

Du cercle complexe au plan complexe

Deux axes, deux résolutions :
le quart de tour comme changement de grain

Hugues Geny

Octobre 2026

Résumé

Dans *Le grain* [1, chap. 13], l'élément i et l'exponentielle complexe émergent de la structure circulaire du procédé, et le cercle unité porte deux grilles emboîtées : 2^{n_∞} arcs grossiers, contenant chacun 2^{n_∞} arcs fins. Ce document construit le plan complexe à partir de ce cercle. En déroulant la grille fine du cercle sur l'axe horizontal et la grille grossière sur l'axe vertical, on obtient un plan muni d'une seule métrique mais de deux résolutions : les deux axes ont la même unité et des grains différents, dans le rapport $J = 2^{-n_\infty}$. Nous montrons que la projection orthogonale ne convient pas, car elle stratifie la graduation. Dans ce plan, le quart de tour i est une isométrie exacte, mais il change de grain : de l'axe vertical vers l'axe horizontal, il réalise une inclusion ; de l'axe horizontal vers l'axe vertical, un sous-échantillonnage, qui ne garde qu'une jonction sur 2^{n_∞} . Les deux descriptions se réunissent dans l'opérateur $\omega = 2^{n_\infty}i$, dont le carré $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$ contient à la fois $i^2 = -1$ et le changement d'échelle $(2^{n_\infty})^2 = 2^{2n_\infty}$; ses puissances codent la tour des résolutions ; sur le cylindre de l'argument, ω est un vissage, dont l'orbite est une hélice. La grille du plan n'est pas invariante par i ; cette symétrie, brisée au niveau des grains, est restaurée à la promotion, qui donne le plan $\mathbb{C}$. Nous distinguons cette lecture en résolution d'une lecture métrique, qui aplatiserait le cercle en ellipse, et nous présentons une variante isotrope, la grille log-polaire. Le théorème 61 de [1] est reformulé en conséquence.

1 Introduction

Le chapitre 13 de *Le grain* [1] construit l'exponentielle complexe comme conséquence forcée de la compatibilité entre la stratification du procédé et la structure circulaire de C_1 : l'élément i , tel que $i^2 = -1$, n'y est pas adjoint algébriquement, mais émerge du quart de tour [1, th. 60]. Le théorème 61 de [1] associe ensuite l'axe réel à la strate fine G_{-2n_∞} , l'axe imaginaire à la strate grossière G_{-n_∞} , et le cercle unité au quotient $G_{-n_\infty}/G_{-2n_\infty}$.

La démonstration de ce théorème obtient l'axe imaginaire par rotation de l'axe réel. Or une rotation conserve la taille des grains : elle ne peut pas, à elle seule, faire passer de la strate fine à la strate grossière. Ce document propose une autre construction, qui justifie le théorème 61 et précise le rôle de i .

1. Le cercle porte un *situs auto-similaire* à deux niveaux, dont le zoom est la puissance $z \mapsto z^{2^{n_\infty}}$ (section 3).
2. On *déroule* la grille fine du cercle sur l'axe horizontal et la grille grossière sur l'axe vertical ; la projection orthogonale, elle, stratifierait la graduation (section 4).
3. Le plan obtenu a une seule métrique et deux résolutions, dans le rapport $J = 2^{-n_\infty}$: c'est un jacobien d'un axe vers l'autre, et non une déformation du plan (section 4).
4. Le quart de tour i est une isométrie qui change de grain : inclusion dans un sens, sous-échantillonnage dans l'autre (section 5).

5. L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty} i$ réunit le quart de tour et le changement d'échelle : $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$ contient $i^2 = -1$ et $(\#g_g)^2 = \#g_f$; ses puissances forment un escalier en spirale qui code la tour des résolutions (section 6).
6. La symétrie par i , brisée au niveau des grains, est restaurée à la promotion (section 7).
7. Une lecture *métrique* du même jacobien aplattirait le cercle (section 8) ; une variante *isotrope*, la grille log-polaire, est aussi possible (section 9).

2 Notations et rappels

Soit n_∞ un hyperentier illimité et

$$a = 2^{n_\infty}, \quad \delta_g = \frac{2\pi}{a} \quad (\text{pas grossier}), \quad \delta_f = \frac{2\pi}{a^2} \quad (\text{pas fin}).$$

Les deux pas sont infinitésimaux, et $\delta_g = a \delta_f$. Comme $n_\infty \geq 2$, le nombre $a/4 = 2^{n_\infty-2}$ est un hyperentier.

Nous normalisons le cercle C_1 à la circonférence 2π et utilisons l'exponentielle complexe stratale $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ [1, déf. 85]. Le plan complexe stratal est $P_{\mathbb{C}} = \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}}$ [1, déf. 86], muni de sa métrique euclidienne. La promotion est réalisée par la partie standard st , et nous notons $u \simeq v$ lorsque $u - v$ est infinitésimal. Nous utilisons le principe de transfert et le théorème de stratification fonctionnelle [1, th. 62] : une application dérivable agit localement comme un facteur de stratification égal à sa dérivée.

localement comme un facteur de stratification égal à sa dérivée.

3 Le situs circulaire auto-similaire

Définition 1 (Situs circulaire). Pour $1 \leq k' \leq a$ et $1 \leq k \leq a^2$, on pose

$$g_{-n_\infty}^{k'} = \{e^{i\theta} : \theta \in [(k' - 1)\delta_g, k'\delta_g[), \quad g_{-2n_\infty}^k = \{e^{i\theta} : \theta \in [(k - 1)\delta_f, k\delta_f[),$$

et

$$\mathcal{G}_{n_\infty} = \bigcup_{k'=1}^{2^{n_\infty}} g_{-n_\infty}^{k'}, \quad \mathcal{G}_{2n_\infty} = \bigcup_{k=1}^{2^{2n_\infty}} g_{-2n_\infty}^k.$$

Les deux réunions sont des partitions du cercle unité, en a arcs grossiers et en a^2 arcs fins. Leurs extrémités sont les *jonctions* des deux niveaux.

