perspective est de linéariser ce qui se donne naturellement de façon exponentielle, de mettre en correspondance l'amorphe et le dilaté. Ainsi l'effet de perspective iconographique est compensé en partie par une perspective opposée, d'un autre genre. Cette manipulation symbolique, ce « biais » de représentation autorise l'artiste à véhiculer un sens qui dépasse la représentation picturale. Est-ce une perspective de la nature de se donner en amorphe ou en dilatée ?

En nous interrogeant, est-ce que dans la nature, un système qui épuiserait par exemple toute l'entropie potentielle dans ses relations à son environnement posséderait l'aptitude à se dilater ? À l'opposé, si son entropie potentielle est maximale

par rapport aux ressources physiques, il va changer d'état, de nouvelles structures, un nouvel état, vont apparaître. Mais est-ce le système qui se dilate, ou se rend en un amorphe ? Ou bien est-ce l'espace qui offrirait à une classe de systèmes, un degré de liberté axial, en profondeur ? Cela engage alors à définir l'espace, dégager des concepts soutenant la donation sous forme amorphique ou an-amorphique. Autrement dit soutient la représentation amorphe ou dilatée. Dans ce ses l'anamorphose s'oppose au vortex de Poe. Alors que celui-là absorbe, dévore le sujet, à l'image d'un trou noir la lumière, celle-ci est réflexion sur l'espace où le sujet se donne sous la forme d'un tout.

## 1.2 Les ambassadeurs.

Cette expression d'une dualité dans un perspectivisme fondamental trou un écho retentissant dans le tableau de Holbein « Les ambassadeurs »(1533). Cette œuvre fut commanditée par Jean de Dinteville ambassadeur et connaissance de François I°. La noblesse de la scène, avec une multitude d'objets témoignant d'une maîtrise dans la relation de l'homme au monde : on y trouve entre autres, un globe céleste, trois cadrans solaires, un luth, des flûtes, une équerre, un compas, des livres identifiables, un globe terrestre, une carte ; l'assurance des deux personnages, où l'élégance de Jean de Dinteville va de pair avec la sobriété de Georges de Selve qui fut évêque de Lavaur. L'œuvre met toutefois en exergue la « la prétention des vanités »qui se retrouve dans un effet d'opposition des symboles mentionnés avec un élément iconographique particulier. Á vrai dire on trouve sur les carreaux un forme anamorphosée qui se dévoile uniquement sous un certain angle, c'est en fait un crâne si nous nous plaçons sous une certaine perspective. Il ne faut pas se méprendre sur une critique d'une certaine société, *memento mori* était la devise des Dinteville. D'ailleurs lorsque le tableau se trouvait exposé dans la demeure des Dinteville, la pièce dans laquelle il s'exposait possédait deux entrées. Si un accès offrait un abord de face, l'autre se trouvait dans un angle tel qu'il faisait surgir le crâne dans sa forme native. L'enjeu de l'art est dit-on de nous faire percevoir les vérités qui ne sont pas encore formalisées, dé-couvertes, de les rendre accessibles au spectateur en tant que dévoilement pur. Alors ce qui s'offre à nous via cette anamorphose est l'intrication des perspectives de ce qui est. Cela nous interroge directement au point de vue l'être, faut-il prendre l'étant en tant protection ontologique ? Les dangers d'un polymorphisme ontologique conduiraient à une inconsistance fondamentale sur ce qui est. Ceci-dit l'existentialisme offre cette idée d'un destin ayant capacité à transformer l'être, offrant une dynamique ontologique. Dans le registre de la physique, la matière se donne aussi sous divers états, il apparaît donc ici un degré de liberté en profondeur (indépendant d'une volonté, ou d'une ambition humaine, d'un étant) qui a capacité à transformer une chose, sa forme, autant que ses propriétés. C'est l'homme qui lui donnera son statut

d'étant, à partir des propriétés dégagées sous un éclairage homo-centrique.

### 1.3 Une approche scientifique et naturaliste : D'Arcy Thomson

Dans cette perspective et sous un nouvel aspect de l'anamorphose, d'Arcy Thomson mathématicien et zoologiste britannique, avec une audace d'avant-garde, alla jusqu'à mettre en relation de correspondance des êtres vivants ou des entités (organes, parties osseuses) d'espèces différentes, ou de genres différents dans une espèce donnée, par des anamorphoses de l'espace de représentation qui induisaient par un jeu de coordonnées adapté (permettant le quadrillage d'une entité) de la déformer suivant une anamorphose globale et non pas locale. Cette idée laissant bien entendu la place à la découverte d'un élément clef qui serait susceptible de guider la transformation globale de l'espace. Pour revenir à notre sujet, l'état d'une entité mathématique concerne beaucoup d'attributs distinctes : les formes, les angles, les mesures . . .

L'anamorphose fait partie d'un domaine plus global qui concerne l'étude des transformations. On retrouve dans l'étymologie du mot *homéomorphisme* la notion de même forme. Aujourd'hui ces transformations sont étudiées en particulier en topologie, en analyse réelle et complexe, nous y reviendrons.

## 2 La cartographie

La cartographie est à l'intersection de plusieurs domaines : la géographie, l'économie, les mathématiques, la climatologie. . . Elle va avoir rapport aussi bien à la représentation de la terre que le tracé d'un itinéraire le plus court pour relier plusieurs villes . . . ou qu'un relevé topographique. En étendant le domaine d'une carte aux plans, aux graphes (courbe de niveaux par exemple) on s'aperçoit que le domaine couvert devient très large.

**Définition 1** (Cartographie). *La cartographie est une mise en relation de correspondance entre un espace du monde et un espace de représentation symbolique matérialisé par un graphique dans un espace mathématique, muni de qualités pour des éléments ponctuels, de surface ou d'espace.*

On appellera carte le graphique fonctionnel, il sera défini de manière discrète ou par des fonctions classiques. Le fond de carte correspondra (non pas la carte suivant le sens commun) à la nature de l'espace supportant la représentation graphique. Il pourra être un plan euclidien, un plan dilaté, une sphère à deux dimensions, . . .

