

Construction des nombres complexes

Suivant une méthode algébrique

Hugues Genvrin

Juillet 2015

1 La construction

1.1 La relation de Hamilton entre $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$

Hamilton expose sa théorie des couples algébriques dans un mémoire lu devant l'Académie royale d'Irlande en 1833 et en 1835, publié en 1837 dans les *Transactions* de l'Académie sous le titre « *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time* ». Il y définit, sur les couples de réels, une addition et une multiplication que nous reprenons ici sous le nom de *relation de Hamilton*.

Conventions d'écriture. Nous travaillerons sur des couples considérés tantôt comme des vecteurs, tantôt comme des nombres. Pour les distinguer, les couples écrits en gras désignent des vecteurs : $\mathbf{e}_1 = (\mathbf{1}, \mathbf{0})$ et $\mathbf{e}_2 = (\mathbf{0}, \mathbf{1})$ sont les vecteurs unitaires du plan cartésien. Les couples écrits en caractères ordinaires, comme $(1, 0)$ et $(0, 1)$, désignent des nombres.

Les deux opérations. Pour tous couples $z = (x, y)$ et $z' = (x', y')$ de $\mathbb{R}^2$, on pose :

$$\begin{cases} z \cdot z' = (xx' - yy', xy' + x'y), \\ z + z' = (x + x', y + y'). \end{cases}$$

La première est la multiplication de Hamilton, la seconde l'addition terme à terme.

Le cadre. Hamilton raisonne sur des couples de points, mais son intention première est d'aboutir à des *nombres*, fussent-ils à deux dimensions. Pour garder trace de cette double nature, nous distinguons trois objets construits sur le même ensemble de couples :

- E , le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$, muni de l'addition et de la multiplication par un réel, rapporté à la base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$;
- $F = t_H(E)$, le même ensemble muni en outre de la multiplication de Hamilton, t_H désignant l'application qui transporte un vecteur de E dans F , où l'on sait le multiplier ;
- K_F , l'ensemble F vu comme un ensemble de nombres : nous montrerons à la section 2 que c'est un corps.

Nous montrerons alors que F est un espace vectoriel sur K_F . Sur ce corps plus riche que $\mathbb{R}$, F est de dimension 1, de base $\mathcal{B}' = ((0, 1))$, alors que E est de dimension 2 sur $\mathbb{R}$. Vu comme espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, F reste de dimension 2, de base $(1, \imath)$ où $1 = (1, 0)$ et $\imath = (0, 1)$.

Coordonnées polaires. On se réserve la possibilité de repérer un point M du plan, distinct de l'origine, par ses coordonnées polaires $\rho = OM$ et $\theta = (\mathbf{e}_1, \widehat{OM})$:

$$\begin{cases} x_M = \rho \cos \theta, \\ y_M = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

1.2 Quelques calculs élémentaires et identités dans F

Les éléments de F sont ceux de E ; les calculs qui suivent se font dans F , où l'addition et la multiplication sont des lois internes.

Produits des vecteurs de base.

$$\begin{cases} (1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 1) \cdot (1, 0) = (0, 1), \\ (1, 0)^2 = (1, 0), \\ (0, 1)^2 = (-1, 0) = -(1, 0). \end{cases}$$

Les réels dans F . Pour tous réels x, x', y' :

$$\begin{cases} (x, 0) \cdot (1, 0) = (x, 0) = x(1, 0), \\ (0, x) \cdot (1, 0) = (0, x) = x(0, 1), \\ (x, 0) \cdot (x', y') = (xx', xy') = x(x', y'). \end{cases}$$

La dernière égalité montre que multiplier par le couple $(x, 0)$ revient à multiplier par le réel x : c'est ce qui permettra d'identifier le réel x au couple $(x, 0)$.

