

h comme circulation sur le cercle élémentaire

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Une note de 2014 cherchait à faire émerger la constante de Planck d'un modèle géométrique élémentaire, un point en rotation sur un cercle, soumis à une force de cohésion centripète F_G . Nous en reprenons les ingrédients en corrigeant l'enchaînement. La loi $E \propto 1/\lambda$, prise comme postulat issu de l'expérience, donne l'existence d'une constante d'action et la relation de de Broglie $p = \hbar/\rho_0$. La circulation du moment sur un tour du cercle vaut alors exactement h : c'est la condition de Bohr–Sommerfeld, et c'est elle, et non une intégration en temps, qui fait apparaître h . L'énergie d'un quantum s'en déduit par période, $E = h\nu$, sans sommation sur le train d'onde. La force de cohésion est $F_G = \hbar c/\rho_0^2$, dimensionnellement correcte, en $1/\rho^2$ comme le supposait la note. Elle vaut la force de Coulomb divisée par la constante de structure fine, et la force de Planck c^4/G à la longueur de Planck. Dans la théorie du grain, le cercle du modèle est le cercle élémentaire : h y apparaît comme une circulation globale, portée par le tour entier et non par un grain isolé. Le passage du demi-cercle grossier au cercle fin montre enfin que F_G est une force virtuelle : son travail et son impulsion sont nuls sur une période, et le niveau grossier ne voit qu'une translation libre.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Le modèle	2
3	Le postulat de de Broglie	2
4	Un tour du cercle : l'action h	3
5	L'énergie par période	3
6	La force de cohésion	4
7	Ordres de grandeur et deux ponts	4
8	Lecture dans la théorie du grain	5
8.1	Le doublement d'angle	5
8.2	Le cercle élémentaire et la circulation h	5
8.3	Du grain grossier au grain fin : F_G est une force virtuelle	6
9	Synthèse	7

1 Introduction

La théorie du grain se formule en mathématiques par le couple grain grossier, grain fin. Pour passer à la physique, il faut associer à cette géométrie des grandeurs mesurables : quantité de mouvement, énergie, action, force. La note de 2014, *h comme constante d'intégration* [1], en est une première tentative : un point M parcourt un cercle de rayon ρ_0 , soumis à une force centripète F_G , et l'on cherche à faire émerger la constante de Planck et la relation d'Einstein $E = h\nu$.

Les ingrédients de cette note sont justes ; plusieurs étapes de leur enchaînement ne le sont pas (tableau 1). Nous les réordonnons :

$$\underbrace{E \propto 1/\lambda}_{\text{postulat}} \implies \underbrace{p = \hbar/\rho_0}_{\text{de Broglie}} \implies \underbrace{\oint p ds = h}_{\text{un tour}} \implies \underbrace{E = h\nu}_{\text{par période}} \implies \underbrace{F_G = \hbar c/\rho_0^2}_{\text{cohésion}}.$$

Statut. Les propositions des sections 3 à 7 sont de la physique standard, réorganisée autour du modèle. Elles ne *dérivent* pas la valeur de h , qui reste expérimentale : elles montrent où une constante d'action apparaît nécessairement. La section 8 propose une lecture dans la théorie du grain.

2 Le modèle

Le cercle q_0^0 , de centre O_0 et de rayon ρ_0 , est le codomaine du modèle de 2014 ; il est engendré à partir du demi-cercle q_1^0 . Un point M le parcourt d'un mouvement circulaire uniforme. On note $\vec{q}_r$ sa quantité de mouvement, tangente au cercle, et $\vec{F}_G$ la force centripète dirigée vers O_0 . Le point O est le point du cercle diamétralement opposé au point de contact avec le demi-cercle q_1^0 .

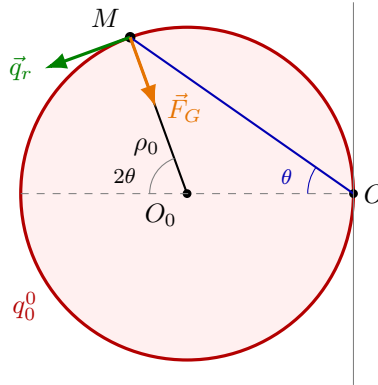


FIGURE 1 – Le modèle : M parcourt le cercle q_0^0 ; sa quantité de mouvement $\vec{q}_r$ est tangente, la force de cohésion $\vec{F}_G$ centripète. L'angle central 2θ , vu de O_0 , est le double de l'angle θ vu de O (section 8).