## 2.1 Dessiner et mesurer la Terre

### 2.1.1 Problématique

Plusieurs problèmes se posaient, à l'idée de cartographe :

1. Quelle est la forme de la terre ? une géode, une sphère, une ellipsoïde ou une pomme de terre (bosselée) ?
2. Dans ce cas comment projeter les mesures récoltées ?
3. Et par quels procédés recueillir les données du terrain ?
4. Par quels moyens passer ensuite d'une représentation de terrain à une représentation sur une carte (un plan), sans biaiser les distances et gauchir les formes ?

Toutes ces questions n'auraient pas eu de réponses, conduits à des méthodes de production de documents utilisables, sans les mathématiques. Mais les problématiques ont évoluées, rapidement les cartes ont dû être fidèles [1] dans la représentation et précises [1]. Aujourd'hui une problématique est l'optimisation d'une carte, même si un théorème (non constructif<sup>1</sup>) a été démontré par Milnor [1].

**Théorème 1** (Précision d'une carte [1]). *Parmi toutes les cartes  $f : X \mapsto Y$ , il en existe au moins une dont la précision est la meilleure possible.*

Nous allons ici esquisser simplement des éléments qui ont fondé notre représentation du lieu où nous vivons.

### 2.1.2 Mathématique de terrain et théorique

Parmi les espaces principaux qui concernent l'individu, il y a la terre. De l'étymologie *geo*, nous scindons deux domaines du logos :

1. La géométrie qui va mesurer la terre.
2. La géodésie qui va la dessiner.

L'aventure cartographique se trouve à la croisée de ces deux domaines, les problématiques cartographiques directement reliées à des questions mathématiques vont évoluer au fil du temps. Ceci explique pourquoi elle engagea beaucoup de grands mathématiciens sur ce domaine. On a vu qu'Anaximandre réalisa la première représentation cartographique au VI<sup>e</sup> siècle avt. J.-C., mais la première grande révolution cartographique survint en 1569. Mercator réussit à représenter la projection d'une carte sphérique (qu'on se figurera sous la forme d'une mappemonde) vers une carte plane, en respectant les formes dans l'infiniment petit, donc en particulier

---

1. Non constructif signifie que le théorème ne livre pas une méthode pour construire une solution, toutefois le théorème démontre qu'une solution existe.

les angles. Mentionnons qu'en 1768, Euler entreprit d'étudier une transformation conservant les formes en utilisant les complexes. En 1775 il écrivit deux autres textes, dont l'un qui décrivait une analyse complète de la transformation de Mercator [4]. Il participa aussi à la réalisation d'une carte de l'empire russe. Ajoutons les contributions de Tchebychev « [...] qui obtint d'importants résultats reliés au réseau de lignes courbes sur les surfaces. Ses découvertes découlant de problèmes purement pratiques. »

En 1818, Gauss se vit confié la mission de cartographier le royaume de Hanovre<sup>2</sup>, tâche pour laquelle il traita plus d'un million de données [1]. C'est à cette occasion qu'il découvrit les propriétés de la courbe en cloche. Il appliqua également la méthode des moindres carrés qu'il avait inventée pour étudier la trajectoire de Cérès. Pour le relevé des données d'observation il inventa un matériel alternatif au cercle répétiteur de Borda : l'héliotrope. Outre ces activités théoriques très liées à sa mission, il révolutionna alors la théorie des espaces sous plusieurs aspects. D'une part il matérialisa une théorie des surfaces courbes dans le prolongement de celle d'Euler, en démontrant le théorème egregium (où théorème remarquable de la géométrie), fonda la notion de carte locale en un point de multiplicité. Il s'intéressa aussi à un problème qui touchait la projection stéréographique : la conservation des angles dans une transformation donnée, en montrant l'application pour la théorie de Mercator.

**Définition 2** (Projections stéréographiques). *Ce sont des projections de solides par des projections sur un plan.*

Cette question fut d'ailleurs le sujet d'un prix formulé par la Société Royale des sciences de Copenhague en 1822 : « Solution générale de ce problème : Représenter les parties d'une surface donnée sur une autre surface donnée de telle sorte que la représentation soit semblable à l'original dans les parties infiniment petites. » Le sous-titre mentionné par le traité de Gauss répondant à cette question : « Représentation conforme » [?] dans la traduction de 1915 de Laugel ne fut en réalité introduit par Gauss qu'en 1844 dans son mémoire sur la *Géodésie supérieure*. Ainsi les transformations conformes conservent localement les angles, il en est ainsi de la projection stéréographique de Mercator.

En mathématique, la géodésie généralise la notion de plus court chemin entre deux points. Un des enjeux de la géodésie était la cartographie :

1. Terrestre.
2. Céleste.
3. Maritime.

---

2. Notons qu'il calcula également la longueur de l'arc méridien entre Hanovre et Altona

## 2.2 Les cartes de la planète

Nous allons regarder plus particulièrement la projection de la terre assimilée à une sphère parfaite.

### 2.2.1 De la sphère unité $S^2$ par une projection

Nous avons vu qu'une projection était connue depuis l'antiquité [1], elle consiste à passer d'une représentation sphérique à une représentation planaire. Nous partons d'un domaine symbolique représentant la sphère terrestre par exemple et d'un co-domaine déterminant la représentation associée dans un plan. Un point de la sphère sera déterminé de manière unique par un méridien : une géodésique passant par les deux pôles de la sphère, et un parallèle. Si l'équateur terrestre représente un axe de symétrie des parallèles, il est aussi le plus grand des parallèles et on l'utilisera pour quantifier le parallèle zéro (ou d'origine). Pour les méridiens, il fut fixé par convention, le méridien zéro (ou d'origine) : méridien de Greenwich ; faute de pouvoir en identifier un particulier naturellement, parmi l'ensemble des méridiens.

