

Théorie des coupures et théorie du grain

Hugues Genyvin

October 2026

Résumé

Nous relisons la construction des réels par les coupures de Dedekind dans le cadre de la théorie du grain. Nous montrons d'abord que tout nombre, et en particulier tout irrationnel, est la limite d'une suite de segments emboîtés dont les extrémités sont des nombres dyadiques adjacents ; au niveau des grilles, ces segments sont les grains qui contiennent le nombre. Nous montrons ensuite que la position d'une coupure, sur une jonction ou à travers un grain, distingue les nombres dyadiques des autres, et non les rationnels des irrationnels : $1/3$ traverse un grain à toutes les résolutions. Le critère exact porte sur la position relative de la coupure dans son grain, lue à travers la tour des résolutions. Les rationnels non dyadiques se tiennent à une distance minorée des jonctions, relativement à la finesse de la grille, ce qui définit un quasi-trou de la grille, et non de $\mathbb{R}$; avec un choix factoriel de n_∞ , ils occupent dans chaque grain la même position que dans $[0, 1]$, et la tour devient auto-similaire. Enfin, une grille hyperfinie n'a pas de trous : les trous de Dedekind apparaissent avec la promotion. La complétude du continu est l'image, par la promotion, de la discrétude des grilles.

1 Introduction

Dedekind [4] définit un nombre réel comme une *coupure* de $\mathbb{Q}$: une partition (A, B) de $\mathbb{Q}$ en deux classes non vides telles que tout élément de A soit inférieur à tout élément de B . Si la frontière entre A et B est un rationnel, la coupure le représente ; sinon, elle révèle un *trou* de $\mathbb{Q}$, et Dedekind décrète qu'elle définit un nombre nouveau, irrationnel. Cantor [5] obtient les mêmes nombres comme limites de suites de segments emboîtés.

La théorie du grain [1] décrit le continu comme la promotion d'une tour de grilles hyperfinies. Une coupure y a une image géométrique immédiate : une droite orthogonale au support de la grille, qui passe soit par un point de jonction entre deux grains, soit à travers un grain (figure 1). Nous étudions ce que cette image permet de dire des nombres réels.

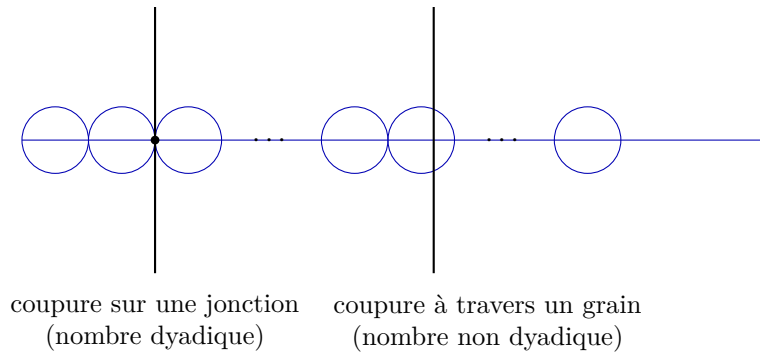


FIGURE 1 – Les deux positions possibles d'une coupure sur une grille.

Nos résultats sont les suivants :

1. tout nombre de $[0, 1[$ est la limite d'une suite de segments emboîtés à extrémités dyadiques adjacentes, qui sont ses grains (section 3) ;
2. la dichotomie « jonction / grain » sépare les dyadiques des non dyadiques, non les rationnels des irrationnels (section 4) ;
3. la rationalité se lit dans la position relative de la coupure dans son grain, à travers les résolutions (section 5) ;
4. les rationnels créent des quasi-trous de la grille, et un choix factoriel de n_∞ rend la tour auto-similaire (section 6) ;
5. les grilles n'ont pas de trous ; les trous de Dedekind naissent de la promotion (section 7).