Proposition 2 (Emboîtement). *Chaque arc grossier est la réunion d'exactly a arcs fins consécutifs :*

$$g_{-n_\infty}^{k'} = \bigcup_{k=(k'-1)a+1}^{k'a} g_{-2n_\infty}^k.$$

Démonstration. $[(k' - 1)\delta_g, k'\delta_g[= [(k' - 1)a\delta_f, k'a\delta_f[$ est la réunion des intervalles $[(k - 1)\delta_f, k\delta_f[$ pour $(k' - 1)a < k \leq k'a$. $\square$

Proposition 3 (Le zoom est une puissance). *Soit $P(z) = z^a$. Pour tout k , P envoie bijectivement l'arc fin $g_{-2n_\infty}^k$ sur l'arc grossier $g_{-n_\infty}^{k'}$, où $k' - 1$ est le reste de $k - 1$ modulo a . Il envoie bijectivement chaque arc grossier sur le cercle entier.*

Démonstration. Sur le cercle, P multiplie les angles par a . Si $\theta \in [(k - 1)\delta_f, k\delta_f[$, alors $a\theta \in [(k - 1)\delta_g, k\delta_g[$; en écrivant $k - 1 = qa + r$ avec $0 \leq r < a$, on obtient $a\theta - 2\pi q \in [r\delta_g, (r + 1)\delta_g[$, donc $P(e^{i\theta}) \in g_{-n_\infty}^{r+1}$. L'application $\theta \mapsto a\theta$ est injective et envoie un intervalle de longueur δ_f sur un intervalle de longueur $\delta_g < 2\pi$, d'où la bijection. De même, un arc grossier, de longueur δ_g , est envoyé bijectivement sur un intervalle semi-ouvert de longueur $a\delta_g = 2\pi$. $\square$

C'est le sens précis de l'auto-similarité du situs : un arc grossier, agrandi par P , se découpe exactement comme le cercle entier (figure 1).

Remarque 4 (Le zoom et l'application doublement). Sur les angles, P est $\theta \mapsto 2^{n_\infty} \theta \bmod 2\pi$, c'est-à-dire l'itérée n_∞ fois de l'application doublement $\theta \mapsto 2\theta$ de la théorie des coupures [2, lemme 9]. Le situs circulaire auto-similaire est la tour des positions de cette théorie, enroulée sur le cercle.

Proposition 5 (Le quart de tour est une isométrie des deux niveaux). *1. Les points $1, i, -1, -i$ sont des jonctions des deux niveaux.*
2. La multiplication par i envoie tout arc grossier sur un arc grossier et tout arc fin sur un arc fin ; elle décale les indices de $a/4$ et de $a^2/4$ respectivement.
3. $P(iz) = P(z)$: le quart de tour est invisible après le zoom.

Démonstration. On a $\pi/2 = (a/4) \delta_g = (a^2/4) \delta_f$, avec $a/4$ et $a^2/4$ hyperentiers, d'où 1 et 2. Pour 3, $P(iz) = i^a z^a = (i^4)^{a/4} z^a = z^a$. $\square$

La multiplication par i ne change donc pas de niveau : le passage d'un niveau à l'autre est réalisé par P , et non par i . Le point 1 est cohérent avec la construction de i [1, th. 60] : le demi-tour et le quart de tour tombent sur des jonctions.

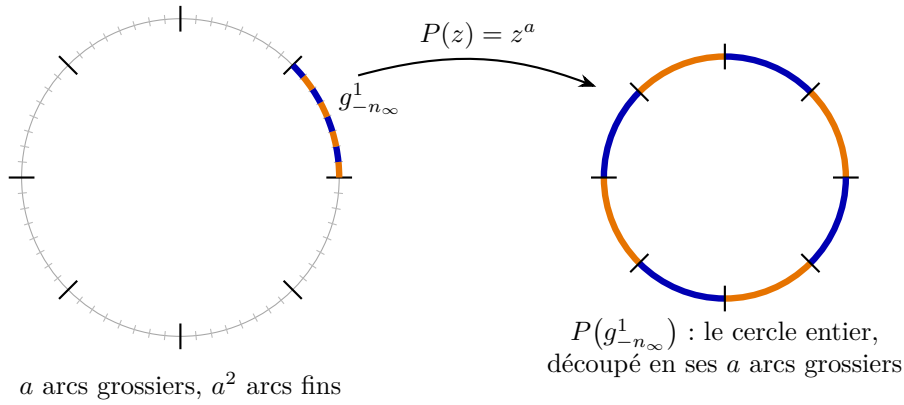


FIGURE 1 – Le situs circulaire auto-similaire, dessiné avec $a = 8$. À gauche, l'arc grossier $g_{-n_\infty}^1$ (en couleur) contient a arcs fins. Le zoom $P(z) = z^a$ envoie chacun de ces arcs fins sur un arc grossier, avec la même couleur, et l'arc grossier entier sur le cercle entier.

4 Deux axes, deux résolutions

4.1 Projeter ou dérouler

Pour porter une grille du cercle sur un axe, deux opérations se présentent : la projection orthogonale et le déroulement. Seule la seconde conserve la taille des grains.

Proposition 6 (La projection stratifie la graduation). *Soit δ l'un des deux pas, et $x_k = \cos(k\delta)$ la projection orthogonale sur l'axe horizontal de la jonction $e^{ik\delta}$, $0 \leq k \leq \pi/\delta$. L'écart entre deux projections consécutives est*

$$x_k - x_{k+1} = 2 \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{(2k+1)\delta}{2}.$$

1. Si $(2k+1)\delta/2 \simeq \theta$ avec θ standard dans $]0, \pi[$, alors $(x_k - x_{k+1})/\delta \simeq \sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$, où $x = \cos \theta$: la graduation est stratifiée par le facteur $\sqrt{1 - x^2}$.

2. Si k est limité, l'écart est infiniment petit devant δ : précisément, $x_k - x_{k+1} = (2k + 1) \frac{\delta^2}{2} (1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \simeq 0$. Près de $x = 1$, les écarts suivent la suite des nombres impairs $1, 3, 5, \dots$ en unités $\delta^2/2$.

Démonstration. La formule vient de $\cos A - \cos B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{B-A}{2}$ avec $A = k\delta$, $B = (k+1)\delta$. Pour 1, $\sin(\delta/2)/(\delta/2) \simeq 1$. Pour 2, les deux arguments des sinus sont infinitésimaux, et $\sin u = u(1 + \varepsilon)$ avec $\varepsilon \simeq 0$. $\square$

La projection est donc la stratification fonctionnelle [1, th. 62] associée à $f = \cos$: elle n'est uniforme qu'au voisinage de $x = 0$, et elle écrase les grains près de $x = \pm 1$, où l'on retrouve la loi des nombres impairs de Galilée, comme dans l'étude de la chute libre [4]. Pour obtenir une graduation uniforme, il faut *dérouler* le cercle, c'est-à-dire le rectifier.