**Définition 3** (Latitude (Berger [?])). *La latitude d'un point  $M$  de  $S^2$  est le nombre réel :  $\theta(M) = \frac{\pi}{2} - \widehat{\mathbf{ON}, \mathbf{OM}}$ . Où  $N$  désigne le pôle nord de  $S^2$ .*

**Définition 4** (Longitude (Berger [?])). *La longitude d'un point  $M$  de  $S^2$  est l'angle orienté :  $\phi(M) = \widehat{\mathbf{OO}'; \mathbf{p}_M}$ . Où  $O'$  désigne le point d'intersection du méridien de référence (Greenwich par exemple), et  $p_M$  la projection orthogonale du point  $M$  sur le plan  $xy$ .*

Le plan  $xy$  est pour nous le plan qui contient l'équateur. Ainsi on se figurera symboliquement les points de la sphère par des repérages angulaires sur des fuseaux par les arcs associés au point relativement aux méridiens et parallèle d'origine. On obtient donc des déterminations d'un point en termes d'arcs qui s'expriment en degré.

Nous reprenons la définition de Berger qui s'applique au cas de la dimension de la sphère  $S_2$ .

**Définition 5** (Projection Stéréographique). *On appelle projection stéréographique  $p_s$  d'un pôle nord  $N$  de la sphère  $S^d$  l'application qui associe à la restriction du domaine sur  $Dom = S^d \setminus N$  pour le point  $M$  de  $Dom$ , un point  $P$  d'un espace  $\mathbb{R}^d$  tel que  $N, M, P$  soient colinéaires de telle façon qu'on définisse ainsi :*

$$\begin{aligned} \Pi_s : S_d \setminus N &\Rightarrow \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \\ M &\longmapsto \end{aligned}$$

La projection du point  $N$  se faisant à l'infini dans un cadre classique. Précisons

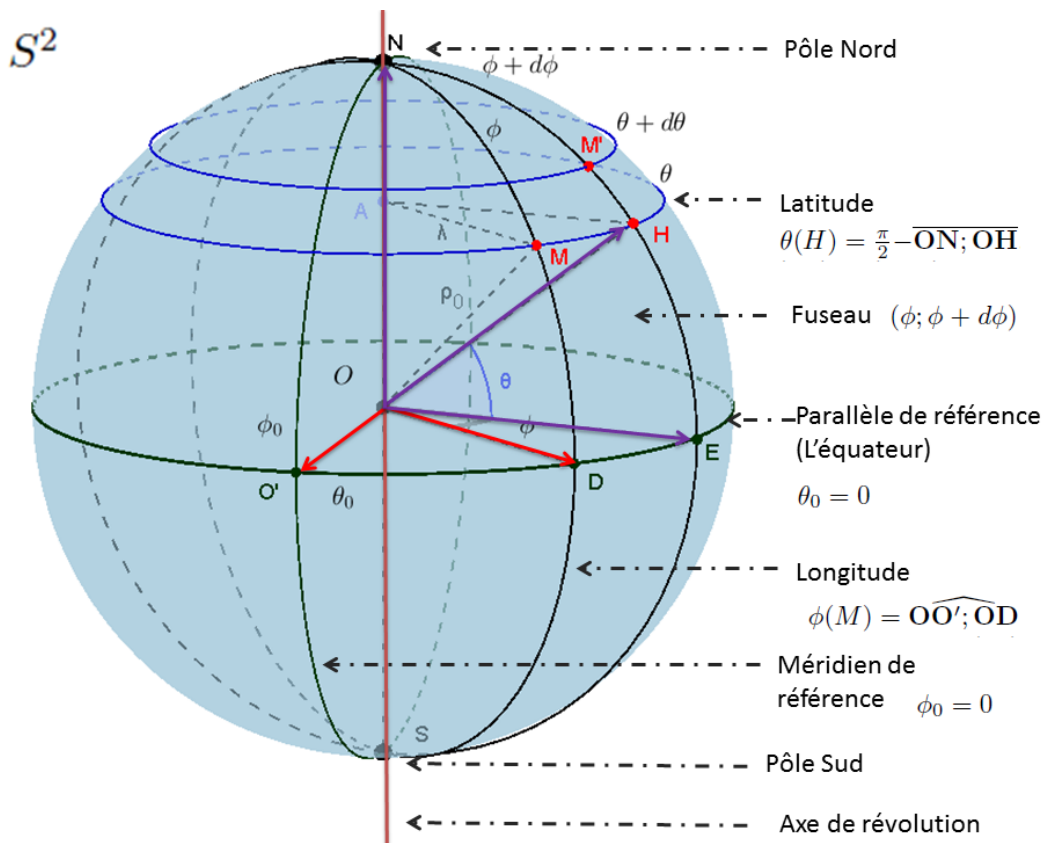


FIGURE 1 – Dénomination des attributs de  $S^2$ .

qu'il existe plusieurs projections stéréographiques, on voit que le biais principal est la dilatation des grandeurs reportées de la sphère vers le plan. Plus on se rapproche du pôle Nord, plus la longueur sera dilatée. On remarque que le pôle nord est un point à l'infini. On pourrait s'interroger à ce stade sur l'unicité de ce point à l'infini qui est le point d'intersection des méridiens de la sphère.

### 2.2.2 De la sphère au plan par une projection cylindrique

**Les projections cylindriques** Le passage de la projection cylindrique à la carte étant immédiat par un découpage du tube suivant un axe longitudinal. Nous remarquons alors une propriété topologique : si nous prend un plan muni d'un triangle rectangle, qu'on en fait un tube, alors la relation de Pythagore sera vérifiée pour le triangle dessiné maintenant sur le tube. Si à l'opposé la distance projeté d'un élément géodésique sur le cylindre ou sur le plan est distincte de l'élément géodésique sur la sphère, c'est que le rayon de courbure de la sphère ( $>0$ ) et distincte de celui du plan. La métrique de la sphère est alors dite non euclidienne car elle

