Contraposition par dualité d’ordre

Hugues Genvrin

1 Cadre : connecteurs vus comme relations

On travaille dans une algèbre de Boole $\mathbb{B}$ (par exemple $\{0, 1\}$), munie de l’ordre

$$a \leq b \iff (a \Rightarrow b) = 1.$$

On lit alors les connecteurs binaires comme des *relations* sur $\mathbb{B}$:

$$R_{\Rightarrow} = \leq, \qquad R_{\Leftarrow} = \geq, \qquad R_{\Leftrightarrow} = = \text{ (la diagonale).}$$

En particulier $A \Leftarrow B$ se lit $B \Rightarrow A$.

2 L’opérateur $\overline{}$: la dualité d’ordre

On *définit* le complémentaire d’un connecteur comme le **converse** de la relation associée (passage à l’ordre opposé) :

$$(a, b) \in \overline{R} \iff (b, a) \in R, \qquad \text{soit } \overline{R} = R^{\smile}.$$

Cette opération est *autonome* (elle envoie une relation sur une relation, donc un connecteur sur un connecteur), elle est *involutive* ($\overline{\overline{R}} = R$), et elle n’a rien à voir avec De Morgan.

Lois posées une fois pour toutes.

(L1) $\overline{\Rightarrow} = \Leftarrow$, car $(\leq)^{\smile} = \geq$;

(L2) $\overline{\Leftarrow} = \Rightarrow$, car $(\geq)^{\smile} = \leq$;

(L3) $\overline{\Leftrightarrow} = \Leftrightarrow$, car la diagonale est auto-converse : $(=)^{\smile} = =$;

(L4) le converse *distribue sur l’intersection et sur l’union* :

$$\overline{R \cap S} = \overline{R} \cap \overline{S}, \qquad \overline{R \cup S} = \overline{R} \cup \overline{S}.$$

$$\boxed{\overline{\Leftarrow} = \Rightarrow \quad \text{et} \quad \overline{\Rightarrow} = \Leftarrow}$$

Cet encadré est *immédiat* par (L1)–(L2) : il ne nécessite ni différence $\setminus$ ni manipulation préalable. C’est précisément l’étape par $\setminus$ qui, dans la version antérieure, introduisait l’erreur.

3 Le complémentaire de l’équivalence reste l’équivalence

L’équivalence, c’est « être à la fois $\leq$ et $\geq$ », donc, comme relations,

$$R_{\Leftrightarrow} = R_{\Leftarrow} \cap R_{\Rightarrow}. \tag{1}$$

Ici le « et » est l’**intersection de relations** $\cap$, à ne surtout pas confondre avec la conjonction vérifonctionnelle $\wedge : \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}$. En appliquant (L4) puis (L1)–(L2) :

$$\overline{\Leftrightarrow} = \overline{R_{\Leftarrow} \cap R_{\Rightarrow}} = \overline{R_{\Leftarrow}} \cap \overline{R_{\Rightarrow}} = R_{\Rightarrow} \cap R_{\Leftarrow} = R_{\Leftrightarrow}. \tag{2}$$

Aucune union n’apparaît, et donc aucun $\oplus$ (XOR). On obtient bien $\overline{\Leftrightarrow} = \Leftrightarrow$, de façon cohérente avec l’encadré précédent.

4 Contraposition

La clé est que le complément booléen sur les *éléments*, $a \mapsto \overline{a}$, est une involution *décroissante* (un anti-automorphisme du treillis) :

$$a \leq b \iff \bar{b} \leq \overline{a}. \tag{3}$$

Traduit en connecteurs, (3) donne directement

$$A \Rightarrow B \ = \ \overline{B} \Rightarrow \overline{A} \ = \ \overline{A} \Leftarrow \overline{B}.$$

Théorème 1 $\boxed{A \Rightarrow B \ \Leftrightarrow \ \overline{B} \Rightarrow \overline{A}.}$

Corollaire 1 *Si* $A \Rightarrow B = V$, *alors* $\overline{A} \Leftarrow \overline{B} = V$.

Corollaire 2 *Si* $A \Rightarrow B = F$, *alors* $\overline{A} \Leftarrow \overline{B} = F$.

Autrement dit, $A \Rightarrow B$ et $\overline{A} \Leftarrow \overline{B}$ ont *toujours* la même valeur : c'est exactement la contraposition. On le vérifie sur les quatre lignes (A, B) :

(A, B)	00	01	10	11
$A \Rightarrow B$	1	1	0	1
$\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$	1	1	0	1

Une unification

Sur les relations d'ordre $\Rightarrow, \Leftarrow, \Leftrightarrow$, le converse $\overline{}$ coïncide avec la négation des deux arguments $S(A, B) \mapsto S(\overline{A}, \overline{B})$: c'est une conséquence directe de (3) (le complément renverse l'ordre). C'est aussi cette même propriété antitone qui *est* la contraposition. Le même ressort fixe $\Leftrightarrow$, échange $\Rightarrow$ et $\Leftarrow$, et donne le théorème — sans jamais convoquer De Morgan ni $\oplus$.