Définition 7 (Déroulement). Le *déroulement horizontal* envoie le point $e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$, sur le point θ de l'axe horizontal, et se prolonge à $\tilde{\mathbb{R}}$ par périodicité ($\theta \mapsto \theta + 2\pi m$). Le *déroulement vertical* envoie $e^{i\theta}$ sur le point $i\theta$ de l'axe vertical, prolongé de même.

Le déroulement conserve les longueurs d'arc : il envoie chaque arc du situs sur un segment de même longueur. Il transporte donc les grilles du cercle sur des graduations *uniformes*.

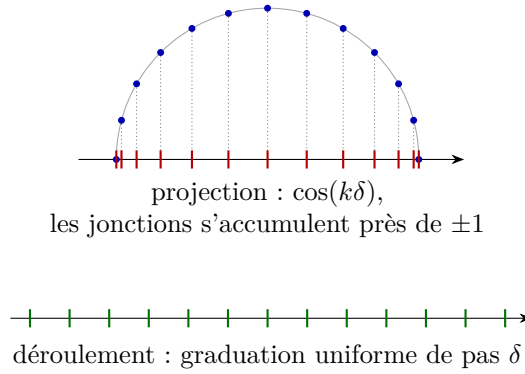


FIGURE 2 – Porter la grille du cercle sur un axe (ici un demi-cercle, avec 12 arcs). La projection orthogonale (en rouge) donne une graduation stratifiée par le facteur $\sqrt{1 - x^2}$. Le déroulement (en vert) donne une graduation uniforme.

4.2 Le plan à deux résolutions

Définition 8 (Plan à deux résolutions). On munit l'axe horizontal de la graduation $\Gamma_H = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$, image de la grille fine du cercle par le déroulement horizontal, et l'axe vertical de la graduation $\Gamma_V = i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$, image de la grille grossière par le déroulement vertical. La *grille du plan* est

$$\Gamma = \Gamma_H + \Gamma_V = \{m\delta_f + i n\delta_g : m, n \in \tilde{\mathbb{Z}}\},$$

et ses grains sont les rectangles de côtés δ_f (horizontal) et δ_g (vertical). Le plan garde sa métrique euclidienne : les deux axes ont la même unité de longueur.

Les grains du plan sont donc des « aiguilles » infinitésimales, de rapport $\delta_g/\delta_f = a$. C'est la structure décrite par le théorème 61 de [1], avec l'axe réel à la strate fine et l'axe imaginaire à la strate grossière, mais obtenue ici par déroulement.

Proposition 9 (Le jacobien d'un axe vers l'autre). Posons $J = \delta_f/\delta_g = 2^{-n_\infty}$.

1. Lecture interne. Chaque grain de l'axe vertical a la même longueur que $a = J^{-1}$ grains consécutifs de l'axe horizontal.
2. Lecture externe. L'homothétie $h_J : t \mapsto Jt$ envoie bijectivement la graduation verticale, lue sur $\tilde{\mathbb{R}}$, sur la graduation horizontale : $h_J(\delta_g \tilde{\mathbb{Z}}) = \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$, grain sur grain.

Les deux lectures décrivent le même rapport : compter a grains fins dans un grain grossier, ou réduire un grain grossier en un grain fin par le facteur J .

Démonstration. $\delta_g = a \delta_f$, et $J n \delta_g = n \delta_f$. □

Remarque 10 (Lien avec la réflexivité). C'est exactement la situation de l'étude de la réflexivité [3, prop. 7 et cor. 9] : l'homothétie h_J est une bijection grain à grain entre les deux axes, mais elle change l'épaisseur des grains ; le comptage homogène, lui, révèle le rapport a . Le jacobien J ne déforme pas le plan : il relie deux graduations d'une même droite métrique.

5 Le quart de tour, une isométrie qui change de grain

Théorème 11 (Le quart de tour entre les deux grilles). 1. Au niveau des points, la multiplication par i est une isométrie exacte du plan, et $i^2 = -1$.

2. Du vertical vers l'horizontal : une inclusion. L'image par $i^{-1} = -i$ de toute jonction verticale est une jonction horizontale : $-i(i n \delta_g) = n \delta_g = (na) \delta_f \in \Gamma_H$. L'image de la graduation verticale est la sous-graduation $a \delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ de Γ_H , formée d'une jonction fine sur a .
3. De l'horizontal vers le vertical : un sous-échantillonnage. Le point $i m \delta_f$ est une jonction verticale si et seulement si a divise m . Ainsi i n'envoie sur Γ_V que les jonctions horizontales d'indice multiple de a : il faut ne garder qu'une jonction sur a .
4. Au niveau des grains, i envoie chaque grain fin $[m \delta_f, (m+1) \delta_f[$ de l'axe horizontal dans le grain grossier $[q \delta_g, (q+1) \delta_g[$ de l'axe vertical, avec $q = \lfloor m/a \rfloor$; cette correspondance est surjective et exactement a pour 1. Réciproquement, i^{-1} envoie chaque grain grossier vertical sur la réunion de a grains fins horizontaux.
5. Le demi-tour, suivi grain par grain. En passant par l'axe vertical, $i \circ i$ envoie chaque grain fin horizontal sur le grain grossier, formé de a grains fins, qui contient son image par -1 : l'aller-retour par l'axe grossier efface la structure fine.

Démonstration. Point 1. C'est la rotation d'un quart de tour du plan euclidien.

Point 2. Calcul direct.

Point 3. $i m \delta_f = i(m/a) \delta_g$, qui appartient à $i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ si et seulement si $m/a \in \tilde{\mathbb{Z}}$.

Point 4. $[m \delta_f, (m+1) \delta_f[\subset [q \delta_g, (q+1) \delta_g[$ pour $q = \lfloor m/a \rfloor$, puisque $q \delta_g = qa \delta_f \leq m \delta_f$ et $(m+1) \delta_f \leq (q+1)a \delta_f$; les indices $m = qa, \dots, qa + a - 1$ donnent le même q .

Point 5. On compose 4 et 2 : le grain grossier vertical $i[q \delta_g, (q+1) \delta_g[$ est envoyé par i sur $-[q \delta_g, (q+1) \delta_g[$, réunion de a grains fins horizontaux qui contient $-[m \delta_f, (m+1) \delta_f[$. □

C'est la forme précise de l'idée que « i exprime qu'on ne travaille pas dans le même grain » : sur les points, i est une rotation exacte ; entre les grilles, il porte le changement de grain. Les deux sens ne sont pas symétriques : l'inclusion (grossier vers fin) ne perd rien, le sous-échantillonnage (fin vers grossier) perd la structure fine.