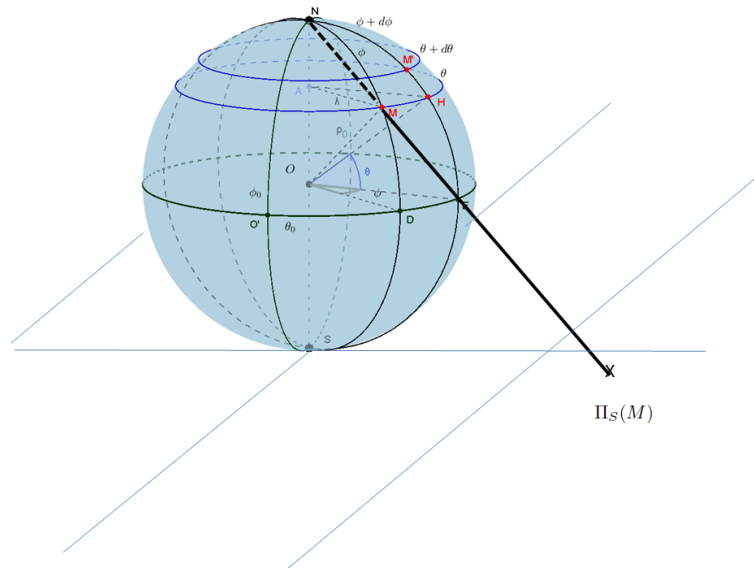


FIGURE 2 – Projection stéréographique de la sphère  $S^2$  sur le plan tangent au pôle sud.

ne vérifie pas le théorème de Pythagore à la base de la géométrie euclidienne.

On distingue trois types de projections cylindriques [6] :

1. équivalentes : conservent les surfaces.
2. Conformes : conservent les angles et les formes.
3. équidistantes : conservent les distances sur les méridiens.

Parmi les projections cylindriques on en distinguera certaines : La projection dite de Lambert est une projection orthogonale des points sur l'intérieur du tube formé par le cylindre.

### 2.2.3 La projection de Mercator (1512-1594)

**Le terme cartographie** fut inventé au XIX<sup>e</sup> siècle. éditeur de la *Géographie* de Ptolémée, il reste le plus célèbre des cartographes. Il appartient à la corporation des cosmographes, son ambition visait à une compréhension complète du monde, dépassant la seule connaissance du globe terrestre. On décomposera son {oeuvre en un triptique :

1. La mappemonde de 1541, qu'il construisit à Louvain possède un diamètre de 41 cm. On trouvera une description complète dans le livre que lui a consacré D'Hollander [5].

2. Le planisphère de 1569 marqua l'utilisation de sa méthode de projection, qui fut révolutionnaire. Elle possédait la propriété de conserver les formes. « Pour la navigation, c'était un immense progrès, puisque les navires pouvaient directement lire la route choisie sur la carte et diriger ainsi leur navire à cap constant. » [?]. On trouve encore quatre exemplaires de cette carte : à Paris, Rotterdam, Breslau et Bâle.
3. L'atlas de 1595 qui contenait 558 pages, fut rédigée en latin. On utilisa une technique d'impression de gravure sur cuivre pour l'éditer. Un exemplaire de ce premier atlas du monde repose à la bibliothèque municipale de Berlin.

Elle a permis la représentation fiable du point de vue des formes de la mappemonde. C'est une projection cylindrique particulière, elle conserve les angles, mais les propriétés de longueurs sont biaisées. Lorsque Mercator établit sa fameuse carte, les outils mathématiques étaient relativement limités : il ne possédait ni la géométrie différentielle, ni l'étude des logarithmes népériens [5]. Sans doute bénéficiait-il des travaux pionniers de Nicolas Oresme sur la droite et ses variations infinitésimales. Il pouvait aussi s'appuyer sur les travaux de Nunes qui publia ses premiers travaux sur la loxodromie en 1537 puis consolida une théorie en 1566. La loxodrome décrit une courbe particulière sur le globe terrestre, elle consiste à conserver un angle constant par rapport aux méridiens sur une trajectoire. On l'oppose à la détermination de la trajectoire orthodromique : la plus courte entre deux points d'une sphère déterminée par un arc de cercle, qui oblige toutefois à modifier de manière régulière l'angle de cap. Nunes aboutit à la notion de loxodrome après avoir étudié une famille de courbes appelées rhumbs. Mercator possédait les développements théoriques de Nunes.

Pour être clair sur les préoccupations de Mercator, on reprendra l'argumentation de D'Hollander :

1. « étendre sur un plan la surface de la sphère de telle sorte que les positions des lieux se correspondent entre elles tant pour ce qui concerne la direction et la distance vraie qu'en ce qui concerne les longitudes et la latitudes correctes. »
2. « que la forme des régions soit conservée autant qu'il est possible, tel qu'elle apparaît sur la sphère. » La pente de la droite dans le canevas renseignera l'angle constant de la loxodrome.

**La loxodrome est une courbe particulière sur le globe terrestre** appelée angle de route, ou azimuth, définissant une trajectoire sur la sphère qui marque un angl constant par rapport aux méridiens. L'image de la courbe par la projection cylindrique déterminera une droite sur le canevas, dont la pente renseignera l'angle constant de la loxodrome. Plus précisément, on retrouve l'angle formé entre la droite projection de la courbe loxodromique, et les axes verticaux projections des méridiens. Inversement, l'image réciproque sur la sphère d'une droite sera une

ligne d'azimut constante, soit le type de courbe précédente appelée loxodromie ou loxodrome. Observons sur la figure ci-dessous la forme en spirale sur la sphère décrite par la loxodromie qui converge vers le pôle nord  $N$ . On doit à Halley que la projection stéréographique polaire<sup>3</sup> d'une courbe loxodromique donnera une spirale logarithmique.



FIGURE 3 – Loxodromie ou Loxodrome (Source Wikipédia).

