

Représentation des racines complexes d'un trinôme dans le plan $\mathbb{R}^2$

Hugues Genyvin

Octobre 2015 — version révisée, octobre 2026

Résumé

À partir des seuls coefficients d'un trinôme du second degré irréductible sur $\mathbb{R}$, on construit à la règle et au compas les images de ses deux racines complexes dans le plan. La construction utilise l'axe de symétrie de la parabole représentative et un cercle centré à l'origine. On montre ensuite comment lire les parties réelle et imaginaire des racines directement sur le graphe, à l'aide de la parabole réfléchie par rapport à la tangente au sommet.

1 Notations

Soit le trinôme à coefficients réels

$$P(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0, \quad a_2 \neq 0,$$

de discriminant $\Delta = a_1^2 - 4a_0a_2$. On le suppose *irréductible* sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\Delta < 0$. On pose

$$\alpha = -\frac{a_1}{2a_2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2|a_2|} > 0, \quad m = P(\alpha) = -\frac{\Delta}{4a_2}.$$

La forme canonique s'écrit $P(x) = a_2(x - \alpha)^2 + m$. Le graphe $\mathcal{G}_P$ de P est une parabole de sommet $S(\alpha, m)$ et d'axe de symétrie la droite $\mathcal{D}_P : x = \alpha$. Comme $\Delta < 0$, elle ne rencontre pas l'axe des abscisses.

Dans $\mathbb{C}$, P admet les deux racines

$$z_1 = \alpha + i\beta, \quad z_2 = \alpha - i\beta.$$

On identifie, comme d'habitude, le plan $\mathbb{R}^2$ au plan complexe : le point $M(a, b)$ est l'image du nombre $a + ib$.

2 Pourquoi les racines sont conjuguées

Lemme 1. *Si z est racine de P , alors $\bar{z}$ l'est aussi.*

Démonstration. Les coefficients de P étant réels, ils sont égaux à leurs conjugués, et la conjugaison respecte la somme et le produit. Donc $P(\bar{z}) = \overline{P(z)} = \bar{0} = 0$. $\square$

Géométriquement, la conjugaison est la *symétrie* par rapport à l'axe des abscisses. Les images des deux racines sont donc symétriques par rapport à cet axe : elles ont même abscisse α et des ordonnées opposées $\pm\beta$.

3 Construction des racines par un cercle

Proposition 2 (Construction). *Soit $\mathcal{C}_P$ le cercle de centre O et de rayon*

$$r = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}.$$

Les deux points d'intersection de $\mathcal{C}_P$ avec l'axe de symétrie $\mathcal{D}_P$ sont les images M_1 et M_2 des racines z_1 et z_2 .

Démonstration. Le rayon est bien défini : $\Delta < 0$ donne $4a_0a_2 > a_1^2 \geq 0$, donc a_0 et a_2 sont de même signe et $a_0/a_2 > 0$.

Les points de $\mathcal{D}_P \cap \mathcal{C}_P$ ont pour abscisse α et pour ordonnée y vérifiant $\alpha^2 + y^2 = r^2$, soit

$$y^2 = \frac{a_0}{a_2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2} = \frac{4a_0a_2 - a_1^2}{4a_2^2} = \frac{-\Delta}{4a_2^2} = \beta^2.$$

Ce sont donc les points (α, β) et $(\alpha, -\beta)$, images de z_1 et z_2 . □

Remarque. Le rayon s'explique simplement : d'après les relations entre coefficients et racines, $|z_1|^2 = z_1\bar{z}_1 = z_1z_2 = \frac{a_0}{a_2}$. Le cercle $\mathcal{C}_P$ est donc le cercle sur lequel se trouvent les deux racines, et l'axe de symétrie fixe leur partie réelle.

Argument des racines. Si θ est un argument de z_1 , on a $z_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, d'où

$$\cos \theta = \frac{\alpha}{r} = \frac{-a_1}{2\sqrt{a_0a_2}} \quad (\text{si } a_2 > 0), \quad \theta = \arccos \frac{-a_1}{2\sqrt{a_0a_2}},$$

et z_2 a pour argument $-\theta$.

Constructibilité. Si les coefficients a_0, a_1, a_2 sont constructibles, alors α et a_0/a_2 le sont, ainsi que $r = \sqrt{a_0/a_2}$, puisque la racine carrée d'une longueur constructible est constructible. La droite $\mathcal{D}_P$ et le cercle $\mathcal{C}_P$ se tracent donc à la règle et au compas, et leurs points d'intersection donnent les images des racines.

Programme de construction.

1. Tracer l'axe de symétrie $\mathcal{D}_P$ de la parabole, droite verticale passant par le sommet S .
2. Construire la longueur $r = \sqrt{a_0/a_2}$.
3. Tracer le cercle de centre O et de rayon r .
4. Ses intersections avec $\mathcal{D}_P$ sont les images de z_1 et z_2 .

4 Lecture des racines sur le graphe

La construction précédente utilise la parabole seulement pour son axe. On peut aller plus loin et lire la partie imaginaire sur le graphe lui-même.