Remarque 12 (Sur le parallèle quantique). Le livre propose un parallèle avec la mesure quantique [1, rem. 115] : l'expérience est préparée dans le grain fin (axe réel), et la réalité est observée dans le grain grossier (axe imaginaire), avec irréversibilité. Dans la présente construction, cette irréversibilité a une forme précise : c'est le sous-échantillonnage que porte i de l'axe fin vers l'axe grossier (théorème 11, points 3 à 5). Cela reste un parallèle, et non une dérivation de la mesure quantique.

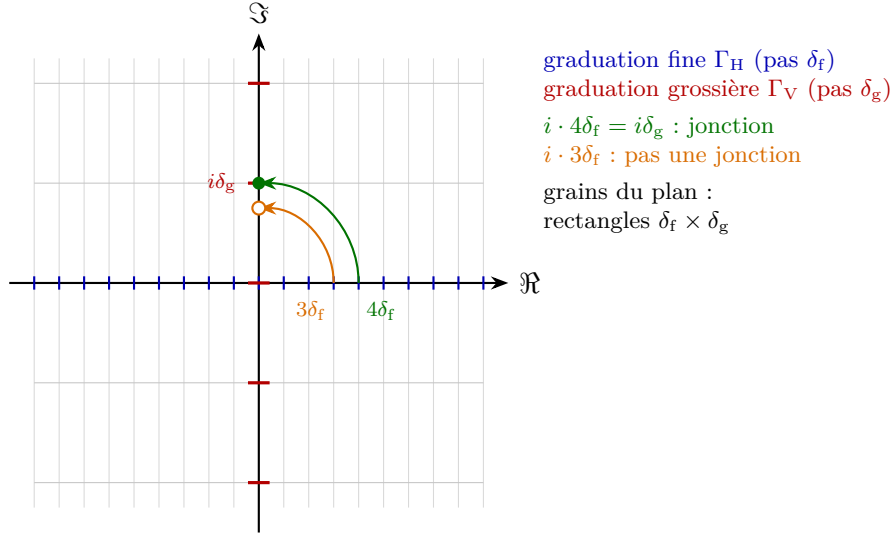


FIGURE 3 – Le plan à deux résolutions, dessiné avec $a = 4$. Le quart de tour est une isométrie ; il n’envoie une jonction fine de l’axe horizontal sur une jonction grossière de l’axe vertical que si son indice est un multiple de a .

6 L’opérateur $\omega = 2^{n_\infty} i$: le quart de tour et le changement d’échelle

Le théorème 11 décrit le passage d’un axe à l’autre de façon *interne* : i est une isométrie, et c’est le comptage des jonctions qui change. La proposition 9 en suggère une description *externe*, où l’on change la longueur et où l’on conserve les indices. Les deux descriptions se réunissent en un seul nombre complexe.

Définition 13 (L’opérateur ω). On pose

$$\omega = a i = 2^{n_\infty} i \in \tilde{\mathbb{R}}[i].$$

Son module a est illimité : ω n’est pas un point du plan promu, mais un *opérateur entre strates*. Son inverse est $\omega^{-1} = -i J = -2^{-n_\infty} i$.

Proposition 14 (ω fait passer d’une graduation à l’autre). 1. La multiplication par ω envoie bijectivement la graduation de l’axe réel sur celle de l’axe imaginaire, en conservant les indices :

$$\omega \cdot (m \delta_f) = i m (a \delta_f) = i m \delta_g.$$

2. Elle envoie la graduation de l’axe imaginaire sur la graduation de pas 2π de l’axe réel : $\omega \cdot (i n \delta_g) = -n (a \delta_g) = -2\pi n$. Les graduations $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$, $i \delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ et $2\pi \tilde{\mathbb{Z}}$ sont celles des niveaux $-2n_\infty$, $-n_\infty$ et 0 (un grain par tour).
3. Version externe et version interne. On a $\omega = a \cdot i$: la multiplication par ω est la rotation i suivie de l’homothétie de rapport a . La version externe (similitude ω , indices conservés) et la version interne (isométrie i , indices divisés par a , théorème 11) décrivent le même passage : $i m \delta_f = (m/a) (i \delta_g)$ lorsque a divise m .

Démonstration. Calcul direct, avec $a \delta_f = \delta_g$ et $a \delta_g = 2\pi$. □

Chaque application de ω fait donc monter d’un niveau, du fin vers le grossier, et tourner d’un quart de tour ; son inverse ω^{-1} fait descendre d’un niveau, du grossier vers le fin, en tournant d’un quart de tour dans l’autre sens.

Théorème 15 (Le carré de ω).

$$\omega^2 = -2^{2n_\infty}.$$

Cette identité réunit deux égalités :

1. Le module : $|\omega|^2 = |\omega^2|$, c'est-à-dire $(2^{n_\infty})^2 = 2^{2n_\infty}$. En comptant les grains par tour, $\#g_g = a$ et $\#g_f = a^2$:

$$(\#g_g)^2 = \#g_f.$$

2. L'argument : $\arg(\omega^2) = 2\arg(\omega) = \pi$, c'est-à-dire $i^2 = -1$.

En particulier, ω^2 envoie la graduation fine de l'axe réel sur la graduation de pas 2π du même axe, retournée : deux niveaux et un demi-tour.

Démonstration. $\omega^2 = a^2 i^2 = -a^2$. Le module d'un produit est le produit des modules, et l'argument d'un produit est la somme des arguments. Enfin $\omega^2(m\delta_f) = -a^2 m\delta_f = -2\pi m$. $\square$

Remarque 16 (Ce que le carré couple, et ce qu'il ne crée pas). Les deux parties de l'identité ont des origines distinctes. L'argument $\pi/2$ de ω vient du cercle, par le quart de tour [1, th. 60]. Le module 2^{n_∞} vient de la construction des niveaux, c'est-à-dire du nombre de grains par tour. La relation $i^2 = -1$ ne produit pas à elle seule le facteur 2^{n_∞} . Ce que la multiplication complexe apporte, c'est leur *cohérence* : dès que l'opérateur qui fait passer d'un axe à l'autre a pour module 2^{n_∞} et pour argument $\pi/2$, son carré a nécessairement pour module 2^{2n_∞} et pour argument π . Le changement d'échelle $(\#g_g)^2 = \#g_f$ s'inscrit ainsi dans la même algèbre que i , sans se déduire de i .