**la projection de Mercator** Nous détaillerons une démonstration de l'équation vérifiant ce critère de conformité de manière synthétique plus loin, ici nous essayons de suivre la méthode que suivit Mercator. Nous notons  $\mathcal{L}(M, \alpha)$  le graphe fonctionnelle désignant la loxodrome passant par un point  $M$  de la sphère unité  $S^2$  d'azimut  $\alpha$ , on se représentera le point  $M : (\phi, \theta)$  par les coordonnées sur  $S^2$  où  $\phi$  désigne la longitude prise par rapport à un méridien de référence  $\phi_0 = 0$  (Méridien de Greenwich pour la terre) et  $\theta$  désigne la latitude prise par rapport à un parallèle de référence  $\theta_0$  qui désigne l'équateur de  $S^2$ . Nous savons que sur une loxodrome l'angle  $\alpha$  est constant. La projection de Mercator consiste à considérer les projection des loxodromes sur le canevas formé par l'intérieur du tube.

$$\begin{aligned} \Pi_{\mathcal{M}} : S^2 &\longrightarrow \mathcal{P} = [-\pi; +\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right] \\ (\phi; \theta) &\longmapsto \left(\Pi_{\mathcal{M}}(\phi) \equiv \phi; \Pi_{\mathcal{M}}(\theta)\right). \end{aligned}$$

---

3. Pour la démonstration de Halley, on pourra consulter « Loxodromes et projection de Mercator » [5]

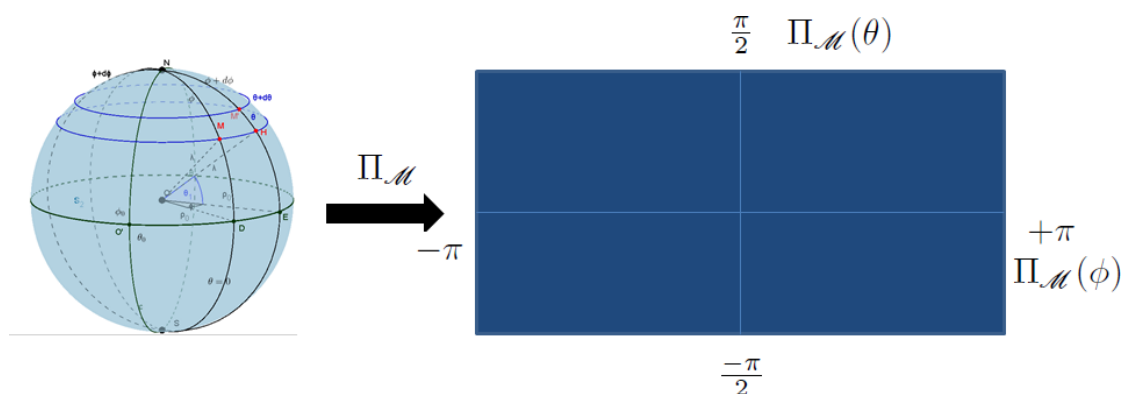


FIGURE 4 – Projection de Mercator  $\Pi_{\mathcal{M}}$ .

Néanmoins cette image de la mise en relation de correspondance n'est pas directe, à l'image d'une projection stéréographique. Pour étudier la projection nous prenons le point  $M'$  de la sphère  $S^2$  obtenu par un déplacement infinitésimal en conservant l'angle  $\alpha$ , alors  $M : (\phi + d\phi, \theta + d\theta)$  appartient à  $\mathcal{L}(M, \alpha)$ . On décompose le chemin  $MM'$  par un triangle rectangle infinitésimal  $(M, H, M')$  rectangle en  $H : (\phi + d\phi, \theta)$  ainsi qu'il est indiqué sur la figure ci-dessous.  $H$  est sur la même latitude que  $M$  et sur la longitude de  $M'$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} HM &= \lambda d\phi, \text{ où : } \lambda = \cos \theta \rho_0 = \cos \theta \text{ sur notre sphère unité : } \rho_0 = 1. \\ &= \cos \theta d\phi, \\ HM' &= d\theta \rho_0 = d\theta \Rightarrow \frac{HM'}{MH} = \frac{d\theta}{\cos \theta d\phi}. \end{aligned}$$

Le cœur de la méthode de Mercator est de transformer un triangle infinitésimal sur la sphère en un triangle infinitésimal  $(m, h, m') = (\Pi_{\mathcal{M}}(M), \Pi_{\mathcal{M}}(H), \Pi_{\mathcal{M}}(M'))$  sur le canevas de telle sorte que les angles soient conservés dans l'infiniment petit. Cette condition sera remplie si :

$$\frac{HM'}{HM} = \frac{hm'}{hm}, \text{ sachant que : } (\widehat{MN}; \widehat{MM'}) = \alpha.$$

Cette conservation des angles implique alors que l'image d'une loxodrome va être déterminée par une droite de coefficient directeur constant valant  $\cot \alpha$ . Nous obtenons de plus deux formulations de l'expression de  $\Pi_{\mathcal{M}}(\mathcal{L}(M, \alpha))$ .

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = \frac{d\theta}{\cos \theta d\phi} dy = \frac{d\theta}{\cos \theta} \text{ car : } dx = d\phi \\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan \alpha} = d\phi \cot \alpha. \end{cases}$$

Sans-doute Mercator a utilisé alors une heuristique lui permettant de s'arrêter ici du point de vue analytique. Détaillons là : puisque nous avons deux formulations fonctionnelles du graphe image d'une loxodrome, elles doivent être consistantes. On pense bien évidemment au comportement aux bornes de ces expressions. Tout d'abord, si  $\alpha = 0 \Rightarrow \cot \alpha = \infty$ , cela signifie qu'on se trouve sur un méridien, ce qui est équivalent à dire que  $d\phi = 0$ . Or il existe une infinité de couples  $(M; M')$  tels que  $M : (\phi; \theta)$  et  $M' : (\phi; \theta + d\theta)$  du graphique satisfaisant la première relation fonctionnelle. Cela pose un problème d'inconsistance que nous allons résoudre par une transformation du domaine de définition de  $\theta$ . Si nous basculons le domaine de définition par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$ , alors nous aurons pour la valeur de l'azimut nulle :

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{d\theta}{\cos \theta} \rightarrow \infty.$$

Ainsi, nous aurons une indétermination qui se confrontera idéalement par l'utilisation des deux formules, pour assurer une complétude des représentations. Nous déduisons que pour aboutir à la projection nous devons effectuer le changement de variables :  $\theta \mapsto \theta + \frac{\pi}{2}$ . À partir de ce point, nous disons que Mercator possédait tous les éléments pour satisfaire ses préoccupations. Toutefois l'expression de la fonction analytique de  $y = f(x)$  fut élucidée par Gudermann, sous la forme :

$$y = \ln \left[ \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

Nous reviendrons plus loin sur le calcul de cette formule, mais elle nécessite l'utilisation d'un cadre formel et de calcul purement mathématiques. Néanmoins une chose importante que nous dit Mercator est que par la seconde formule :  $y = \phi \cot \alpha$ . Qui nous permet de déterminer l'équation rigoureuse de la loxodromie [5] :

$$\boxed{e^{\phi \cot \alpha} = \tan \left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)}.$$

**Une interprétation de la projection d'un méridien.** On remarque alors que les parallèles qui se répartissent de manière amorphe et uniforme sur la sphère le long de méridiens, possèdent des projections qui sont orthogonale aux projections des méridiens. Mais le développement sur l'intérieur du tube révèle une distribution équivalente entre une expression de la tangente d'un parallèle qui vaut l'exponentielle d'un arc parallèle projeté. La projection est un développement qui change la forme (on passe d'un méridien donc un cercle à une droite), on dira que c'est une anamorphose.