Identities remarquables.

$$\begin{aligned} (x, y)^2 &= (x^2 - y^2)(1, 0) + 2xy(0, 1), \\ (x, y) \cdot (x, -y) &= (x^2 + y^2, 0) = (x^2 + y^2)(1, 0), \\ (x, y)^3 &= (x^2 - y^2, 2xy) \cdot (x, y) = (x^3 - xy^2 - 2xy^2, x^2y - y^3 + 2x^2y) \\ &= (x^3 - 3xy^2)(1, 0) + (3x^2y - y^3)(0, 1). \end{aligned}$$

2 Création d'un espace vectoriel F sur un corps de nombres K_F

L'addition et la multiplication sont des lois de composition internes sur F . Dans toute cette section, on se donne $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$ et $z'' = (x'', y'')$.

2.1 Deux structures de groupes commutatifs

2.1.1 Le groupe abélien $(F, +)$

L'addition se fait coordonnée par coordonnée ; elle hérite donc directement des propriétés de l'addition des réels. Elle est associative et commutative, admet pour élément neutre $e_+ = (0, 0)$, et tout élément z admet un opposé $-z = (-x, -y)$. Ainsi $(F, +)$ est un groupe abélien.

2.1.2 Le groupe abélien $(F^*, \cdot)$

L'élément $(0, 0)$ ne peut pas être inversible, puisque $(0, 0) \cdot z = (0, 0)$ pour tout z . On travaille donc sur $F^* = F \setminus \{(0, 0)\}$.

Associativité. D'une part :

$$\begin{aligned} z \cdot (z' \cdot z'') &= (x, y) \cdot (x'x'' - y'y'', x'y'' + x''y') \\ &= (xx'x'' - xy'y'' - yx'y'' - yx''y', xx'y'' + xx''y' + yx'x'' - yy'y''). \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} (z \cdot z') \cdot z'' &= (xx' - yy', xy' + x'y) \cdot (x'', y'') \\ &= (xx'x'' - yy'x'' - xy'y'' - x'y'y'', xx'y'' - yy'y'' + xx''y' + x'x''y). \end{aligned}$$

Les deux résultats sont égaux terme à terme : $z \cdot (z' \cdot z'') = (z \cdot z') \cdot z''$, la multiplication est associative.

Élément neutre. On vérifie que $(x, y) \cdot (1, 0) = (x \cdot 1 - y \cdot 0, x \cdot 0 + 1 \cdot y) = (x, y)$. Cet élément neutre est unique : si e' en est un autre, alors $e' = e' \cdot (1, 0) = (1, 0)$. On le note $e_\times = (1, 0)$.

Inverse de tout élément non nul. Soit $z = (x, y) \neq (0, 0)$, de sorte que $x^2 + y^2 > 0$. La deuxième identité remarquable donne $(x, y) \cdot (x, -y) = (x^2 + y^2)(1, 0)$. En divisant par le réel non nul $x^2 + y^2$:

$$z^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right), \quad \text{et l'on a bien} \quad z \cdot z^{-1} = e_\times.$$

On retrouve ce résultat en résolvant le système $xx' - yy' = 1, xy' + x'y = 0$ d'inconnues x', y' . L'unicité de l'inverse découle de l'associativité.

Commutativité. Les expressions $xx' - yy'$ et $xy' + x'y$ sont symétriques en (x, y) et (x', y') , puisque la multiplication des réels est commutative. Donc $z \cdot z' = z' \cdot z$ et $(F^*, \cdot)$ est un groupe abélien.