6.1 Dans le plan de l'argument

Repérons le plan de l'argument par les coordonnées $(\log_2|z|, \arg z)$. Le logarithme de base 2 est la transformation $T = \log_2$ du §13.1 de [1], qui ramène les invariants 2^{kn_∞} aux indices de niveau kn_∞ .

Proposition 17 (Niveau et rotation). *Dans ces coordonnées, ω est le point $(n_\infty, \pi/2)$, et ω^k est le point*

$$(k n_\infty, k \pi/2).$$

Élever ω à la puissance k multiplie ce vecteur par k : la coordonnée réelle compte les niveaux de la tour des résolutions, la coordonnée imaginaire compte les quarts de tour. Monter d'un niveau et tourner d'un quart de tour sont une seule translation.

Démonstration. $|\omega^k| = a^k = 2^{kn_\infty}$ et $\arg \omega^k = k\pi/2$ modulo 2π . $\square$

Corollaire 18 (L'escalier en spirale). *Les puissances ω^k codent la tour des résolutions de [1] :*

- leur module 2^{kn_∞} est le nombre de grains par tour au niveau $-kn_\infty$;
- leur argument est k quarts de tour : elles tombent successivement sur les demi-axes réel positif, imaginaire positif, réel négatif et imaginaire négatif ; $\omega^4 = 2^{4n_\infty}$ revient sur l'axe réel positif, quatre niveaux plus loin.

Les points ω^k sont sur la spirale logarithmique $|z| = 2^{(2n_\infty/\pi)\arg z}$, qui est une droite dans le plan de l'argument.

Démonstration. Proposition 17 ; la spirale est l'image par l'exponentielle de la droite passant par l'origine et par $(n_\infty, \pi/2)$. $\square$

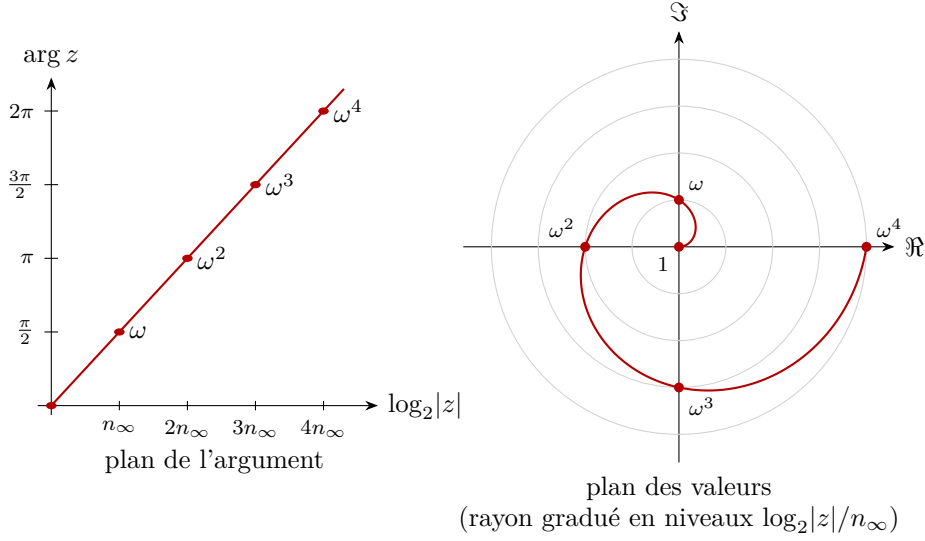


FIGURE 4 – L’escalier en spirale des puissances de $\omega = 2^{n_\infty}i$. À gauche, dans le plan de l’argument, les points ω^k sont alignés : chaque puissance ajoute un niveau et un quart de tour. À droite, dans le plan des valeurs, avec un rayon gradué en niveaux, ils tombent successivement sur les quatre demi-axes, un niveau plus loin à chaque fois.

6.2 Les deux formes de ω : similitude et vissage

L’opérateur ω se présente sous deux formes, une dans chaque plan. C’est un cas particulier de la dualité $\ln / \exp$ de [1, prop. 74 et rem. 114], qui « prolonge la dualité de résolution F/F^{-1} », et de la linéarisation du §13.1.2 de [1] : le logarithme transforme la multiplication en addition.

Comme l’argument est défini modulo 2π , le plan de l’argument est en réalité un *cylindre*

$$\mathcal{Z} = \tilde{\mathbb{R}} \times (\tilde{\mathbb{R}}/2\pi\tilde{\mathbb{Z}}), \quad z \mapsto (\log_2|z|, \arg z),$$

dont l’axe porte les niveaux et dont les cercles portent les phases.

Proposition 19 (Similitude et vissage). 1. Dans le plan des valeurs, $z \mapsto \omega z$ est une *similitude* : le quart de tour i composé de l’homothétie de rapport 2^{n_∞} . Elle envoie l’axe réel $\tilde{\mathbb{R}}$ sur l’axe imaginaire $i\tilde{\mathbb{R}} \subset \tilde{\mathbb{R}}[i]$, et l’axe imaginaire sur l’axe réel retourné ; en particulier $\omega \cdot 1 = \omega$ et $\omega \cdot i = -2^{n_\infty}$.

2. Sur le cylindre de l’argument, elle est le *vissage*

$$(u, v) \mapsto (u + n_\infty, v + \pi/2),$$

composé d’une translation de n_∞ le long de l’axe (le changement de résolution) et d’une rotation de $\pi/2$ autour de l’axe (la rotation, qui envoie seule i sur -1).

3. Les deux composantes commutent : on peut changer de niveau puis tourner, ou tourner puis changer de niveau. Dans le plan des valeurs, cela traduit le fait que les deux facteurs de $\omega = 2^{n_\infty} \cdot i$ commutent.

4. La rotation est d’ordre 4 sur le cylindre ; la translation est d’ordre infini : on ne revient jamais au même niveau.

Démonstration. Point 1. $\omega z = 2^{n_\infty}(iz)$, et $\omega \cdot i = 2^{n_\infty}i^2$.

Point 2. $\log_2|\omega z| = \log_2|z| + n_\infty$ et $\arg(\omega z) = \arg z + \pi/2$ modulo 2π .