**Propriétés** Mercator partit de l'idée de projeter les loxodromes sur le canevas obtenu à partir de l'intérieur du tube.



FIGURE 5 – Carte de Mercator (Source Wikipédia).

Précisons que si la ligne droite entre deux points d'une carte obtenue par la projection de Mercator n'est alors pas le plus court chemin entre les deux images réciproques sur la sphère.

Bien que les méridiens soient également espacés, suivant une identité entre la répartition sur la sphère et sur la projection sur le tube cylindrique ; les parallèles auront une projection décalées par rapport à l'original sur la sphère. L'espacement entre deux parallèles étant une fonction croissante par le mécanisme de projection. On remarque grâce au calcul que la dilatation<sup>4</sup> est d'un facteur  $\frac{1}{\cos\theta}$ . Lorsque  $\theta = \frac{\pi}{2}$  on se retrouve à l'infini, les pôles ont des images qui sont des points à l'infini. L'interprétation géométrique d'un point de vue qualitatif de la projection de Mercator est intéressante à deux titres au moins. Il suffit de modifier légèrement l'expression par passage à l'exponentielle naturelle, et nous obtenons la relation :

$$e^y = \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

Nous sommes interpellés sur deux points mettant en relation l'étendue dilatée et amorphe d'une forme :

1. On rapproche donc l'exponentielle naturelle d'un dilaté, d'une grandeur passé en argument de la tangente, autrement dit la même grandeur représentée en amorphe sur le cercle.
2. Il existe une bijection entre l'exponentielle des points dilatés et le méridien restreint avec l'exclusion des pôles. Si l'on pratique non pas la projection inverse, mais qu'on considère la transformation initiale comme un développement ; alors en appliquant la transformation inverse du développement via ce qu'on appellera la représentation exponentielle, nous munissons le cercle d'un exponentielle naturelle que nous voudrions bien rapprocher de l'exponentielle complexe, même si le domaine de définition de l'exponentielle naturelle paraît un obstacle. Ce sera l'objet d'une partie de ce livre.

Nous trouvons beaucoup d'autres types de projections stéréographiques, très esthétiques. Le mathématicien Lambert à qui l'on doit la démonstration de l'irrationalité de  $\pi$  ayant beaucoup contribué au développement de cette branche de la géométrie.

## 2.3 Les cartes terrestres

La cartographie du territoire a mis longtemps à émerger en tant que réalisation concrètes précise et fiables. Il fallut attendre l'invention de l'imprimerie et

---

4. Le lecteur pourra consulter la page wiki qui donne des exemples de biais de représentation à l'échelle des continents : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Projection\\_de\\_Mercator](http://fr.wikipedia.org/wiki/Projection_de_Mercator).

la découverte des nouveaux mondes par les navigateurs. D'après Bigourdan [2], si Vauban prit au sérieux les travaux topographiques, il n'existait aucune carte militaire à l'époque. La première carte fut dressée au XVIII<sup>e</sup> siècle par un ingénieur au service de Condé [2], elle décrivait le cours du Rhin. Mais on mentionnera en outre la carte des chasses établie à partir de 1764, relevant davantage d'un chef-d'œuvre artistique. Vers 1750, une société privée dirigée par la famille Cassini commença à dresser les premières cartes sérieuses du royaume. Le travail s'étala sur quatre générations, leur contra fut toutefois ôté pendant la révolution sous le motif que l'ouvrage engageait la nation.

### 2.3.1 La méthode de relevé par triangulation

La méthode par triangulation était utilisée pour relever des positions. Elle consistait en un affinement et une généralisation de la méthode de Thalès pour procéder à des mesures et tracer des cartes. Concrètement cela revenait à construire une suite de polyèdres contigus, de telle manière à déterminer des triangles de base où le calcul trigonométrique permettait de déterminer les distances. Le passage d'une trigonométrie dans le plan à une trigonométrie sphérique (qui était connue de Ptolémée) fut une des principales difficultés, ajoutée à des méthodes développées par Legendre en particulier. Précisons que grâce à un procédé de triangulation entre deux sites d'observation situés au Cap et à Berlin, une bonne approximation de la distance terre-lune fut aussi calculée dès 1751.

**Les cartes Cassini** partaient de la réalisation d'un maillage du terrain, conduisant à dessiner des chaînes polygonales. Plus précisément, le territoire fut découpée en plusieurs niveaux : en partant d'un découpage en surfaces rectangulaires, où étaient menées trois strates de triangulation. Alors que les deux premières impliquaient des observations astronomiques et relevaient en conséquence, du bureau des longitudes, la troisième concernait des ingénieurs du cadastre.



fut par la méthode de triangulation appliquées à ces résultats que fut déterminé le mètre étalon.

**Définition 6** (Cercle répétiteur de Borda (Wikipédia)). « *Le cercle répétiteur permet de mesurer un angle avec précision, en répétant plusieurs fois la mesure sans revenir au zéro : la précision de la mesure est d'autant plus grande que le nombre de mesures est élevé.* »



FIGURE 7 – Cercle répétiteur de Borda.

Le principal problème de traitement des données fut solutionné par Legendre qui démontra un théorème sur l'analyse des triangles sur une sphéroïde, pour passer d'un relevé de triangulations entre deux points à la détermination de l'arc méridien.