2 Rappels et notations

Pour tout entier $N \geq 0$, standard ou hyperentier, la grille de résolution $-N$ découpe $[0, 1[$ en 2^N grains

$$g_\ell^N = [\ell 2^{-N}, (\ell + 1) 2^{-N}[, \quad 0 \leq \ell < 2^N.$$

Ses *jonctions* sont les points $\ell 2^{-N}$, $0 \leq \ell \leq 2^N$. Deux jonctions $\ell 2^{-N}$ et $(\ell + 1) 2^{-N}$ sont dites *adjacentes* : ce sont les extrémités d'un même grain. On note

$$\mathbb{D} = \{ \ell 2^{-N} : \ell \in \mathbb{Z}, N \in \mathbb{N} \}$$

l'ensemble des nombres dyadiques standard. Les grilles de la théorie du grain sont celles de résolution $-kn_\infty$, où n_∞ est un hyperentier et $k \geq 1$ [1, chap. 15]. La promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathbf{m} = \mathbb{R}$ est réalisée par la partie standard st.

Théorème 1 (Transfert). *Les énoncés du premier ordre vrais pour tous les entiers restent vrais pour tous les hyperentiers, et les énoncés vrais pour les ensembles finis restent vrais pour les ensembles hyperfinis et leurs parties internes.*

Pour $x \in [0, 1[$ et N entier ou hyperentier, on pose

$$\ell_N(x) = \lfloor 2^N x \rfloor, \quad \theta_N(x) = \text{frac}(2^N x) = 2^N x - \ell_N(x) \in [0, 1[.$$

Ainsi $g_{\ell_N(x)}^N$ est le grain de résolution $-N$ qui contient x , et $\theta_N(x)$ est la *position relative* de x dans ce grain : 0 sur la jonction de gauche, $1/2$ au milieu.

3 Segments dyadiques adjacents emboîtés

Théorème 2 (Segments emboîtés). *Soit $x \in [0, 1[$. Les segments*

$$I_N(x) = [\ell_N(x) 2^{-N}, (\ell_N(x) + 1) 2^{-N}], \quad N \in \mathbb{N},$$

vérifient :

1. *leurs extrémités sont deux nombres dyadiques adjacents à la résolution $-N$;*
2. *ils sont emboîtés : $I_{N+1}(x) \subset I_N(x)$;*
3. *leur longueur est 2^{-N} , et $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} I_N(x) = \{x\}$.*

Autrement dit, x est la limite commune des extrémités gauches et droites d'une suite de segments emboîtés à extrémités dyadiques adjacentes.

Démonstration. Le point 1 est la définition de $I_N(x)$. Pour le point 2, de $\ell_N \leq 2^N x < \ell_N + 1$ on tire $2\ell_N \leq 2^{N+1}x < 2\ell_N + 2$, donc $\ell_{N+1} \in \{2\ell_N, 2\ell_N + 1\}$, et I_{N+1} est la moitié gauche ou la moitié droite de I_N . Pour le point 3, $x \in I_N(x)$ pour tout N , et un réel $y \neq x$ vérifie $|y - x| > 2^{-N}$ dès que N est assez grand, donc $y \notin I_N(x)$. $\square$

Remarque 3 (Lecture binaire). Le choix, à chaque étape, entre la moitié gauche et la moitié droite de $I_N(x)$ est le chiffre binaire $b_{N+1} = \ell_{N+1} - 2\ell_N \in \{0, 1\}$ de x . La suite de segments emboîtés et le développement binaire $x = 0, b_1 b_2 b_3 \dots$ sont donc deux lectures du même objet.

Corollaire 4 (Les irrationnels). *Tout irrationnel $x \in [0, 1[$ est la limite d'une suite de segments emboîtés dont les extrémités sont des nombres dyadiques adjacents. De plus, x n'est jamais une extrémité de ces segments : il est à l'intérieur de chacun d'eux, et la suite est unique.*

Démonstration. L'existence est le théorème 2. Un irrationnel n'est pas dyadique, donc n'est égal à aucune extrémité $\ell 2^{-N}$; il est donc intérieur à chaque $I_N(x)$. Toute autre suite de segments dyadiques adjacents emboîtés contenant x doit, à chaque résolution, être le seul segment de longueur 2^{-N} contenant x en son intérieur, c'est-à-dire $I_N(x)$. $\square$

Remarque 5 (Le cas dyadique). Pour un nombre dyadique, l'unicité tombe : $1/2$ est l'extrémité commune de $[1/2 - 2^{-N}, 1/2]$ et de $[1/2, 1/2 + 2^{-N}]$ pour tout $N \geq 1$, et deux suites de segments emboîtés convergent vers lui. C'est la double écriture binaire $0, 1000 \dots = 0, 0111 \dots$. Les irrationnels, et plus généralement les non dyadiques, sont exactement les nombres pour lesquels la suite de segments emboîtés est unique.

