

Du monde du grain au monde expérimental

Préparation, mesure et espace des phases

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous examinons comment la structure du plan complexe dans la théorie du grain (deux niveaux d'observation congruents, un quart de tour qui les échange, un mouvement de rotation intrinsèque) peut servir à représenter des phénomènes physiques. Une proposition de l'auteur associe le grain fin à la *préparation* d'une expérience quantique et le grain grossier à la *mesure*, le passage du fin au grossier traduisant l'amplification de la mesure. Nous montrons que cette lecture est défendable à deux conditions : parler de couplage plutôt que d'intrication, et ne tenir pour observables que les quantités invariantes par la rotation intrinsèque. Ce second point n'est pas une contrainte ajoutée : c'est l'invariance de phase de la mécanique quantique, et, si l'on inclut la dilatation qui accompagne ω , c'est exactement la définition des états comme rayons. Nous proposons ensuite une seconde lecture, par l'espace des phases, où chaque élément de la construction a un équivalent précis : le grain rectangle est une cellule de Heisenberg d'un état comprimé, le quart de tour est la transformée de Fourier, l'échange J_c de la théorie du grain est l'évolution d'un oscillateur harmonique pendant un quart de période, et le mouvement de rotation intrinsèque est la « respiration » observée de la lumière comprimée. En mécanique classique, les déformations jacobiniennes sont les dérivées par rapport au temps (la vitesse déforme les positions, la force déforme l'impulsion), la masse n'étant qu'un facteur de conversion. En mécanique quantique, $p = -i\hbar d/dq$ s'écrit $\omega^{-1} d/dq$ si l'on identifie $\hbar$ à 2^{-n_∞} fois l'unité d'action macroscopique : au jacobien $d\psi/dq$ s'ajoutent le passage du grain grossier au grain fin et un quart de tour, ce qui fait apparaître le quantique au niveau d'observation fin. Nous indiquons enfin les limites de ces correspondances, qui sont structurelles et non quantitatives.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels : ce que la théorie du grain met en jeu	2
3	Point matériel classique, système quantique	3
4	Jacobiens et impulsion	3
4.1	En mécanique classique : les jacobiens sont des dérivées temporelles	4
4.2	En mécanique quantique : le jacobien, le passage au grain fin et le quart de tour	4
4.3	L'impulsion mesure une vitesse de rotation le long des positions	5
4.4	Niveau d'observation et passage au classique	5
5	Première lecture : préparation et mesure	6
5.1	La correspondance proposée	6
5.2	Première correction : couplage, et non intrication	7
5.3	Seconde correction : les axes n'ont pas de sens séparé	7

6	L'invariance : ce qui est observable	7
6.1	Tout paraît invariant : ce que cela exige	7
6.2	Avec la dilatation : les états sont des rayons	8
7	Seconde lecture : l'espace des phases	9
7.1	Le grain rectangle est une cellule de Heisenberg	9
7.2	Le quart de tour est la transformée de Fourier	9
7.3	L'échange J_c est un quart de période d'oscillateur	9
7.4	Le mouvement de rotation intrinsèque est une respiration observée	10
7.5	Et le changement de niveau ?	10
8	Synthèse	11

1 Introduction

La proposition de départ est la suivante.

Dans le plan cartésien, en mécanique classique, le point matériel est représenté par un point de résolution. En mécanique quantique, le système matériel est représenté par deux points de résolution, puisqu'on rattache à l'axe réel du plan complexe un grain g_{-kn_∞} et à l'axe imaginaire un grain $g_{-(k-1)n_\infty}$. Comme le grain de l'espace se propage du niveau fin vers le niveau grossier, on peut faire correspondre la préparation P d'une expérience quantique au grain fin et la mesure μ au grain grossier. Comme le plan est pris dans la rotation intrinsèque de l'espace (avec la dilatation associée), le grain d'observation, qui vaut le grain du référentiel de l'expérimentateur, est pris dans le même mouvement, si bien que tout paraît invariant.

Le présent texte examine cette proposition avec les outils de la théorie du grain [1] et ceux de la physique. Il ne dérive pas la mécanique quantique de la théorie du grain : il établit des *correspondances structurelles*, dit lesquelles sont exactes, et signale où elles s'arrêtent. Deux lectures sont développées :

- la **lecture préparation / mesure** (section 5), qui est celle de la proposition, précisée et corrigée sur deux points ;
- la **lecture par l'espace des phases** (section 7), où la correspondance est plus précise.

La section 6 traite de l'invariance (« tout paraît invariant ») dans les deux lectures, et la section 8 les réunit.

2 Rappels : ce que la théorie du grain met en jeu

Point de résolution. Une représentation est au niveau d'observation k si son unité élémentaire est le grain g_{-kn_∞} , d'épaisseur $\delta_k = 2^{-kn_\infty}$. Ce grain est appelé le *point de résolution* ; il est distinct du point euclidien, qui est de mesure nulle [4].