**La mesure de l'excentricité de la terre** La triangulation ne servait pas qu'à établir des cartes. On l'utilisa également pour déterminer la forme exacte de la terre, où deux hypothèses s'opposaient, était-elle :

1. Une ellipsoïde de révolution aplatie.
2. Une ellipsoïde allongée aux pôles.

La solution consista à mesurer la longueur de degré d'un arc méridien. Une équipe française conduite par Clairaut et Mupertuis en Laponie (1736), et La Condamine : Pérou (1748) menèrent à ce titre des expériences. Voici comment Taton [?] nous

présente la problématique : « L'étude directe de la courbure du méridien s'effectue à partir de la mesure de la distance qui sépare deux stations situées sur le même méridien, et la mesure de leur différence de latitude, qui donne l'angle des leurs verticales. Le rayon de courbure de l'arc mesuré et le rayon de la terre si celle-ci est sphérique, dans l'hypothèse contraire, la courbure variera selon la latitude moyenne de l'arc. ».

### 2.3.2 Questionnements et évolution des cartes

En 1802 des nouvelles interrogations font jour, ainsi celle des militaires qui demandaient la mention de l'altitude sur les cartes. D'un autre côté, les physiciens Fizeau et Cornu constituèrent leur propre triangulation pour procéder à une expérience sur le calcul de la vitesse de la lumière. Pour terminer cette approche historique, nous mentionnerons que la cartographie fit des progrès considérables lors des guerres napoléoniennes ou encore lors du congrès de Vienne (1815). Les cartes Cassini furent alors remplacées en 1882 par la carte d'état-major. Elle se composait de 283 feuilles, au  $\frac{1}{80000}$ <sup>5</sup>. À la faveur des développements des procédés photographiques, on utilisa ces documents jusqu'en 1958.

Relativement au passage de de la géode à une représentation sphérique, nous mentionnerons le théorème d'uniformisation de Poincaré-Keobe qui autorise à conserver la conformité et d'utiliser une métrique homogène :

**Théorème 2.** *Toute surface peut-être uniformisée par l'une des trois géométries : euclidienne, sphérique ou hyperbolique.*

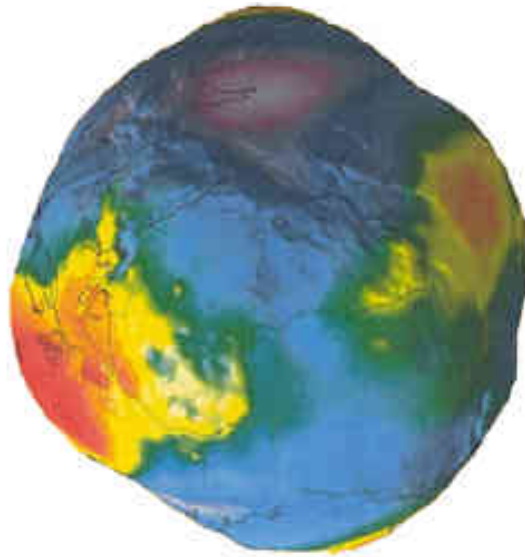


FIGURE 8 – La planète Terre (Source Wikipédia).

---

5. C'est à dire que 1 cm sur la carte représentait 80 000 cm, ou encore 0.8 km sur le terrain.

Les problèmes de cartographie sont loin d'être épuisés, ils restent liés à des questions d'optimisation. Ainsi ils soutiennent l'activité de recherche autant qu'ils nourrissent des gains de productivité pour l'économie et l'industrie.

### 3 La projection anamorphique

étymologiquement anamorphose dérive du grec signifiant état d'une transformation. Si en peinture l'anamorphose dé-figure l'image originale, ce sera pour la déformer. En cartographie, la modification des distance d'une projection stéréographique par le procédé de Mercator est une forme d'anamorphose qui ne modifie pas les formes dans l'infiniment petit. Si elle reste un genre particulier d'anamorphose, ces transformations furent avant tout l'objet de thématiques picturales, de théories que nous présentons rapidement.

## 4 Interprétation de la transformation de Mercator

### 4.1 La projection d'une carte sphérique dans le plan complexe

Revenons à l'expression de la formule de Gudermann que nous présentons en fonction de  $\theta + \frac{\pi}{2}$  :

$$e^y = \tan\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right) \Leftrightarrow y = \ln\left[\tan\left(\frac{\theta + \frac{\pi}{2}}{2}\right)\right].$$

Nous avons donc l'expression de l'image d'une longitude, la dilatation étant constante pour une latitude donnée de la sphère et pour tout méridien de celle-là. Si nous prenons une loxodrome, l'équation qui en résulte décrit la projection pour un méridien  $\phi$  et un azimut  $\alpha$  donnés et renvoie vers une droite d'équation  $x = \phi \cot \alpha = Cte$  sur le canevas  $P$ . On procède par un découpage du canevas par des droites orthogonales à l'image de l'équateur, dont l'image réciproque par la projection se trouve être un méridien précis qui servira de méridien témoin de la loi des latitudes croissantes (ou de la dilatation). De plus, nous conservons la formule de Gudermann, que nous dit-elle d'un point de vue topologique qualitatif ?

Pour cela, nous envisageons la section de la sphère par un plan passant par le méridien témoin et l'axe de révolution de la sphère  $S^2$  qui détermine un cercle  $C_{0,\phi}$ . D'après notre transformation de base, nous pouvons expliciter le cercle en tant que co-domaine d'une transformation s'appliquant que un demi-cercle  $\frac{1}{2} - \{C_{1,\phi}\}$ , nous procédons juste à calage des domaines avec ceux définis par  $\Pi_{\mathcal{M}}$  ce que nous représentons dans la figure ci-dessous :