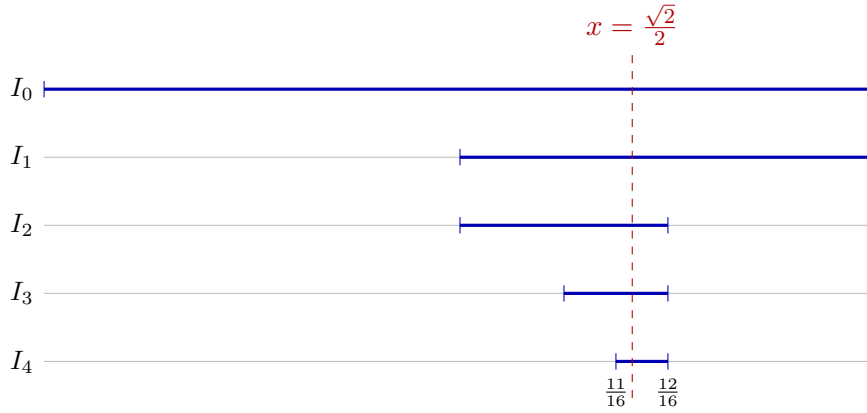


FIGURE 2 – Les segments $I_0 \supset I_1 \supset \dots \supset I_4$ contenant $\sqrt{2}/2$: à chaque niveau, les extrémités sont deux dyadiques adjacents, et l'on garde la moitié qui contient x .

Lecture dans la théorie du grain

Le segment $I_N(x)$ est, au bord droit près, le grain $g_{\ell_N(x)}^N$ qui contient x . Le théorème 2 reste vrai, par transfert, pour les résolutions hyperentières $N = kn_\infty$: les grains contenant x aux résolutions $-n_\infty, -2n_\infty, -3n_\infty, \dots$ forment une suite de grains emboîtés, dont les extrémités sont des jonctions adjacentes. C'est la construction des irrationnels par grains emboîtés, sur le modèle de celle de π par rectification du cercle [1].

Il y a cependant une différence importante avec la construction de Cantor : dans la théorie du grain, un seul niveau suffit.

Proposition 6 (Un seul niveau suffit). *Soit $x \in [0, 1[$ et N un hyperentier. Les deux extrémités du grain de résolution $-N$ qui contient x sont infiniment proches de x :*

$$\text{st}(\ell_N(x) 2^{-N}) = \text{st}((\ell_N(x) + 1) 2^{-N}) = x.$$

Démonstration. Les deux extrémités sont à distance au plus 2^{-N} de x , et 2^{-N} est infinitésimal. $\square$

La limite $N \rightarrow \infty$ de Cantor est donc remplacée, dans la théorie du grain, par une seule résolution illimitée suivie de la promotion. La suite de grains emboîtés aux niveaux $-kn_\infty$ est cohérente avec ce point de vue, mais elle n'est pas nécessaire pour atteindre x .

4 Jonction ou grain : la dichotomie dyadique

Une coupure tombe sur une jonction de la grille de résolution $-N$ si et seulement si $\theta_N(x) = 0$. On pourrait penser que les coupures sur jonction représentent les rationnels, et les coupures à travers un grain les irrationnels. Il n'en est rien.

Proposition 7 (Le cas de $1/3$). *Le nombre $1/3$ n'est une jonction d'aucune grille, standard ou hyperfinie : pour tout entier ou hyperentier N , la coupure en $1/3$ traverse un grain.*

Démonstration. Si $1/3 = \ell 2^{-N}$, alors $3\ell = 2^N$, et 3 diviserait une puissance de 2. L'énoncé « pour tout entier N , 3 ne divise pas 2^N » est vrai ; par l'hypothèse 1, il reste vrai pour tout hyperentier N . $\square$

Plus généralement, un rationnel p/q irréductible est une jonction d'une grille si et seulement si q est une puissance de 2. La dichotomie jonction/grain sépare donc les nombres *dyadiques* des autres.