Le plan complexe à deux résolutions. Dans la lecture à deux résolutions [2], l'axe horizontal porte le grain fin δ_f et l'axe vertical le grain grossier $\delta_g = 2^{n_\infty}\delta_f$. Les deux niveaux d'observation sont distincts et *congruents* : le pas grossier est un multiple entier du pas fin, de rapport $c = 2^{n_\infty}$ [4]. La grille est $\Pi(\delta_f, \delta_g) = \delta_f\tilde{\mathbb{Z}} + i\delta_g\tilde{\mathbb{Z}}$, et ses grains sont des rectangles.

Le quart de tour et l'échange J_c . Le quart de tour $z \mapsto iz$ échange les deux niveaux entre les axes ; il n'est pas une symétrie de la grille. L'échange (*Plan complexe et grain nul* [3], prop. 28)

$$J_c(x, y) = (-y/c, cx)$$

est un aller-retour en résolution : il monte d'un niveau à l'aller, redescend au retour, et vérifie $J_c^2 = -\text{Id}$.

Le mouvement de rotation intrinsèque. L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty}i$ fait un quart de tour et monte d'un niveau ; l'orbite d'une grille est une hélice, de phase périodique d'ordre 4 et de hauteur sans retour. L'espace du grain, pris dans deux niveaux adjacents, est ainsi animé d'un mouvement de rotation intrinsèque dont le paramètre est le niveau de résolution [5]. À la promotion, ce mouvement se réduit à la symétrie d'ordre 4 de $\mathbb{C}$.

3 Point matériel classique, système quantique

La proposition oppose un point de résolution (mécanique classique) à deux (mécanique quantique). Il faut d'abord corriger le point de départ classique.

Remarque 1 (Le point matériel classique a déjà deux coordonnées). En mécanique classique, l'état d'un point matériel n'est pas sa seule position q , mais le couple (q, p) de sa position et de son impulsion : c'est un point de l'espace des phases, qui est un plan. La différence entre les deux mécaniques n'est donc pas le nombre de coordonnées, mais la finesse avec laquelle elles peuvent être connues ensemble.

Proposition 2 (Un niveau, ou deux niveaux liés). 1. *En mécanique classique, q et p peuvent être connus simultanément avec une précision arbitraire : l'espace des phases peut être lu avec un seul niveau d'observation, aussi fin qu'on le veut, sur les deux axes. C'est la structure du plan réel de [4] (grain carré, un seul niveau).*

2. *En mécanique quantique, l'inégalité de Heisenberg*

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

interdit de lire les deux axes au même niveau fin : si l'un est lu finement, l'autre l'est grossièrement, et le produit des deux résolutions est borné inférieurement. C'est la structure d'un plan à deux niveaux d'observation liés.

La proposition de l'auteur se reformule donc ainsi : *le système quantique est représenté par deux points de résolution, l'un fin et l'autre grossier, portés par deux axes conjugués, et dont le produit est borné.* C'est cette reformulation qui guidera la lecture par l'espace des phases (section 7).

4 Jacobiens et impulsion

La proposition 2 oppose un niveau d'observation (classique) à deux niveaux liés (quantique). On précise ici où interviennent les déformations jacobiniennes dans chacune des deux mécaniques. Il faut d'abord fixer le sens du mot.

Définition 3 (Déformation jacobienne). Soit f une fonction dérivable d'un axe (le domaine) vers un autre (le codomaine). Son jacobien $f'(x)$ met en relation deux éléments différentiels par l'action de la dérivée,

$$df = f'(x) dx,$$

et décrit la déformation de l'axe du codomaine par rapport à celui du domaine. Un facteur constant qui convertit une grandeur en une autre, de nature différente (comme la masse, qui convertit une vitesse en impulsion), est un *facteur de conversion*, et non une déformation jacobienne au sens strict.

Dans la théorie du grain, la déformation de l'axe du codomaine par excellence est le passage du grain grossier au grain fin, $y \mapsto Jy$ avec $J = 2^{-n_\infty}$, qui envoie la graduation grossière sur la graduation fine (*Une théorie de la mesure du grain*, prop. 36).

4.1 En mécanique classique : les jacobiens sont des dérivées temporelles

Proposition 4 (Jacobien classiques). *En mécanique classique, les deux axes de l'espace des phases sont déformés, par rapport à l'axe du temps, par leurs propres jacobiens :*

1. la vitesse déforme les positions : $dq = q'(t) dt$, avec $q'(t) = p/m$; au second ordre, $d^2q = q''(t) dt^2 = \frac{1}{m} p'(t) dt^2$;
2. la force déforme l'impulsion : $dp = p'(t) dt$, où $p'(t) = F = m q''(t)$ est la force, c'est-à-dire la masse multipliée par l'accélération.

L'impulsion $p = m q'(t)$ est la masse multipliée par le jacobien $q'(t)$: la masse est un facteur de conversion, et non une déformation. Pour une masse et une vitesse limitées, les deux axes se lisent au même niveau d'observation : c'est la structure du plan réel.