Point 3. Deux translations commutent.

Point 4. $4 \cdot \pi/2 = 2\pi$, tandis que $kn_\infty \neq 0$ pour $k \neq 0$. □

La formule « ω agit sur i comme une translation, équivalente à la rotation qui envoie i sur -1 » est donc exacte pour la composante de rotation du vissage ; la composante de translation y ajoute le changement de niveau, de sorte que ω envoie i sur -2^{n_∞} : la direction -1 , un niveau plus loin.

Corollaire 20 (L'hélice des résolutions). *Sur le cylindre de l'argument, l'orbite de 1 sous ω est formée des points $(kn_\infty, k\pi/2 \bmod 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Elle est portée par une hélice qui fait un tour complet tous les quatre niveaux et ne revient jamais sur elle-même. La spirale logarithmique du corollaire 18 est l'image de cette hélice dans le plan des valeurs.*

Démonstration. Proposition 19, points 2 et 4 ; l'exponentielle enroule le cylindre sur le plan privé de 0. $\square$

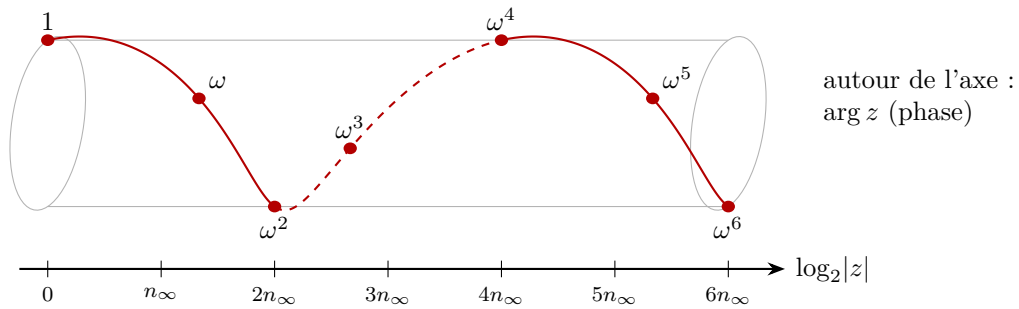


FIGURE 5 – L'hélice des résolutions sur le cylindre de l'argument. Chaque application de ω avance d'un niveau le long de l'axe et tourne d'un quart de tour autour de lui. La partie de l'hélice située derrière le cylindre est en tirets. Après quatre niveaux, l'hélice a fait un tour complet (ω^4 est de nouveau sur l'axe réel positif), mais elle ne revient jamais au même niveau.

	Plan des valeurs	Cylindre de l'argument
ω agit comme	une similitude (rotation $\times$ homothétie)	un vissage (translation + rotation)
changement de résolution	homothétie de rapport 2^{n_∞}	translation de n_∞ le long de l'axe
rotation ($i \mapsto -1$)	quart de tour	rotation de $\pi/2$ autour de l'axe
orbite de 1	spirale logarithmique	hélice
opération	multiplication	addition

TABLE 1 – Les deux formes de l'opérateur $\omega = 2^{n_\infty}i$.

Remarque 21 (Ce que garde la promotion). Le module de ω porte la stratification ; son argument porte la rotation. Comme $|\omega|$ est illimité, ω n'a pas de partie standard, et $\text{st}(\omega^{-1}) = 0$: la promotion efface le module. Elle garde l'argument, c'est-à-dire i , qui devient sur $\mathbb{C}$ la rotation exacte d'un quart de tour (théorème 23).

7 La symétrie brisée et sa restauration

Proposition 22 (Les symétries de la grille). *La grille Γ est invariante par le demi-tour $z \mapsto -z$, par la conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ et par $z \mapsto -\bar{z}$. Elle n'est pas invariante par le quart de tour $z \mapsto iz$.*

Démonstration. $-\Gamma = \Gamma$ et $\bar{\Gamma} = \Gamma$ car $\delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ et $\delta_g \tilde{\mathbb{Z}}$ sont symétriques. En revanche $i\Gamma = \delta_g \tilde{\mathbb{Z}} + i\delta_f \tilde{\mathbb{Z}}$ contient le point $i\delta_f$, dont la partie imaginaire δ_f n'est pas un multiple de δ_g ; donc $i\Gamma \neq \Gamma$. $\square$

La grille a ainsi les symétries d'un rectangle, et non celles d'un carré. Le demi-tour, qui est l'involution $x \mapsto -x$ de la symétrisation [1, prop. 71], agit séparément sur chaque axe et respecte chaque graduation; le quart de tour, qui échange les axes, ne peut pas respecter deux graduations de pas différents.

Théorème 23 (Restauration à la promotion). *1. Les jonctions de Γ de module limité ont pour promotion le plan $\mathbb{C}$ tout entier.*

2. Pour tout z limité, $\text{st}(iz) = i \text{st}(z)$: sur $\mathbb{C}$, i est exactement la rotation d'un quart de tour, et le cercle unité est un cercle.

Démonstration. Point 1. Pour $z = x + iy$ standard, la jonction $\delta_f \lfloor x/\delta_f \rfloor + i\delta_g \lfloor y/\delta_g \rfloor$ est à distance au plus $\sqrt{\delta_f^2 + \delta_g^2} \simeq 0$ de z .

Point 2. st est $\mathbb{R}$ -linéaire sur les nombres complexes limités, et $\text{st}(i) = i$. Le déroulement et la grille ne modifient pas la métrique du plan. $\square$

On retrouve le schéma de l'étude du temps [5], où une grille d'espace-temps brisait l'invariance de Lorentz de façon infinitésimale, et où la promotion la restaurait : ici, la grille à deux résolutions brise la symétrie par i au niveau des grains, et la promotion la restaure sur $\mathbb{C}$.

8 Deux lectures d'un jacobien entre les axes

Le rapport $J = 2^{-n_\infty}$ entre les deux axes peut être compris de deux façons, qu'il faut distinguer.

- **Lecture en résolution** (celle de ce document). Le plan garde une seule métrique; seules les graduations diffèrent. Le cercle reste un cercle, et les rotations sont des isométries. J est un rapport de tailles de grains.
- **Lecture métrique.** L'unité de longueur elle-même change d'un axe à l'autre. C'est l'application linéaire $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix}$.