Proposition 8 (Toute jonction se promeut en un réel quelconque). *Soit N un hyperentier. Tout réel $x \in [0, 1[$ est la promotion d'une jonction de la grille de résolution $-N$.*

Démonstration. C'est la proposition 6 : $x = \text{st}(\ell_N(x) 2^{-N})$. $\square$

Ainsi, la jonction la plus proche de $\sqrt{2}/2$ est un hyperrationnel dyadique dont la promotion est irrationnelle. Une jonction n'est donc « rationnelle » qu'avant promotion, au sens hyperrationnel.

5 Le critère exact : la position dans le grain

Ce qui distingue les rationnels n'est pas le fait que la coupure traverse un grain, mais l'endroit où elle le traverse, suivi à travers les résolutions.

Lemme 9 (Doublement). *Pour tout N , $\theta_{N+1}(x) = \text{frac}(2\theta_N(x))$.*

Démonstration. $2^{N+1}x = 2\ell_N + 2\theta_N$, et $2\ell_N$ est entier. $\square$

La suite $(\theta_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ est donc l'orbite de x sous l'application doublement $\theta \mapsto \text{frac}(2\theta)$: passer à la résolution suivante revient à couper le grain en deux et à regarder où tombe la coupure dans la moitié retenue.

Théorème 10 (Critère de rationalité). *Soit $x \in [0, 1[$.*

1. *x est dyadique si et seulement si $\theta_N(x) = 0$ à partir d'un certain rang : la coupure finit sur une jonction.*

2. x est rationnel si et seulement si la suite $(\theta_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

3. x est irrationnel si et seulement si la suite $(\theta_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ prend une infinité de valeurs.

Démonstration. 1. $\theta_N(x) = 0$ signifie $2^N x = \ell_N(x)$, soit $x = \ell_N(x) 2^{-N}$.

2. *Sens direct.* Soit $x = p/q$ avec $p \geq 0$ et $q \geq 1$ entiers. Pour N fixé, la division euclidienne de $2^N p$ par q donne $2^N p = aq + r$, avec a entier et $0 \leq r < q$. Alors

$$2^N x = a + \frac{r}{q}, \quad 0 \leq \frac{r}{q} < 1,$$

donc $\ell_N(x) = a$ et $\theta_N(x) = r/q$. Ainsi $\theta_N(x) \in \{0, 1/q, \dots, (q-1)/q\}$ pour tout N : la suite prend au plus q valeurs.

Sens réciproque. Supposons que la suite $(\theta_N(x))_{N \in \mathbb{N}}$ ne prenne que s valeurs distinctes. Parmi les $s+1$ termes $\theta_0(x), \dots, \theta_s(x)$, deux sont égaux (principe des tiroirs) : il existe $N < M$ avec $\theta_N(x) = \theta_M(x)$. Posons $T = M - N \geq 1$. Par définition,

$$\theta_N(x) = 2^N x - \ell_N(x), \quad \theta_{N+T}(x) = 2^{N+T} x - \ell_{N+T}(x).$$

En soustrayant ces deux égalités, on obtient

$$2^N (2^T - 1) x = \ell_{N+T}(x) - \ell_N(x) =: m \in \mathbb{Z}.$$

Comme $T \geq 1$, l'entier $2^N (2^T - 1)$ est non nul, et

$$x = \frac{m}{2^N (2^T - 1)} \in \mathbb{Q}.$$

Par le lemme 9, l'égalité $\theta_{N+T} = \theta_N$ entraîne $\theta_{N+T+j} = \theta_{N+j}$ pour tout $j \geq 0$: la suite est ultimement périodique, de préperiode N et de période T . C'est la traduction du fait que le développement binaire de x est ultimement périodique.

3. C'est la contraposée de 2. □

Exemple 11. Pour $x = 1/3 = 0,010101\dots$, la position relative alterne : $\theta_N(1/3) = 1/3$ si N est pair et $2/3$ si N est impair. La coupure traverse toujours un grain, mais toujours au tiers ou aux deux tiers : c'est une coupure rationnelle à travers un grain. Pour $x = \sqrt{2}/2$, les positions $\theta_N(x)$ sont toutes distinctes.

Ce critère se formule entièrement dans le langage du grain : il ne dépend pas d'une seule grille, mais de la lecture de la coupure à travers la tour des résolutions.