Démonstration. Le point 1 est la définition de la vitesse, $q' = p/m$, dérivée une fois de plus pour le second ordre. Le point 2 est la loi de Newton, $p'(t) = F = m q''(t)$. $\square$

Remarque 5 (Équations de Hamilton). Ce couple de jacobiens est exactement celui des équations de Hamilton, $dq = \frac{\partial H}{\partial p} dt$ et $dp = -\frac{\partial H}{\partial q} dt$, pour $H = p^2/(2m) + V(q)$: la vitesse p/m fait avancer la position, la force $-V'(q)$ fait avancer l'impulsion. Les mêmes relations, prises en moyenne, valent aussi en mécanique quantique (théorème d'Ehrenfest) : les jacobiens *par rapport au temps* ne distinguent donc pas les deux mécaniques. Ce qui les distingue est la relation entre la position et l'impulsion à un instant donné, qui fait l'objet de la sous-section suivante.

4.2 En mécanique quantique : le jacobien, le passage au grain fin et le quart de tour

En mécanique quantique, l'impulsion n'est plus une fonction de la position : c'est une *opération* sur la fonction d'onde $\psi(q)$. Dans la représentation de Schrödinger,

$$p\psi = -i\hbar\psi'(q), \quad [q, p] = i\hbar.$$

On y lit trois ingrédients :

- un *jacobien* au sens de la définition 3 : la dérivée $\psi'(q)$, qui met en relation $d\psi$ et dq , et déforme l'axe du codomaine (le plan des amplitudes) par rapport à l'axe des positions ; la dérivée est prise par rapport à la position, et non au temps ;
- un facteur $\hbar$, très petit devant les actions macroscopiques ;
- un facteur $-i$, c'est-à-dire un quart de tour.

Hypothèse 6 (Échelle d'action). Soit A l'unité d'action du niveau d'observation macroscopique. On pose

$$\hbar = J A, \quad J = 2^{-n_\infty}.$$

Proposition 7 (L'impulsion quantique). *Sous l'hypothèse 6, et en mesurant les actions dans l'unité A ,*

$$p\psi = \omega^{-1}\psi'(q), \quad \omega^{-1} = \frac{1}{2^{n_\infty}i} = -iJ.$$

L'impulsion agit en trois temps : on prend le jacobien $\psi'(q)$; on déforme l'axe du codomaine par le passage du grain grossier au grain fin, de facteur J ; on fait un quart de tour.

Démonstration. $\omega = 2^{n_\infty}i$ donne $\omega^{-1} = 2^{-n_\infty}/i = -iJ$, et $-i\hbar = -iJ$ dans l'unité A . $\square$

Le facteur J joue donc exactement le rôle que lui donne la théorie du grain : une déformation de l'axe du codomaine par passage du grossier au fin. La différence entre les deux mécaniques se lit sur deux caractères qui n'existent qu'en quantique : ce *changement de grain* et le *quart de tour*. En classique, les jacobiens sont des dérivées temporelles, sans changement de grain ni rotation. C'est, dans l'espace des phases, la même démarcation que celle du plan réel et du plan complexe (*Niveau d'observation* [4], th. 24).

4.3 L'impulsion mesure une vitesse de rotation le long des positions

Proposition 8 (Hélice de phase). *Un état d'impulsion p a pour fonction d'onde*

$$\psi_p(q) = e^{ipq/\hbar}.$$

Le long de l'axe des positions, sa phase tourne dans le plan complexe à la vitesse $p/\hbar$: elle fait un quart de tour sur la distance $\Delta q = \pi\hbar/(2p)$ et un tour complet sur la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = 2\pi\hbar/p$.

Démonstration. La phase vaut $pq/\hbar$; elle augmente de $\pi/2$ quand q augmente de $\pi\hbar/(2p)$, et de 2π quand q augmente de $2\pi\hbar/p$. $\square$

Dans l'espace $(q, \text{Re } \psi, \text{Im } \psi)$, l'état d'impulsion est une hélice : c'est un mouvement de rotation intrinsèque du plan complexe [5], dont le paramètre est ici la position, et dont l'impulsion mesure la vitesse de rotation. Sous l'hypothèse 6, pour une impulsion limitée (dans les unités du niveau macroscopique), la longueur d'onde $\lambda = 2\pi JA/p$ est infinitésimale d'ordre J : l'hélice de phase fait un tour par grain de niveau $-n_\infty$ environ.