2.2 Une structure d'anneau, puis de corps

2.2.1 Distributivité

La multiplication étant commutative, il suffit de prouver la distributivité à gauche :

$$\begin{aligned} z \cdot (z' + z'') &= (x, y) \cdot (x' + x'', y' + y'') \\ &= (x(x' + x'') - y(y' + y''), x(y' + y'') + (x' + x'')y) \\ &= ((xx' - yy') + (xx'' - yy''), (xy' + x'y) + (xy'' + x''y)) \\ &= z \cdot z' + z \cdot z''. \end{aligned}$$

2.2.2 $(F, +, \cdot)$ est un corps commutatif

Nous avons établi que $(F, +)$ est un groupe abélien, que la multiplication est associative, commutative, admet un élément neutre $e_\times = (1, 0)$, et qu'elle est distributive sur l'addition : $(F, +, \cdot)$ est un anneau commutatif unitaire. De plus $e_\times \neq e_+$ et tout élément non nul est inversible : $(F, +, \cdot)$ est un corps commutatif. Vu comme ensemble de nombres, nous le notons K_F .

2.3 Une structure d'espace vectoriel sur F

2.3.1 L'espace vectoriel F sur K_F

On munit F de son addition comme loi interne, et de la loi externe

$$K_F \times F \rightarrow F, \quad (k, z) \mapsto k \cdot z.$$

Les axiomes d'espace vectoriel, à savoir $(k + k') \cdot z = k \cdot z + k' \cdot z$, $k \cdot (z + z') = k \cdot z + k \cdot z'$, $(kk') \cdot z = k \cdot (k' \cdot z)$ et $1 \cdot z = z$, découlent directement de la distributivité, de l'associativité et de l'élément neutre établis plus haut. Comme K_F est un corps, F est un espace vectoriel sur K_F .

Base de l'espace vectoriel F . Tout vecteur s'écrit $\mathbf{z} = x(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + y(\mathbf{0}, \mathbf{1})$. Dans F , on a $(\mathbf{1}, \mathbf{0}) = -(\mathbf{0}, \mathbf{1})^2$, d'où :

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= -x(\mathbf{0}, \mathbf{1})^2 + y(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \\ &= (y - x(\mathbf{0}, \mathbf{1})) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (y, -x) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}). \end{aligned}$$

On vérifie : $(y, -x) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (y \cdot 0 - (-x) \cdot 1, y \cdot 1 + 0 \cdot (-x)) = (x, y)$. Le seul vecteur $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ engendre donc F .

Cette famille est libre : si $k = (a, b)$ vérifie $k \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$, alors $(-b, a) = (0, 0)$, soit $a = b = 0$.

La famille $\mathcal{B}' = ((\mathbf{0}, \mathbf{1}))$ est libre et génératrice : c'est une base de F , qui est donc de dimension 1 sur K_F . Tout élément non nul formerait aussi une base ; le choix de $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ fait apparaître la rotation étudiée ci-dessous.

Passage de F à E en coordonnées cartésiennes. Le vecteur de F de coordonnée $k = (x, y)$ dans la base $\mathcal{B}'$ est :

$$(x, y) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = (-\mathbf{y}, \mathbf{x}) = -y(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + x(\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

On remarque l'échange des coordonnées et le changement de signe de la première. Réciproquement, le vecteur $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ de E a pour coordonnée $(y, -x)$ dans $\mathcal{B}'$. Rappelons que les vecteurs de F s'expriment dans la base $\mathcal{B}'$, et ceux de E dans la base orthonormée $\mathcal{B}$. Les coordonnées polaires éclairent cette transformation.

Passage de F à E en coordonnées polaires. Avec $x = \rho \cos \theta$ et $y = \rho \sin \theta$:

$$\begin{aligned} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}) &= \rho(-\sin \theta, \cos \theta) \\ &= \rho \cos(\theta + \frac{\pi}{2})(\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \rho \sin(\theta + \frac{\pi}{2})(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \end{aligned}$$

qui est un vecteur de E . Réciproquement, pour un vecteur de E donné en coordonnées polaires :

$$\rho \cos \theta (\mathbf{1}, \mathbf{0}) + \rho \sin \theta (\mathbf{0}, \mathbf{1}) = \rho \left(\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \right) \cdot (\mathbf{0}, \mathbf{1}).$$

Pour des repères de même origine, le passage des coordonnées de E à la coordonnée dans F est donc une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, et le passage inverse une rotation d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Autrement dit, multiplier par $(0, 1)$ revient à tourner de $+\frac{\pi}{2}$.