6 Quasi-trous, symétrie et choix de n_∞

L'exemple de $1/3$ appelle une question : l'alternance de sa position relative révèle-t-elle un « quasi-trou » de la droite réelle, ou une brisure de symétrie après promotion ? Nous montrons qu'il n'y a ni trou dans $\mathbb{R}$, ni brisure de symétrie, mais un quasi-trou *de la grille*, et une dépendance au choix de n_∞ qu'un choix convenable permet d'éliminer.

6.1 Pas de trou dans $\mathbb{R}$

Un trou de $\mathbb{R}$ serait une coupure de Dedekind de $\mathbb{R}$ sans élément à sa frontière, ce que la complétude exclut. Pour N hyperentier, $1/3$ est à l'intérieur d'un grain d'épaisseur infinitésimale 2^{-N} , et les deux jonctions de ce grain se promeuvent en $1/3$ (proposition 6). La position relative θ_N décrit la structure *interne* d'un grain infinitésimal, précisément ce que la promotion efface.

6.2 Un quasi-trou de la grille

Définition 12 (Écart relatif). Pour $x \in [0, 1[$ et N entier ou hyperentier, l'écart relatif de x aux jonctions de la grille de résolution $-N$ est

$$\delta_N(x) = \min(\theta_N(x), 1 - \theta_N(x)) \in [0, \frac{1}{2}].$$

La distance de x à la jonction la plus proche est $\delta_N(x) 2^{-N}$.

Proposition 13 (Les rationnels se tiennent à distance des jonctions). Soit $x = p/q$ un rationnel non dyadique, avec $q \geq 1$. Pour tout entier ou hyperentier N ,

$$\delta_N(p/q) \geq \frac{1}{q}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left| \frac{p}{q} - \frac{\ell}{2^N} \right| \geq \frac{2^{-N}}{q} \quad \text{pour tout } \ell.$$

Démonstration. On a $\theta_N(p/q) \in \{0, 1/q, \dots, (q-1)/q\}$, et $\theta_N(p/q) \neq 0$ puisque p/q n'est pas dyadique (pour N hyperentier, par transfert). Donc $\theta_N \geq 1/q$ et $1 - \theta_N \geq 1/q$. $\square$

Pour $1/3$, on a $\delta_N(1/3) = 1/3$ à tous les niveaux : la grille ne s'approche jamais de $1/3$ à moins d'un tiers de grain. C'est en ce sens qu'on peut parler d'un *quasi-trou* : il s'agit d'un trou de la grille autour du rationnel, d'épaisseur infinitésimale mais minorée relativement à la finesse de la grille, et non d'un trou de $\mathbb{R}$. Il ne contredit pas la proposition 22 : pour la grille, $1/3$ n'est pas un trou, c'est un grain.

Remarque 14 (La réciproque est fausse). Le quasi-trou ne caractérise pas les rationnels. Soit $\tau = 0,0110100110010110\dots$ la constante de Thue–Morse en base 2, qui est irrationnelle [6]. Sa suite de chiffres ne contient jamais trois chiffres égaux consécutifs. Or $\theta_N(\tau) < 1/8$ imposerait trois zéros consécutifs après le rang N , et $1 - \theta_N(\tau) < 1/8$ trois uns. Donc $\delta_N(\tau) \geq 1/8$ pour tout N . C'est la finitude de l'orbite (théorème 10), et non le quasi-trou, qui caractérise les rationnels.

6.3 Une symétrie, pas une brisure

Lemme 15 (Réflexion). Pour tout x non dyadique de $]0, 1[$ et tout N , $\theta_N(1-x) = 1 - \theta_N(x)$.

Démonstration. $2^N(1-x) = 2^N - 2^N x$, et $\text{frac}(-y) = 1 - \text{frac}(y)$ pour $y \notin \mathbb{Z}$. $\square$

La réflexion $x \mapsto 1-x$ échange $1/3$ et $2/3$, et l'orbite $\{1/3, 2/3\}$ de $1/3$ sous le doublement est un cycle de longueur 2 invariant par cette réflexion : $\theta_N(1/3)$ aux rangs impairs coïncide avec $\theta_N(2/3)$ aux rangs pairs. L'alternance exprime donc une symétrie. La promotion ne la brise pas : elle efface θ , et rend la situation plus symétrique encore.