4.4 Niveau d'observation et passage au classique

Proposition 9 (Le quantique apparaît au niveau fin). *Sous l'hypothèse 6 :*

1. *au niveau d'observation macroscopique, où l'unité d'action est A , la quantité $\hbar = JA$ est ponctuelle, au sens de Niveau d'observation [4] (déf. 2) : le commutateur $[q, p] = i\hbar$ est invisible, q et p se comportent comme des grandeurs qui commutent, et la phase de l'hélice de de Broglie, qui tourne d'un tour par grain fin, est invisible elle aussi ;*
2. *au niveau d'observation fin, où l'unité d'action est JA , la quantité $\hbar$ vaut exactement un point de résolution : le commutateur, la phase et les interférences deviennent visibles.*

Démonstration. Au niveau macroscopique, $\hbar/A = J = 2^{-n_\infty} < 1$: l'action $\hbar$ est contenue dans un seul point de résolution. Au niveau fin, $\hbar/(JA) = 1$. La longueur d'onde λ étant d'ordre J (proposition 8), la phase fait un tour complet à l'intérieur d'un point de résolution macroscopique. $\square$

	mécanique classique	mécanique quantique
impulsion	$p = m q'(t)$	$p \psi = -i\hbar \psi'(q) = \omega^{-1} \psi'(q)$
jacobien	$q'(t), p'(t)$ (dérivées temporelles)	$\psi'(q)$ (dérivée en position)
masse	facteur de conversion	—
changement de grain	aucun	$J = 2^{-n_\infty}$ (grossier $\rightarrow$ fin)
quart de tour	absent	présent ($-i$)
niveaux d'observation	un seul	deux, congruents
structure du plan des phases	plan réel	plan complexe
q et p	commutent	$[q, p] = i\hbar$, visible au niveau fin

TABLE 1 – Jacobiens et impulsion dans les deux mécaniques.

Le quantique serait donc *ce qui se voit quand on observe au niveau où le jacobien J vaut un point de résolution*, et le classique ce qui en reste au niveau grossier. Ce passage du fin au grossier est celui de la mesure dans la première lecture (section 5) : l'enregistrement macroscopique d'une mesure se fait au niveau où $\hbar$ n'est plus visible.

Remarque 10 (Deux précautions). 1. *Unités.* Position et impulsion n'ont pas la même dimension ; les relier suppose un facteur de conversion, donc une échelle. C'est pourquoi l'hypothèse 6 porte sur le rapport de $\hbar$ à une unité d'action, et non sur $\hbar$ seul. Dans l'oscillateur de la proposition 25, cette échelle est $m\Omega$.

2. *Statut de l'hypothèse.* Physiquement, $\hbar$ est une constante finie ; son rapport aux actions macroscopiques est seulement très petit (de l'ordre de 10^{-34} pour une unité d'action d'un joule-seconde). L'hypothèse 6 idéalise cette petitesse en un infinitésimal de la théorie du grain. Elle rend compte de la structure du passage au classique, non de la valeur de $\hbar$.

5 Première lecture : préparation et mesure

5.1 La correspondance proposée

Définition 11 (Lecture préparation / mesure). On associe

- au grain fin δ_f la *préparation* P de l'expérience ;
- au grain grossier δ_g la *mesure* μ ;
- au sens de propagation du grain, du fin vers le grossier, le passage de la préparation à la mesure.

Remarque 12 (Le sens fin vers grossier est celui de la mesure). Une mesure quantique *amplifie* un événement microscopique jusqu'à un enregistrement macroscopique : la position d'une aiguille, le dé clic d'un compteur. Cet enregistrement est lisible à un niveau d'observation beaucoup plus grossier que celui de l'événement qui l'a produit. La théorie de la décohérence [8] décrit précisément ce passage : les degrés de liberté fins de l'appareil et de son environnement sont moyennés, et seules subsistent des variables grossières, classiques. Le sens « fin vers grossier » de la proposition est donc physiquement fondé.

Remarque 13 (Une probabilité naît de deux composantes). Dans la règle de Born, la probabilité d'un résultat m quand le système est préparé dans l'état $|\psi\rangle$ est

$$p(m) = |\langle m | \psi \rangle|^2,$$

qui apparie un vecteur venu de la préparation ($|\psi\rangle$) et un vecteur venu de la mesure ($\langle m|$). Certaines formulations rendent cet appariement explicite : le formalisme à deux vecteurs d'état d'Aharonov, Bergmann et Lebowitz [6], où un système entre deux instants est décrit par un état issu de la préparation et un état issu de la mesure, ou l'interprétation transactionnelle de Cramer [7], où la probabilité est le produit d'une onde issue de la préparation et d'une onde conjuguée issue de la mesure. La lecture préparation / mesure a donc des analogues dans la littérature.

Remarque 14 (Pourquoi le plan complexe). Que la théorie quantique ait besoin des nombres complexes, et non seulement de deux nombres réels, est une question étudiée. Renou et al. [9] ont proposé une expérience censée distinguer la théorie quantique complexe d'une version réelle, et des expériences ont suivi ; la conclusion est toutefois contestée [10]. Il reste que la structure à deux composantes liées par i est au cœur du formalisme, ce qui donne un appui à l'idée de représenter un système quantique par un plan complexe plutôt que par une droite.

5.2 Première correction : couplage, et non intrication

La proposition dit que le plan complexe traduit « l'intrication » de la préparation et de la mesure. Le mot a un sens technique précis qui ne convient pas ici.