Proposition 24 (La lecture métrique aplatit le cercle). *1. D envoie le cercle unité sur l'ellipse de demi-axes 1 et J , dont la promotion est le segment $[-1, 1]$: la phase disparaît.*

2. Dans les coordonnées transformées, la multiplication par i devient

$$i_D = D \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} D^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1/J \\ J & 0 \end{pmatrix}.$$

On a encore $i_D^2 = -\text{Id}$, mais i_D n'est pas une isométrie : le quart de tour de 1 est le point $(0, J)$, à la distance J de l'origine.

Démonstration. Point 1. $D(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta, J \sin \theta)$; comme J est infinitésimal et $|\sin \theta| \leq 1$, la partie standard de $J \sin \theta$ est nulle : $\text{st}(J \sin \theta) = 0$.

Point 2. Calcul direct ; $i_D(1, 0) = (0, J)$. □

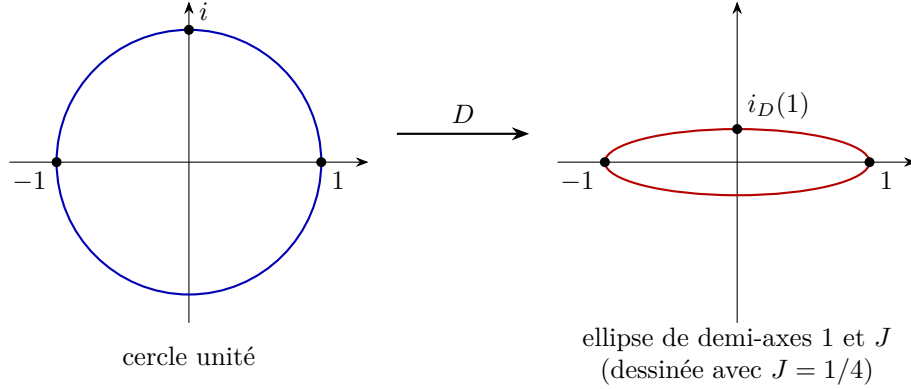


FIGURE 6 – Le jacobien appliqué au seul axe imaginaire. Le cercle unité devient une ellipse infiniment aplatie ; à la promotion, elle s'écrase sur le diamètre $[-1, 1]$.

La lecture métrique est une *anomalie cartésienne* [1, chap. 14] : un repère dont les axes ne portent pas la même métrique n'est pas neutre. Elle contredit l'étape du quart de tour dans la construction de i [1, th. 60] et l'identification du cercle unité au cercle C_1 [1, rem. 108]. La lecture en résolution évite ces deux écueils : c'est le principe de superposition stratale [1, rem. 108], un seul support portant deux structures.

	Lecture en résolution	Lecture métrique
Ce qui change	la graduation (taille des grains)	l'unité de longueur
Cercle unité	reste un cercle	devient une ellipse de demi-axes 1 et J
Quart de tour i	isométrie ; change de grain	i_D , qui n'est pas une isométrie
Promotion	le plan $\mathbb{C}$, i exact	le cercle s'écrase sur $[-1, 1]$
Statut	superposition stratale	anomalie cartésienne

TABLE 2 – Les deux lectures du jacobien $J = 2^{-n_\infty}$ entre les axes.

9 Une variante isotrope : la grille log-polaire

La construction à deux résolutions n'est pas la seule compatible avec le cercle. Si l'on exige au contraire que la grille du plan soit invariante par i , le cercle impose une grille différente.

Hypothèse 25 (Isotropie). Le plan est gradué par les rayons issus de l'origine aux angles multiples d'un pas δ du situs, et par des cercles concentriques de rayons r_j ($r_0 = 1$) ; et l'ensemble $\{\ln r_j + ik\delta : j, k \in \tilde{\mathbb{Z}}\}$ est invariant par le quart de tour $w \mapsto iw$ du plan de l'argument $w = \ln|z| + i \arg z$.

Théorème 26 (La grille log-polaire). *Sous l'hypothèse 25, $r_j = e^{j\delta}$ pour tout j . Les grains sont des carrés, à une déformation relative infinitésimale près ; les axes réel et imaginaire portent la même graduation logarithmique $e^{j\delta}$; et la racine $z \mapsto z^J$, qui agit sur le plan de l'argument comme l'homothétie $w \mapsto Jw$, envoie la grille grossière sur la réunion de a copies tournées de la grille fine.*

Démonstration. Notons $\rho_j = \ln r_j$. Les images $i \cdot ik\delta = -k\delta$ des points $ik\delta$ doivent appartenir à l'ensemble, donc $\delta\tilde{\mathbb{Z}} \subset \{\rho_j\}$; les images $i\rho_j$ des points ρ_j doivent y appartenir, donc $\rho_j \in \delta\tilde{\mathbb{Z}}$. D'où $\rho_j = j\delta$. Le grain compris entre $e^{j\delta}$ et $e^{(j+1)\delta}$ a pour rapport de côtés $(e^\delta - 1)/\delta \simeq 1$. Le demi-axe imaginaire positif est le rayon d'angle $\pi/2$, image du demi-axe réel positif par i . Enfin $J\delta_g = \delta_f$, donc $w \mapsto Jw$ envoie le réseau $\delta_g(\tilde{\mathbb{Z}} + i\tilde{\mathbb{Z}})$ sur $\delta_f(\tilde{\mathbb{Z}} + i\tilde{\mathbb{Z}})$; en revenant par l'exponentielle, un tour grossier devient le secteur d'angle δ_g , et les a rotations d'angle multiple de δ_g recouvrent le plan. $\square$