6.4 La dépendance au choix de n_∞

Dans la théorie du grain, on ne regarde pas tous les niveaux N , mais seulement les niveaux $N = kn_\infty$. Par transfert, tout hyperentier est pair ou impair.

Proposition 16. 1. Si n_∞ est pair, $\theta_{kn_\infty}(1/3) = 1/3$ pour tout $k \geq 1$.

2. Si n_∞ est impair, $\theta_{kn_\infty}(1/3)$ vaut $1/3$ si k est pair et $2/3$ si k est impair.

Démonstration. C'est l'exemple de la section 5, étendu aux hyperentiers par transfert, appliqué à la parité de kn_∞ . $\square$

La structure fine de la tour dépend donc du choix de n_∞ , qui n'est pas canonique. S'il y a une brisure, elle vient de ce choix, et non de la droite réelle.

6.5 Le choix factoriel : une tour auto-similaire

Hypothèse 17 (Choix de n_∞). On suppose que l'hyperentier n_∞ peut être choisi de la forme $n_\infty = H!$, où H est un hyperentier illimité.

Théorème 18 (Auto-similarité des rationnels). *Sous l'hypothèse 17, pour tout rationnel standard p/q de dénominateur q impair, et pour tout $k \geq 1$,*

$$\theta_{kn_\infty}(p/q) = \text{frac}(p/q).$$

En particulier, si $0 < p < q$, le nombre p/q occupe dans son grain, à chaque niveau $-kn_\infty$ de la tour, la même position relative p/q que dans $[0, 1[$.

Démonstration. Soit d l'ordre de 2 modulo q , c'est-à-dire le plus petit entier $d \geq 1$ tel que q divise $2^d - 1$. C'est un entier standard, donc $d \leq H$ et d divise $H!$, puis kn_∞ . L'énoncé « si d divise N , alors q divise $2^N - 1$ » est vrai pour tout entier N ; par transfert, q divise $2^{kn_\infty} - 1$. Alors

$$2^{kn_\infty} \frac{p}{q} = \frac{p}{q} + p \frac{2^{kn_\infty} - 1}{q},$$

et le second terme est un hyperentier. D'où $\theta_{kn_\infty}(p/q) = \text{frac}(p/q)$. $\square$

Remarque 19 (Dénominateur pair). Si $q = 2^a q'$ avec q' impair, le même argument montre que $\theta_{kn_\infty}(p/q) = \text{frac}(r/q')$, où $r \equiv p \cdot 2^{-a} \pmod{q'}$: la position relative est encore indépendante de k , mais elle n'est plus égale à p/q . Par exemple, $\theta_{kn_\infty}(1/6) = 2/3$.

Proposition 20 (Les irrationnels ne sont pas auto-similaires). *Soit $x \in]0, 1[$ standard et $N \geq 1$ entier ou hyperentier. Si $\theta_N(x) = x$, alors x est un rationnel de dénominateur impair. En particulier, un irrationnel n'occupe jamais dans son grain la même position relative que dans $[0, 1[$.*

Démonstration. $\theta_N(x) = x$ signifie que $2^N x - x$ est un (hyper)entier m , soit $x = m/(2^N - 1)$. Pour x irrationnel, l'énoncé « pour tout $N \geq 1$ et tout entier m , $x \neq m/(2^N - 1)$ » est vrai; par transfert, il reste vrai pour N et m hyperentiers. Si $x = p/q$ est irréductible, l'égalité $p(2^N - 1) = mq$ impose que q divise $2^N - 1$, donc que q soit impair. $\square$

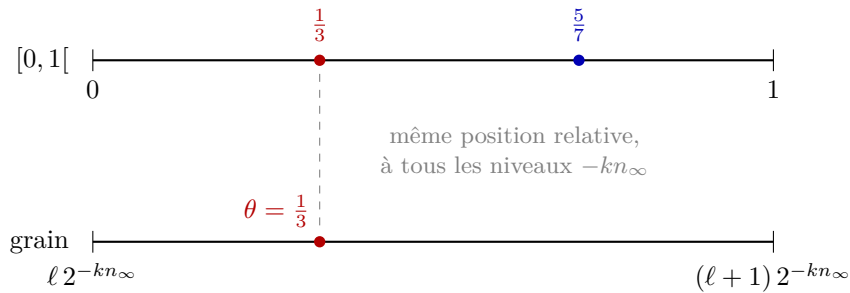


FIGURE 3 – Avec $n_\infty = H!$, le grain de résolution $-kn_\infty$ qui contient $1/3$ est une copie réduite de $[0, 1[$ dans laquelle $1/3$ est au tiers. Il en va de même, dans leurs grains respectifs, pour $5/7$ et pour tout rationnel standard de dénominateur impair.