Remarque 15 (Somme directe et produit tensoriel). L'*intrication* est une propriété d'un état de *deux sous-systèmes* : un état de l'espace produit $H_A \otimes H_B$ est intriqué s'il ne s'écrit pas comme un produit $|a\rangle \otimes |b\rangle$. Or le plan complexe est une *somme directe*, $\mathbb{C} = \mathbb{R} \oplus i\mathbb{R}$, et non un produit tensoriel ; et la préparation et la mesure ne sont pas deux sous-systèmes d'un même état, mais deux étapes d'une même expérience. Nous parlerons donc de *couplage* (ou d'*appariement*) de la préparation et de la mesure, et réserverons « intrication » à son sens technique.

5.3 Seconde correction : les axes n'ont pas de sens séparé

Proposition 16 (Invariance de phase globale). *Pour tout état $|\psi\rangle$ et tout réel θ , les états $|\psi\rangle$ et $e^{i\theta}|\psi\rangle$ donnent les mêmes probabilités pour toute mesure. En particulier, pour $\theta = \pi/2$, le quart de tour $\psi \mapsto i\psi$ échange les parties réelle et imaginaire de chaque amplitude sans rien changer aux prédictions.*

Démonstration. $|\langle m|e^{i\theta}|\psi\rangle|^2 = |e^{i\theta}|^2|\langle m|\psi\rangle|^2 = |\langle m|\psi\rangle|^2$. Si $z = x + iy$, alors $iz = -y + ix$: la partie réelle devient l'opposée de l'ancienne partie imaginaire, et inversement. $\square$

Il en résulte qu'associer la partie réelle d'une amplitude à la préparation et sa partie imaginaire à la mesure *dépend du repère* : un quart de tour de la phase, physiquement inobservable, échangerait les rôles. Prise isolément, la correspondance « axe réel = préparation, axe imaginaire = mesure » n'a donc pas de contenu physique. La section suivante montre que le second paragraphe de la proposition répare exactement ce défaut.

6 L'invariance : ce qui est observable

6.1 Tout paraît invariant : ce que cela exige

Le second paragraphe de la proposition dit que le grain d'observation de l'expérimentateur est pris dans le même mouvement de rotation intrinsèque que le plan, « si bien que tout paraît invariant ». Il faut en tirer la conséquence : *seules les quantités invariantes par ce mouvement commun sont observables*. Ce principe est exactement celui de la proposition 16, et il en précise la portée.

Proposition 17 (Invariants de la rotation). *Soient des amplitudes $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, sur lesquelles la rotation agit par $z_j \mapsto e^{i\theta} z_j$ pour tous les j à la fois. Un monôme $z^\alpha \bar{z}^\beta = \prod_j z_j^{\alpha_j} \bar{z}_j^{\beta_j}$ est invariant pour tout θ si et seulement si $\sum_j \alpha_j = \sum_j \beta_j$; tout monôme invariant est alors un produit de termes $z_j \bar{z}_k$.*

Démonstration. Le monôme est multiplié par $e^{i\theta(\sum \alpha_j - \sum \beta_j)}$, qui vaut 1 pour tout θ si et seulement si l'exposant est nul. Si $\sum \alpha_j = \sum \beta_j = d$, on écrit la liste des d facteurs z et celle des d facteurs $\bar{z}$, et on les apparie un à un : le monôme est le produit des d paires $z_j \bar{z}_k$ ainsi formées. $\square$

Les quantités observables sont donc construites à partir des $|z_j|^2$ (probabilités) et des $z_j \bar{z}_k$ (phases *relatives*, qui gouvernent les interférences). Ni la partie réelle ni la partie imaginaire d'une amplitude isolée ne le sont. Dans la lecture préparation / mesure, la conséquence est nette : *l'attribution de l'axe fin à la préparation et de l'axe grossier à la mesure est un choix de repère, comme le choix entre i et $-i$; ce qui est physique, c'est l'appariement des deux, dont la probabilité de Born est l'invariant.*

6.2 Avec la dilatation : les états sont des rayons

La proposition précise que la rotation intrinsèque s'accompagne d'une dilatation : l'opérateur $\omega = 2^{n\infty} i$ tourne *et* dilate. Si le grain de l'expérimentateur est pris dans ce mouvement complet, les observables doivent être invariantes par rotation et par dilatation, c'est-à-dire par multiplication par un nombre complexe non nul quelconque.

Proposition 18 (Invariance par $\mathbb{C}^*$). *Les probabilités normalisées*

$$p_j = \frac{|z_j|^2}{\sum_k |z_k|^2}$$

sont invariantes par $z_j \mapsto \lambda z_j$ (pour tous les j à la fois), pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^$, et en particulier pour $\lambda = \omega^k$.*

Démonstration. Numérateur et dénominateur sont multipliés par $|\lambda|^2 \neq 0$. $\square$

Or c'est exactement la façon dont la mécanique quantique définit un état : non pas comme un vecteur, mais comme un *rayon*, c'est-à-dire un vecteur défini à un facteur complexe non nul près. L'espace des états physiques est l'espace projectif, quotient par l'action de $\mathbb{C}^*$. Le groupe $\mathbb{C}^*$ est celui des similitudes du plan complexe, rotations et dilatations, et il contient toutes les puissances de ω .