Construction de l'exponentielle complexe. Pour tout réel θ , posons

$$u(\theta) = \cos \theta (1, 0) + \sin \theta (0, 1).$$

La première identité remarquable donne $u(\theta)^2 = (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta, 2 \cos \theta \sin \theta) = u(2\theta)$. Plus généralement, les formules d'addition du cosinus et du sinus donnent, pour tous réels θ et θ' :

$$u(\theta) \cdot u(\theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta', \cos \theta \sin \theta' + \sin \theta \cos \theta') = u(\theta + \theta').$$

La fonction u vérifie donc

$$u(\theta + \theta') = u(\theta) \cdot u(\theta'), \quad u(0) = (1, 0),$$

qui est l'équation fonctionnelle caractéristique de l'exponentielle : $f(a+b) = f(a)f(b)$, $f(0) = 1$. (La seule relation $u(\theta)^2 = u(2\theta)$ ne suffirait pas : elle admet bien d'autres solutions.)

Dérivons u coordonnée par coordonnée :

$$u'(\theta) = (-\sin \theta, \cos \theta) = (0, 1) \cdot u(\theta).$$

Ainsi u est solution de $u' = (0, 1) \cdot u$ avec $u(0) = (1, 0)$, exactement comme $\theta \mapsto e^{a\theta}$ est l'unique solution réelle de $f' = af$ avec $f(0) = 1$. Posons désormais $1 = (1, 0)$ et $\imath = (0, 1)$; l'analogie justifie la notation

$$e^{\imath\theta} := u(\theta) = \cos \theta + \imath \sin \theta,$$

qui vérifie $e^{\imath(\theta+\theta')} = e^{\imath\theta} e^{\imath\theta'}$, $e^{\imath 0} = 1$ et $\frac{d}{d\theta} e^{\imath\theta} = \imath e^{\imath\theta}$, comme l'exponentielle réelle. On peut aussi définir l'exponentielle sur K_F par la série $\sum_{n \geq 0} z^n / n!$; en séparant les termes pairs et impairs et en utilisant $\imath^2 = -1$, on retrouve $e^{\imath\theta} = \cos \theta + \imath \sin \theta$.

Tout élément non nul $z = (x, y)$ s'écrit alors, avec $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ et θ un argument de z :

$$z = \rho e^{\imath(\theta+2k\pi)} = \rho \cos \theta (1, 0) + \rho \sin \theta (0, 1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

L'exponentielle complexe a été construite à partir de l'exponentielle réelle et des seules opérations de Hamilton : l'approche vectorielle a permis de construire l'ensemble des nombres complexes.

Passage des éléments de E à ceux de K_F . En composant le passage τ_1 d'un vecteur de E à un vecteur de F et la transformation τ_2 d'un vecteur de F en une quantité numérique de K_F , on obtient la fonction de quantification d'un vecteur de E : $\tau = \tau_2 \circ \tau_1$.

3 La construction du plan complexe $\mathbb{C}$

Le corps K_F , où l'on identifie le réel x au couple $(x, 0)$ et où l'on note $\imath = (0, 1)$, est le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme

$$z = \rho e^{\imath(\theta+2k\pi)} = \rho \cos \theta + \imath \rho \sin \theta = a + \imath b, \quad k \in \mathbb{Z},$$

où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Le réel ρ est le *module* de z , noté $|z|$; le réel θ , exprimé en radians et défini à $2k\pi$ près, est un *argument* de z . La première expression est la forme exponentielle, la deuxième la forme trigonométrique, la troisième la forme algébrique : a est la partie réelle de z , notée $\Re(z)$, et b sa partie imaginaire, notée $\Im(z)$.