Proposition 3 (Parabole réfléchie). *Soit $\mathcal{G}'_P$ l'image de $\mathcal{G}_P$ par la symétrie d'axe la tangente au sommet $y = m$; c'est le graphe de*

$$Q(x) = 2m - P(x) = m - a_2(x - \alpha)^2.$$

Alors $\mathcal{G}'_P$ coupe l'axe des abscisses aux deux points d'abscisses

$$\alpha - \beta = \operatorname{Re}(z_1) - \operatorname{Im}(z_1) \quad \text{et} \quad \alpha + \beta = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Im}(z_1).$$

Démonstration. $Q(x) = 0$ équivaut à $(x - \alpha)^2 = \frac{m}{a_2} = \frac{-\Delta}{4a_2^2} = \beta^2$, soit $x = \alpha \pm \beta$. Le quotient m/a_2 est positif quel que soit le signe de a_2 . $\square$

Autrement dit, la partie imaginaire β des racines apparaît sur le graphe comme une *distance horizontale* : celle qui sépare l'axe de symétrie des points où la parabole réfléchie traverse l'axe des abscisses. En faisant tourner ces points de $\pm \frac{\pi}{2}$ autour du point $(\alpha, 0)$, on retrouve les images $(\alpha, \pm\beta)$ des racines.

Remarque. Cette observation rejoint le polynôme V de la version de 2015 : pour $a_2 > 0$, le polynôme $V(x) = a_2x^2 + 2a_2\beta x + a_2\beta^2 = a_2(x + \beta)^2$ est une translatée de P qui admet la racine double $-\beta$.

5 Calcul des racines : la forme réduite

En divisant par a_2 , l'équation $P(z) = 0$ devient $z^2 - 2\alpha z + \frac{a_0}{a_2} = 0$, soit

$$(z - \alpha)^2 = \alpha^2 - \frac{a_0}{a_2}.$$

Proposition 4 (Forme réduite). *Les racines de P sont*

$$z = \alpha \pm \delta, \quad \text{où } \delta^2 = \alpha^2 - \frac{a_0}{a_2}.$$

Si $\alpha^2 - \frac{a_0}{a_2} \geq 0$, on prend $\delta = \sqrt{\alpha^2 - a_0/a_2}$ et les racines sont réelles. Sinon, $\delta = \iota\sqrt{a_0/a_2 - \alpha^2} = \iota\beta$ et les racines sont complexes conjuguées. Dans tous les cas, $P(z) = a_2(z - \alpha - \delta)(z - \alpha + \delta)$.

Le signe de $\alpha^2 - a_0/a_2 = \Delta/(4a_2^2)$ est celui de Δ : on retrouve le critère habituel. Cette écriture est ancienne : elle remonte aux méthodes babyloniennes et à Viète, et a été popularisée récemment sous le nom de méthode de Po-Shen Loh.

6 Exemple

Exemple. Soit $P(x) = x^2 - 2x + 5$. On a $\Delta = -16$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$ et $m = 4$. Les racines sont $z_1 = 1 + 2\iota$ et $z_2 = 1 - 2\iota$, de module $r = \sqrt{5}$.

- Le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{5}$ coupe l'axe $x = 1$ en $(1, 2)$ et $(1, -2)$.
- La parabole réfléchie $Q(x) = 8 - P(x) = -x^2 + 2x + 3$ coupe l'axe des abscisses en $-1 = \alpha - \beta$ et $3 = \alpha + \beta$.
- On a $\cos \theta = 1/\sqrt{5}$, soit $\theta \approx 63,4^\circ$.

7 Remarques

- La représentation obtenue n'établit pas l'identification du plan réel au plan complexe : elle la suppose. C'est la construction de $\mathbb{C}$ comme ensemble de couples, due à Hamilton, qui la justifie.
- Le fait que les racines soient conjuguées tient aux coefficients réels (lemme ci-dessus). Il se traduit géométriquement par une symétrie, non par une rotation.
- Un trinôme à coefficients réels qui a une racine double l'a nécessairement réelle. Avec des coefficients complexes, une racine double peut ne pas être réelle, comme pour $(z - \iota)^2$.

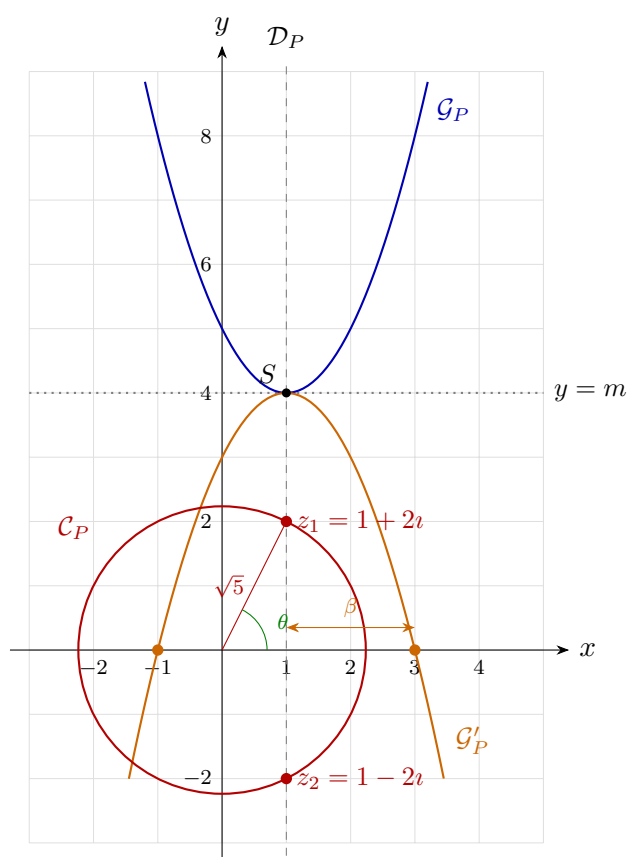


FIGURE 1 – Racines de $P(x) = x^2 - 2x + 5$: intersection du cercle $\mathcal{C}_P$ et de l'axe $\mathcal{D}_P$; la parabole réfléchie $\mathcal{G}'_P$ coupe l'axe des abscisses en $\alpha \pm \beta$.