Remarque 19 (Ce que la théorie du grain retrouve). L'énoncé « le référentiel de l'expérimentateur est pris dans la rotation intrinsèque et dans la dilatation associée, si bien que tout paraît invariant » est donc la traduction, dans la théorie du grain, d'un principe déjà présent en mécanique quantique : les états sont des rayons, et les observables sont invariantes par $\mathbb{C}^*$. La correspondance est ici exacte, et c'est le point le plus solide de la première lecture.

Remarque 20 (Où la rotation redevient visible). Une rotation qui emporte tout, observateur compris, est inobservable. Elle redevient visible dès que deux systèmes ne tournent pas ensemble : leurs phases relatives $z_j \bar{z}_k$ varient, et cela se voit dans les interférences. C'est là qu'il faudrait chercher une trace expérimentale d'un mouvement de rotation intrinsèque : non dans un système isolé, mais dans la comparaison de deux systèmes.

7 Seconde lecture : l'espace des phases

La proposition 2 suggère de placer les deux niveaux d'observation sur les deux axes conjugués de l'espace des phases, la position q et l'impulsion p . Chaque élément de la construction y trouve alors un équivalent précis. On travaille en unités où $\hbar = 1$.

7.1 Le grain rectangle est une cellule de Heisenberg

Définition 21 (État comprimé). Un paquet d'ondes gaussien de largeur σ en position a pour incertitudes

$$\Delta q = \sigma, \quad \Delta p = \frac{1}{2\sigma}, \quad \Delta q \Delta p = \frac{1}{2}.$$

Pour σ petit, il est *comprimé* en position : fin en q , grossier en p . Le rapport $\Delta p/\Delta q = 1/(2\sigma^2)$ mesure la compression.

Proposition 22 (Correspondance des grains). *Un état comprimé réalise, dans l'espace des phases, la structure du grain rectangle de la lecture à deux résolutions : un axe lu finement, l'autre grossièrement, avec une aire minimale fixe. Le rapport de congruence c du grain correspond au rapport $\Delta p/\Delta q$.*

Remarque 23 (Limite de la correspondance). Deux différences sont à noter. D'une part, l'aire d'une cellule de Heisenberg est fixée par la physique ($\hbar/2$), tandis que l'aire $\delta_f \delta_g$ d'un grain du plan n'est fixée par rien ; il faut *choisir* l'échelle pour identifier les deux. D'autre part, le rapport $c = 2^{n_\infty}$ correspondrait à une compression infinie, qu'aucun état physique n'atteint, et le rapport physique $\Delta p/\Delta q$ est un réel positif quelconque, et non un entier comme l'exige la congruence arithmétique. La correspondance porte sur la *structure*, non sur les valeurs.

7.2 Le quart de tour est la transformée de Fourier

Proposition 24 (Fourier). *La transformée de Fourier $\mathcal{F}$, qui fait passer de la représentation en position à la représentation en impulsion, agit sur l'espace des phases comme un quart de tour : sa fonction de Wigner tourne d'un angle droit (le sens de rotation dépend des conventions). En particulier :*

1. $\mathcal{F}$ envoie un état fin en position et grossier en impulsion sur un état grossier en position et fin en impulsion : elle échange les niveaux entre les axes ;
2. $\mathcal{F}^2$ est la parité $\psi(x) \mapsto \psi(-x)$, c'est-à-dire le demi-tour $(q, p) \mapsto (-q, -p)$;
3. $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$.

Démonstration. Ce sont des propriétés classiques de la transformée de Fourier unitaire : $\mathcal{F}^2 \psi(x) = \psi(-x)$, d'où $\mathcal{F}^4 = \text{Id}$; la transformée d'une gaussienne de largeur σ est une gaussienne de largeur $1/(2\sigma)$ en impulsion. La rotation de la fonction de Wigner est démontrée dans [11]. $\square$

On retrouve le cycle d'ordre 4 du quart de tour, avec son carré égal au demi-tour : c'est la structure $J^2 = -\text{Id}$ de la théorie du grain.

7.3 L'échange J_c est un quart de période d'oscillateur

Proposition 25 (L'échange est symplectique). 1. J_c conserve les aires : $\det J_c = 1$.

2. $J_c = S R S^{-1}$, où $R(x, y) = (-y, x)$ est le quart de tour et $S(x, y) = (sx, y/s)$ la compression de rapport $s = c^{-1/2}$. C'est un quart de tour lu dans les unités propres de chaque axe.

3. Pour l'oscillateur harmonique de masse m et de pulsation Ω tels que $m\Omega = c$, l'évolution classique pendant un quart de période, parcouru dans le sens rétrograde, est $(q, p) \mapsto (-p/c, cq) = J_c(q, p)$.

Démonstration. Point 1. La matrice de J_c est $\begin{pmatrix} 0 & -1/c \\ c & 0 \end{pmatrix}$, de déterminant $0 - (-1/c)(c) = 1$.