Le choix factoriel transforme ainsi l'alternance de $1/3$, qui ressemblait à une anomalie, en un critère de bon choix de n_∞ : il rend la tour des résolutions auto-similaire pour tous les rationnels standard de dénominateur impair, et les irrationnels sont exactement exclus de cette auto-similarité (proposition 20).

7 Les grilles n'ont pas de trous

Définition 21 (Coupure d'une grille). Une *coupure interne* de la grille de résolution $-N$ est une partition interne de l'ensemble de ses jonctions en deux classes non vides (A, B) , telle que tout élément de A soit inférieur à tout élément de B .

Proposition 22 (Absence de trous). *Toute coupure interne d'une grille hyperfinie est déterminée par une jonction : A possède un plus grand élément $\ell 2^{-N}$, B possède un plus petit élément, et ce plus petit élément est la jonction adjacente $(\ell + 1) 2^{-N}$.*

Démonstration. Pour un ensemble fini totalement ordonné, toute partie non vide a un plus grand et un plus petit élément. Par l'hypothèse 1, il en va de même des parties internes non vides d'une grille hyperfinie. Le plus grand élément de A et le plus petit élément de B sont consécutifs, puisque $A \cup B$ contient toutes les jonctions. $\square$

Au niveau d'une grille, il n'existe donc pas de trou au sens de Dedekind : toute coupure tombe entre deux jonctions adjacentes, c'est-à-dire sur un grain. Les trous apparaissent avec la promotion. Si x est irrationnel, la coupure de la grille entre $\ell_N(x) 2^{-N}$ et $(\ell_N(x) + 1) 2^{-N}$ est parfaitement déterminée ; mais ses deux jonctions adjacentes, hyperrationnelles, se promeuvent en un même point x qui n'est pas rationnel. La coupure de Dedekind

$$A = \{ r \in \mathbb{Q} : r < x \}, \quad B = \{ r \in \mathbb{Q} : r > x \}$$

est l'ombre, sur $\mathbb{Q}$, de la coupure d'une grille dont les deux bords ont été identifiés par la promotion.

8 Conclusion

Dans la théorie du grain, la théorie des coupures se décompose ainsi.

1. Tout nombre, et en particulier tout irrationnel, est la limite d'une suite de segments emboîtés dont les extrémités sont des nombres dyadiques adjacents ; ces segments sont ses grains, et la suite est unique pour les irrationnels (th. 2 et cor. 4). Un seul niveau illimité suffit à atteindre le nombre par promotion (prop. 6).
2. La position d'une coupure sur une jonction ou à travers un grain distingue les dyadiques des non dyadiques (prop. 7).
3. La rationalité se lit dans la position relative de la coupure dans son grain, à travers les résolutions (th. 10).
4. Les rationnels non dyadiques se tiennent à distance des jonctions : ils créent des quasi-trous de la grille, non de $\mathbb{R}$ (prop. 13). L'alternance de position de $1/3$ est une symétrie, non une brisure ; elle dépend seulement de la parité de n_∞ , et le choix $n_\infty = H!$ rend la tour auto-similaire pour les rationnels de dénominateur impair (th. 18).
5. Les grilles hyperfinies n'ont pas de trous ; les trous de Dedekind naissent de la promotion (prop. 22).

Comme pour le paradoxe de la réflexivité [2] et pour l'axiome du choix [3], ce qui est net au niveau des grilles est transformé par la promotion. Ici, c'est la discrétude qui devient complétude : *la complétude du continu de Dedekind est l'image, par la promotion, de la discrétude des grilles.*

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *De l'axiome du choix à une fonction de choix sur les grains*, manuscrit, 2026.
- [4] R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Brunswick, 1872.
- [5] G. Cantor, « Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen », *Mathematische Annalen* 5 (1872), 123–132.
- [6] J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences*, Cambridge University Press, 2003.
- [7] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.