

Construction du plan complexe

Hugues Genvrin

2 mai 2026

Présentation

On part du plan réel \mathbb{R}^2 , muni de son repère canonique (O, \vec{i}, \vec{j}) et de ses deux axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$. On note r l'endomorphisme de \mathbb{R}^2 dont l'action géométrique est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$:

$$r = \text{rot}_{O, \pi/2}.$$

Tout point $M \in \mathbb{R}^2$ s'écrit de manière unique

$$M = x\vec{i} + y\vec{j} = x\vec{i} + r(y\vec{i}),$$

puisque r envoie le vecteur unitaire de l'axe réel sur celui de l'axe imaginaire : $r(\vec{i}) = \vec{j}$. Cette écriture, abrégée en $M = x + ry$, manifeste deux choses :

- les deux axes $(x'Ox)$ et $(y'Oy)$ sont, en tant que droites réelles, abstraitement isomorphes à \mathbb{R} ;
- mais ils n'entrent pas symétriquement dans la structure : l'un sert de support à la partie « directe » (x), l'autre est atteint via l'action de r .

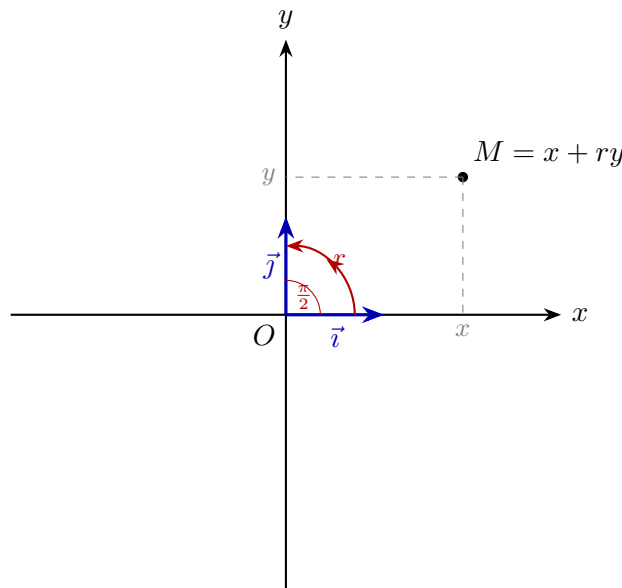
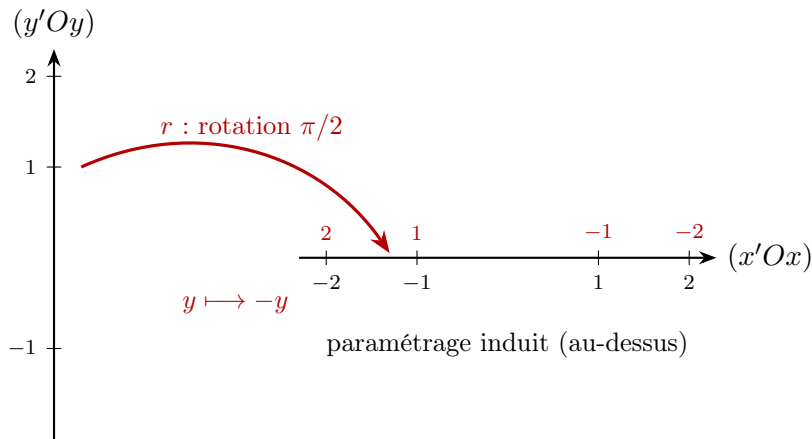


FIGURE 1 – Le plan \mathbb{R}^2 muni de la rotation r d'angle $\pi/2$: $r(\vec{i}) = \vec{j}$. Tout point M s'écrit $x + ry$.

L'opérateur r réalise un isomorphisme entre les deux droites, mais cet isomorphisme renverse l'orientation : si l'on transporte $(y'Oy)$ sur $(x'Ox)$ par r , le paramétrage induit envoie $y \mapsto -y$ relativement à l'orientation canonique de $(x'Ox)$. Les deux droites sont superposées comme ensembles de points, mais parcourues en sens opposés.

Autrement dit, \mathbb{R}^2 se présente comme le produit de deux copies de \mathbb{R} — l'une jouant le rôle de partie réelle, l'autre de partie imaginaire — articulées par la rotation r qui transporte l'une sur le support de l'autre au prix d'un renversement.



orientation canonique

FIGURE 2 – Renversement d'orientation : graduations en noir de $(x'Ox)$; en rouge, paramétrage induit par r depuis $(y'Oy)$.

Caractérisation algébrique

La donnée géométrique précédente détermine une relation algébrique non triviale satisfaite par r . En effet, la composée $r \circ r$ est la rotation d'angle π , c'est-à-dire la symétrie centrale :

$$r^2 = \text{rot}_{O, \pi} = -\text{Id}_{\mathbb{R}^2}.$$

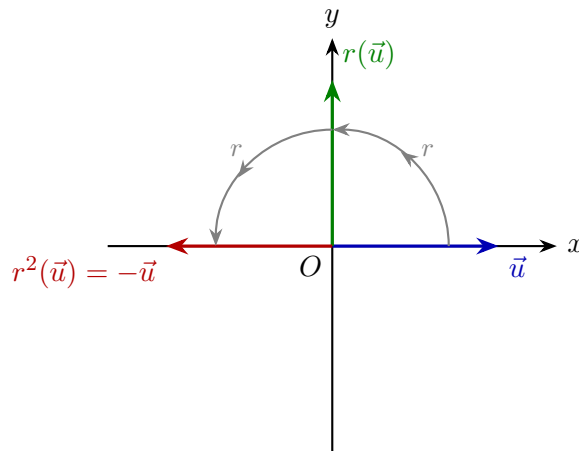


FIGURE 3 – L'identité $r^2 = -\text{Id}$: appliquer deux fois la rotation d'angle $\pi/2$ revient à inverser tout vecteur.

Cette identité $r^2 + \text{Id} = 0$ est précisément le polynôme minimal de l'unité imaginaire i sur \mathbb{R} . La sous-algèbre de $\text{End}(\mathbb{R}^2)$ engendrée par $\{\text{Id}, r\}$ est donc isomorphe à \mathbb{C} , l'isomorphisme étant donné par

$$a \text{Id} + b r \mapsto a + b i.$$

En faisant agir cette algèbre sur \mathbb{R}^2 — c'est-à-dire en posant

$$(a + b i) \cdot M := a M + b r(M)$$

— on munit \mathbb{R}^2 d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 1. Le plan réel devient ainsi le plan complexe.

Conclusion

On n'a rien ajouté au plan réel : on y a reconnu une structure déjà présente, latente dans l'existence d'un opérateur de rotation d'angle $\pi/2$. Ce qui distingue \mathbb{C} de \mathbb{R}^2 n'est pas un objet supplémentaire, mais l'identification de l'opérateur r comme satisfaisant l'équation $r^2 = -\text{Id}$, c'est-à-dire comme incarnant l'unité imaginaire i .