Point 2. $S^{-1}(x, y) = (x/s, sy)$, puis R donne $(-sy, x/s)$, puis S donne $(-s^2y, x/s^2)$. Avec $s^2 = 1/c$, c'est $(-y/c, cx)$.

Point 3. L'oscillateur a pour flot $q(t) = q \cos \Omega t + \frac{p}{m\Omega} \sin \Omega t$, $p(t) = p \cos \Omega t - m\Omega q \sin \Omega t$. Pour $\Omega t = -\pi/2$, on obtient $q(t) = -p/(m\Omega)$ et $p(t) = m\Omega q$, soit J_c avec $m\Omega = c$. Le sens rétrograde correspond au choix de i plutôt que de $-i$. $\square$

L'aller-retour en résolution de *Plan complexe et grain nul* a donc un équivalent physique exact : c'est l'évolution d'un oscillateur harmonique pendant un quart de période, lue dans des unités adaptées à la compression. Le fait que J_c ne soit pas une isométrie pour $c \neq 1$ ([3], rem. 30) correspond au fait que l'oscillateur n'a pas la même échelle naturelle en position et en impulsion ; le fait qu'il conserve les aires correspond à la conservation du volume de l'espace des phases (théorème de Liouville).

7.4 Le mouvement de rotation intrinsèque est une respiration observée

Proposition 26 (Respiration d'un état comprimé). *Sous l'évolution d'un oscillateur harmonique, l'espace des phases tourne rigidement à la pulsation Ω . Un état comprimé en position le devient en impulsion au bout d'un quart de période, redevient comprimé en position au bout d'une demi-période (avec les signes renversés), et revient à l'identique au bout d'une période. L'incertitude en position oscille donc à la pulsation 2Ω .*

Démonstration. Pour l'oscillateur, la fonction de Wigner est transportée rigidement par le flot classique, qui est une rotation de l'espace des phases dans les unités naturelles [11]. Le point 3 de la proposition 25 donne l'état au quart de période ; la demi-période donne le demi-tour. La largeur en position, invariante par le demi-tour, a donc la période π/Ω . $\square$

Ce phénomène est observé : pour la lumière comprimée, le bruit quantique passe d'une quadrature à l'autre deux fois par période du champ [12, 11]. C'est l'image physique la plus directe du mouvement de rotation intrinsèque de [5] : quatre états successifs, discernables par l'axe qui porte le grain fin, avec un demi-tour qui retourne l'orientation. Une différence demeure : le paramètre physique est le *temps*, alors que celui de la théorie du grain est le *niveau de résolution*.

7.5 Et le changement de niveau ?

L'échange J_c et la rotation conservent les aires. L'opérateur $\omega = 2^{n_\infty}i$, lui, dilate les deux axes et multiplie les aires par 2^{2n_∞} : il n'est pas symplectique. Dans l'espace des phases, dilater les cellules revient à regrouper un grand nombre de cellules de Heisenberg en une cellule plus grossière, c'est-à-dire à passer d'une description quantique à une description de plus en plus classique, où la cellule élémentaire est grande devant $\hbar$.

Remarque 27 (Les deux lectures se rejoignent). On retrouve ainsi, par l'espace des phases, le sens « fin vers grossier » de la première lecture : le niveau fin est celui de la cellule quantique, le niveau grossier celui de la description macroscopique, et le passage de l'un à l'autre est l'amplification qui fait d'un événement quantique un enregistrement classique. Cette correspondance est plus spéculative que les précédentes : elle suppose d'identifier le changement de niveau de la théorie du grain à un regroupement de cellules de l'espace des phases, ce qui reste à formuler précisément.

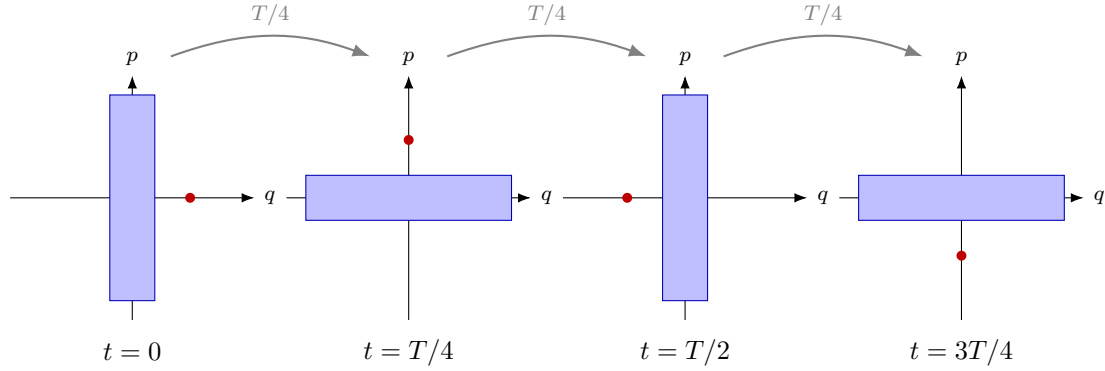


FIGURE 1 – Respiration d’un état comprimé sous l’évolution d’un oscillateur : le rectangle d’incertitude (fin en q , grossier en p) tourne d’un quart de tour par quart de période ; le point rouge marque l’orientation. C’est la forme physique des quatre états de grille du mouvement de rotation intrinsèque.