Pour $\theta = \pi$, on obtient l'identité traditionnellement attribuée à Euler :

Théorème 1 (Corollaire).

$$e^{i\pi} = -1$$

Si l'espace vectoriel F permettait de travailler sur des éléments du plan euclidien, nous procédons maintenant à une réification de $\mathbb{C}$ en un plan, appelé *plan complexe* ou plan d'Argand–Cauchy. Au nombre complexe $z = a + ib$ on associe le point $M(a, b)$, appelé *image* de z ; réciproquement, z est l'*affixe* du point M . Le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la distance OM .

Le *conjugué* de $z = a + ib$ est $\bar{z} = a - ib$; la deuxième identité remarquable s'écrit $z\bar{z} = |z|^2$.

On en déduit les formules d'Euler¹, qui expriment le cosinus et le sinus à l'aide de l'exponentielle complexe :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{cases}$$

Géométriquement, la relation de Hamilton prend tout son sens : multiplier par i réalise la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et, plus généralement, multiplier par $e^{i\theta}$ réalise la rotation de centre O et d'angle θ .

Enfin, de $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ on déduit la formule de de Moivre, pour tout entier n :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$$

4 Construction géométrique de i

Cette dernière section propose une justification géométrique, plus intuitive, de la relation $i^2 = -1$.

Soit un plan $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2} = (x'Ox) \times (y'Oy)$. On munit l'axe $(x'Ox)$ de l'unité 1, et l'axe $(y'Oy)$ d'une unité q encore inconnue : le point de coordonnées (a, b) est noté $a + qb$.

Modélisons la rotation de centre O et d'angle θ . Appliquée à $z = \rho$, elle donne $z' = \rho \cos \theta + q\rho \sin \theta$ (figure 1, page 7).

Supposons que cette rotation agisse comme la multiplication par $\cos \theta + q \sin \theta$, image du point 1. Appliquée à un point quelconque $z = \rho \cos \varphi + q\rho \sin \varphi$, elle donne :

$$\begin{aligned} \text{Rot}(O, \theta)[z] &= (\cos \theta + q \sin \theta) (\rho \cos \varphi + q\rho \sin \varphi) \\ &= \rho \cos \theta \cos \varphi + q\rho (\cos \theta \sin \varphi + \sin \theta \cos \varphi) + q^2 \rho \sin \theta \sin \varphi. \end{aligned}$$

Pour $\rho = 1$ et $\theta = \varphi = \frac{\pi}{2}$, on a $z = q$ et l'on obtient $\text{Rot}(O, \frac{\pi}{2})[q] = q^2$.

Or, géométriquement, la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ envoie le point $(0, 1)$ sur le point $(-1, 0)$, d'où $\text{Rot}(O, \frac{\pi}{2})[q] = -1$. Il s'ensuit que $q^2 = -1$: en posant $i = q$, on a $i^2 = -1$. Réciproquement, avec $q^2 = -1$, le développement ci-dessus devient $\rho \cos(\theta + \varphi) + q\rho \sin(\theta + \varphi)$, qui est bien l'image de z par la rotation d'angle θ : l'hypothèse de départ est cohérente. Nous avons ainsi construit i et le passage $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2} \mapsto \mathcal{P}_{\mathbb{C}}$.

Cet argument suppose que la rotation agit multiplicativement : il éclaire la construction plus qu'il ne la remplace, la construction rigoureuse étant celle des sections précédentes.

Le corps $\mathbb{R}$ ayant été construit, et i étant constructible, $\mathbb{C}$ est constructible : c'est le corps $\mathbb{C} = \mathbb{R}(i)$, extension simple de degré 2 de $\mathbb{R}$.

1. Euler les publie dans l'*Introductio in analysin infinitorum* (1748) ; on en trouve déjà la trace dans une lettre adressée à Jean Bernoulli en 1740.



FIGURE 1 – Rotation d'angle θ appliquée à $z = \rho$.