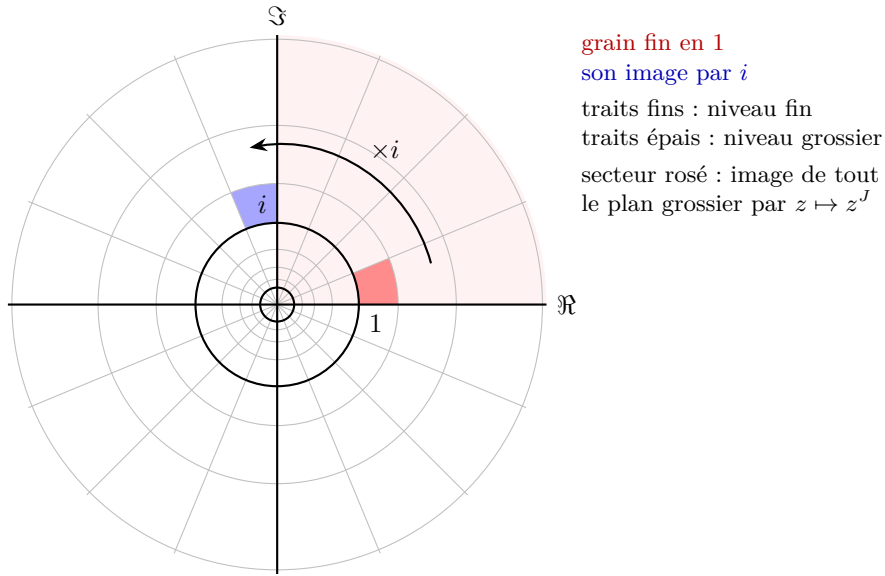


FIGURE 7 – La grille log-polaire du plan, dessinée avec $a = 4$: $\delta_g = \pi/2$, $\delta_f = \pi/8$. Les rayons proviennent du situs circulaire, les cercles concentriques de rayons $e^{j\delta_f}$ sont imposés par l'isotropie. Les rayons grossiers sont les axes, et les cercles grossiers ($e^{-\pi/2}$ et 1) sont aussi des cercles fins. Le quart de tour envoie le grain fin en 1 sur un grain fin de même forme.

Dans cette variante, i est une symétrie de la grille, et J agit avec le même facteur sur les deux directions du plan de l'argument ; mais les axes réel et imaginaire portent la même strate, et le lien direct entre les deux niveaux du cercle et les deux axes est perdu. Les deux constructions ont la même promotion, le plan $\mathbb{C}$. Le cercle seul ne tranche pas entre elles : la construction à deux résolutions privilégie la correspondance entre les niveaux et les axes, et rejoint le théorème 61 de [1] ; la variante isotrope privilégie la symétrie par i .

10 Le théorème 61 reformulé

Théorème 27 (Correspondances stratales du plan, lecture en résolution). *Le plan complexe stratal $P_{\mathbb{C}}$, muni de sa métrique euclidienne, porte les structures suivantes.*

1. Axe réel : la graduation fine $\delta_f\tilde{\mathbb{Z}}$, en correspondance avec G_{-2n_∞} , obtenue par déroulement de la grille fine du cercle.

2. Axe imaginaire : la graduation grossière $i\delta_g\tilde{\mathbb{Z}}$, en correspondance avec G_{-n_∞} , obtenue par déroulement de la grille grossière du cercle.
3. Cercle unité : le situs à deux niveaux, en correspondance avec le quotient $G_{-n_\infty}/G_{-2n_\infty}$.
4. Quart de tour : une isométrie exacte, qui relie les deux graduations en changeant de grain, par inclusion de l'axe imaginaire vers l'axe réel et par sous-échantillonnage de l'axe réel vers l'axe imaginaire.

La promotion de cette structure est le plan $\mathbb{C}$, sur lequel i est la rotation d'un quart de tour.

Démonstration. Points 1 et 2 : définition 8. Point 3 : section 3. Point 4 : théorème 11. Promotion : théorème 23. $\square$

Par rapport à [1, th. 61], seule la démonstration du point 2 change : l'axe imaginaire ne reçoit pas la strate grossière par rotation de l'axe réel, puisqu'une rotation conserve la taille des grains, mais par déroulement de la grille grossière du cercle. La rotation, elle, devient l'opération qui relie les deux strates.

Objet	Structure	Rôle stratal
cercle unité	situs à deux niveaux : a arcs grossiers de a arcs fins	quotient $G_{-n_\infty}/G_{-2n_\infty}$
axe réel	graduation fine $\delta_f\tilde{\mathbb{Z}}$ (déroulement)	G_{-2n_∞}
axe imaginaire	graduation grossière $i\delta_g\tilde{\mathbb{Z}}$ (déroulement)	G_{-n_∞}
grain du plan	rectangle $\delta_f \times \delta_g$	superposition des deux strates
jacobien $J = 2^{-n_\infty}$	rapport des pas ; a grains fins dans un grain grossier	lien entre les axes
multiplication par i	isométrie ; inclusion ($\text{Im} \rightarrow \text{Re}$), sous-échantillonnage ($\text{Re} \rightarrow \text{Im}$)	changement de grain
opérateur $\omega = 2^{n_\infty}i$	similitude (valeurs) ; vissage (argument) ; $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$; orbite en hélice	un niveau et un quart de tour
$z \mapsto z^{2^{n_\infty}}$	zoom du situs	passage fin $\rightarrow$ grossier sur le cercle
promotion	le plan $\mathbb{C}$; i exact	symétrie restaurée

TABLE 3 – Du cercle au plan : correspondances stratales, lecture en résolution.

11 Conclusion

Le plan complexe se construit à partir du cercle complexe à deux grilles.

- Le cercle porte un situs auto-similaire, dont le zoom est la puissance $z \mapsto z^{2^{n_\infty}}$; sur le cercle, i est une isométrie des deux niveaux.
- En déroulant la grille fine sur l'axe réel et la grille grossière sur l'axe imaginaire, on obtient un plan d'une seule métrique et de deux résolutions, dans le rapport $J = 2^{-n_\infty}$. La projection orthogonale ne convient pas : elle stratifie la graduation.

- Dans ce plan, i est une isométrie exacte qui change de grain : inclusion dans un sens, sous-échantillonnage dans l'autre. C'est la forme précise de l'idée que i exprime le passage d'un grain à l'autre.
- L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty} i$ en donne la version externe. Son carré $\omega^2 = -2^{2n_\infty}$ réunit $i^2 = -1$ (l'argument) et $(\#g_g)^2 = \#g_f$ (le module), et ses puissances décrivent la tour des résolutions comme un escalier en spirale. Sur le cylindre de l'argument, ω est un vissage : une translation d'un niveau (la résolution) et une rotation d'un quart de tour (la phase), dont l'orbite est une hélice. La promotion efface le module et garde l'argument.
- La symétrie par i , brisée au niveau des grains, est restaurée à la promotion, qui donne $\mathbb{C}$.
- Le même jacobien, lu comme une différence de métrique, aplatirait le cercle ; lu comme une différence de résolution, il est cohérent avec toute la construction du chapitre 13.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026 ; chap. 13 (Exponentiation) et chap. 14 (Anomalie cartésienne).
- [2] H. Genvrin, *Théorie des coupures et théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *La chute libre : une interprétation physique de la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Instantes et moments : le temps dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [6] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*, 3^e éd., McGraw-Hill, 1979.
- [7] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.