8 Synthèse

Ce qui est établi.

- La lecture préparation / mesure est défendable si l’on parle de couplage plutôt que d’intrication, et si l’on ne tient pour observables que les invariants de la rotation intrinsèque. Ce second point est exactement l’invariance de phase de la mécanique quantique, et, avec la dilatation, la définition des états comme rayons.
- L’attribution de l’axe fin à la préparation et de l’axe grossier à la mesure est un choix de repère ; l’appariement des deux est physique.
- Dans l’espace des phases, le grain rectangle, le quart de tour, l’échange J_c et le mouvement de rotation intrinsèque ont des équivalents exacts : cellule d’un état comprimé, transformée de Fourier, quart de période d’oscillateur, respiration de la lumière comprimée.
- En classique, les jacobiens sont les dérivées temporelles (vitesse, force), la masse étant un facteur de conversion. En quantique, au jacobien $\psi'(q)$ s’ajoutent le passage du grain grossier au grain fin (J) et un quart de tour : $p = \omega^{-1} d/dq$ sous l’hypothèse $\hbar = JA$. Le quantique est ce qui devient visible au niveau d’observation où $\hbar$ vaut un point de résolution.

Limites. Les correspondances sont structurelles. L’échelle ($\hbar$ contre $\delta_f \delta_g$), la valeur du rapport (2^{n_∞} contre une compression finie, entier contre réel) et la nature du paramètre (niveau contre temps) différent. Aucune ne dérive la mécanique quantique de la théorie du grain ; elles montrent que la théorie du grain possède, au niveau des grains, des structures que la mécanique quantique utilise.

Questions ouvertes.

1. *Niveau et temps.* Peut-on relier le paramètre de niveau du mouvement de rotation intrinsèque au temps d’une évolution physique, par exemple à travers la période d’un oscillateur ?
2. *Changement de niveau.* Formuler précisément le regroupement des cellules de l’espace des phases comme changement de niveau d’observation, et le comparer au passage du quantique au classique.

théorie du grain	physique	statut
grain fin, grain grossier	préparation, mesure	défendable (lecture A)
passage du fin au grossier	amplification, décohérence	fondé
couplage des deux grains	appariement de Born $ \langle m \psi\rangle ^2$	fondé; « intrication » à éviter
rotation qui emporte l'observateur	invariance de phase globale	exact
rotation et dilatation (ω)	états comme rayons, invariance par $\mathbb{C}^*$	exact
un niveau d'observation (plan réel)	espace des phases classique	exact
deux niveaux liés	inégalité de Heisenberg	exact (structure)
grain rectangle	cellule d'un état comprimé	structurel; échelle à choisir
quart de tour, $J^2 = -\text{Id}$	transformée de Fourier, $\mathcal{F}^2 = \text{parité}$	exact
échange J_c	oscillateur, quart de période	exact
mouvement de rotation intrinsèque	respiration de la lumière comprimée	exact; paramètre temps et non niveau
changement de niveau	regroupement de cellules, passage au classique	spéculatif
jacobiens temporels, m de conversion	équations de Hamilton	exact
jacobien $\psi'(q)$, grain fin J , quart de tour	$p = -i\hbar d/dq$	exact si $\hbar = JA$ (hypothèse)
niveau où J vaut un grain	apparition des effets quantiques	structurel

TABLE 2 – Les correspondances et leur statut.

3. *Deux systèmes.* Construire, dans la théorie du grain, deux systèmes animés de rotations intrinsèques différentes, et exprimer leurs phases relatives, seules observables (section 6).
4. *Intrication.* La théorie du grain peut-elle produire un produit tensoriel de deux plans, où l'intrication au sens technique aurait un équivalent ?

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Du cercle complexe au plan complexe : deux axes, deux résolutions*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, manuscrit, 2026.
- [6] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, J. L. Lebowitz, « Time symmetry in the quantum process of measurement », *Phys. Rev.* **134** (1964), B1410.

- [7] J. G. Cramer, « The transactional interpretation of quantum mechanics », *Rev. Mod. Phys.* **58** (1986), 647.
- [8] W. H. Zurek, « Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical », *Rev. Mod. Phys.* **75** (2003), 715.
- [9] M.-O. Renou et al., « Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified », *Nature* **600** (2021), 625–629.
- [10] « Quantum theory based on real numbers cannot be experimentally falsified », preprint arXiv :2603.19208, 2026.
- [11] U. Leonhardt, *Measuring the Quantum State of Light*, Cambridge University Press, 1997.
- [12] D. F. Walls, G. J. Milburn, *Quantum Optics*, 2^e éd., Springer, 2008.