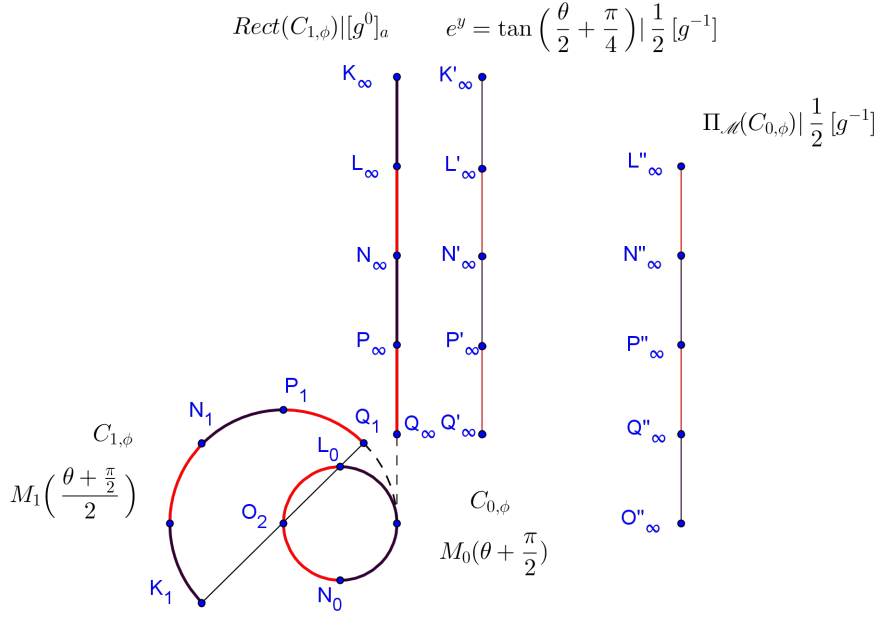


FIGURE 9 – Projection de Mercator sur un méridien témoin.

On commentera plusieurs points sur cette transformation. Tout d'abord, pour un point de  $C_{1,\phi}$  de mesure angulaire  $\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}$ , nous faisons correspondre exactement un point de  $C_{0,\phi}$  de mesure angulaire  $\theta + \frac{\pi}{2}$ . De plus la développée rectifiée de  $C_{1,\phi}$  va donner exactement l'expression de la fonction de Gudermann, nous faisons simplement un recalage d'un sous-domaine par une condition initiale : c'est la nécessité de décaler de  $\frac{\pi}{2}$  les éléments du co-domaine, soit imposant de décaler de  $\frac{\pi}{4}$  le domaine sur lequel s'applique la fonction  $\cos$  ; puis le fait que le co-domaine de mesure angulaire  $[0; \frac{\pi}{2}]$  sur  $C_{0,\phi}$  renvoie comme image réciproque aussi bien le domaine de mesure angulaire  $[0; \frac{\pi}{4}]$  sur  $C_{1,\phi}$  que  $[\pi; \frac{5\pi}{4}]$  sur  $C_{1,\phi}$ . Pour être clair la fonction est la même, nous pouvons donc translater l'image de l'intervalle correspondant pour qu'il coïncide avec  $\Pi_{\mathcal{M}}$ .

Une remarque s'impose alors sur la granularité retenue dans l'expression de la développée sous sa forme native dilatée. En premier lieu, nous sommes passé au niveau d'agraindissement immédiatement inférieur par le passage à l'exponentielle bornée (pour ne pas qu'elle soit identifiée à la tangente suivant le grain  $[g^0]$  qui tend vers l'infini. Mais ici nous partons du grain  $[g^0]$  de  $C_{0,\phi}$ . Or l'expression de  $\frac{1}{2}C_{1,\phi}$  qui est en bijection avec  $C_{0,\phi}$  peut se voir comme la dilatation de rapport un demi de  $C_{0,\phi}$ , soit du grain de  $[g^0]$  ainsi que nous l'avons aussi montré. Aussi nous aboutissons alors à une détermination qualitative de la projection de Mercator qui met en évidence une dilatation et un grain  $\frac{1}{2}[g^{-1}]$  pour un grain de l'image

réciroque valant  $[g^0]$  sur la sphère  $S^2$ . Nous interprétons alors la projection de Mercator, ni plus ni moins que comme la projection de la carte terrestre sur la sphère  $S^2$  dans le plan complexe. En effet, nous reproduisons exactement les mêmes constructions par rotation de notre méridien témoin. Un argument de force viendra confirmer ce que nous avançons. Pour une droite donnée sur le canevas, procédons à une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  de cette droite. Cela correspond sur la sphère à une modification de l'azimut de  $\frac{\pi}{2}$ . Après avoir translaté le repère complexe au point d'intersection de nos deux droites, par le changement de variable l'équation de la droite transformée sera  $y = \cot(\alpha + \frac{\pi}{2})\phi' = -\cot(\alpha)\phi' = e^{i\frac{\pi}{2}} \cot(\alpha)\phi'$  qui se comprend en tant que rotation dans le plan complexe de  $\frac{\pi}{2}$ .

**Théorème 3** (La projection de Mercator). *Le planisphère obtenu par la projection de Mercator est l'expression de la carte de la terre sur une sphère, dans le plan complexe. Le plan complexe étant ici dilaté de façon hétérogène, de telle sorte qu'on passe de l'unité amorphe à l'unité imaginaire pure et de l'unité imaginaire pure à l'exponentielle complexe sur l'axe des ordonnées, en conservant un axe des abscisses amorphe.*

Le cercle unitaire complexe étant l'expression du grand cercle à l'infini par changement de niveau d'agraindissement, le passage à la rectification et l'application de la réciroque autorisant à se figurer le canevas de la projection de Mercator. Le chassis se déterminant aisément par une équivalence entre l'unité amorphe pur et le dilaté de niveau un, de mesure  $\pi$ . Ce rapport entre la dilatation de premier niveau et celle de niveau zéro étant linéaire, elle est transparente dans la projection de méridiens de la sphère.

## Références

- [1] Ghys E. Représenter les mondes - i. <http://images.math.cnrs.fr/Representer-les-mondes.html>, 2010.
- [2] Bigourdan G. La carte de france, 1899.
- [3] Baltrušaitis J. *Les perspectives dépravées - Les anamorphoses*. Arts. Champs, 2 edition, 1996.
- [4] Kline M. *Mathematical Thought from ancient to modern times*, volume 2. BOD, 2 edition, 1972.
- [5] D'Hollander R.. *Loxodromie et projection de Mercator*. Sciences et Histoires. Institut océanographique Paris-Monaco, 1 edition, 2005.
- [6] Olivier Y.. Classification des formes. <http://www.yann-ollivier.org/carto/carto2.php>.