3 Le postulat de de Broglie

Hypothèse 1 ($E \propto 1/\lambda$, d'après l'expérience). L'énergie U d'un quantum de rayonnement est une fonction décroissante de sa longueur d'onde, et pour tout ℓ :

$$\frac{U(\rho_0 + \ell)}{U(\rho_0)} = \frac{\rho_0}{\rho_0 + \ell},$$

où $\rho_0 = \lambda/2\pi$ est la longueur d'onde réduite.

Proposition 2 (Existence d'une constante d'action). *Sous l'hypothèse 1 :*

1. $U\rho_0$ est constant ;
2. pour un quantum se déplaçant à la vitesse c , d'impulsion $p = U/c$, le produit $p\rho_0$ est constant ; on le note $\hbar$, et

$$p = \frac{\hbar}{\rho_0} = \frac{h}{\lambda}, \quad h = 2\pi\hbar;$$

3. la constante $\hbar$ a la dimension d'une action (énergie $\times$ temps).

Démonstration. Point 1 : l'hypothèse donne $U(\rho_0 + \ell)(\rho_0 + \ell) = U(\rho_0)\rho_0$ pour tout ℓ ; c'est la conclusion $d(U\rho_0) = 0$ de la note de 2014. Point 2 : $p\rho_0 = U\rho_0/c$, produit de deux constantes. Point 3 : $[p][\rho_0] = \text{kg m s}^{-1} \cdot \text{m} = \text{J s}$. $\square$

Remarque 3 (Ce qui est démontré, ce qui est postulé). La loi en $1/\rho$ est contenue dans l'hypothèse 1 : le passage à la limite la reformule, il ne la produit pas. Ce que la proposition établit est l'existence d'une constante de dimension action, invariante d'échelle puisque $U\rho_0$ ne dépend pas de ρ_0 . Sa valeur reste expérimentale.

4 Un tour du cercle : l'action h

Théorème 4 (Circulation sur un tour). *La circulation de la quantité de mouvement sur un tour du cercle q_0^0 vaut*

$$\oint_{q_0^0} q_r ds = \frac{\hbar}{\rho_0} \cdot 2\pi\rho_0 = 2\pi\hbar = h.$$

De façon équivalente, la circonférence $2\pi\rho_0$ vaut exactement une longueur d'onde λ : le cercle porte une onde stationnaire d'une période.

Démonstration. q_r est constant et tangent ; la longueur parcourue est $2\pi\rho_0$. Enfin $2\pi\rho_0 = \lambda$ par définition de ρ_0 . $\square$

C'est la condition de quantification de Bohr–Sommerfeld, $\oint p dq = nh$, pour $n = 1$. C'est elle qui fait apparaître h dans le modèle : la quantité $U_l = 2\pi\hbar^*/\rho_0$ de la note de 2014, appelée « énergie interne de rotation », est en réalité cette circulation divisée par la longueur du tour ; multipliée par $2\pi\rho_0$, elle donne une *action*, et non une énergie.

5 L'énergie par période

Proposition 5 (Relation d'Einstein). *Un tour est parcouru en une période $T = \lambda/c = 1/\nu$. L'énergie du quantum est l'action d'un tour divisée par sa durée :*

$$E = \frac{h}{T} = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = pc.$$

Démonstration. $h/T = h\nu$, et $h\nu = hc/\lambda = (h/\lambda)c = pc$ par la proposition 2. $\square$

Remarque 6 (Pas de sommation sur le train d'onde). L'énergie $h\nu$ est celle d'un quantum ; elle ne dépend pas de la longueur du train d'onde. La note de 2014 écrivait $E = nU_\xi = 2\pi\hbar^*n/T_e$ en sommant sur n périodes : cela ne donne $h\nu$ qu'en posant tacitement $T_e = 1$ s, et la grandeur obtenue est alors un débit d'énergie, non l'énergie d'un quantum.

6 La force de cohésion

Théorème 7 (Force de cohésion intra-grain). *Pour un mouvement circulaire uniforme à la vitesse c sur le cercle de rayon ρ_0 , la force centripète est*

$$F_G = q_r \omega = \frac{\hbar}{\rho_0} \cdot \frac{c}{\rho_0} = \frac{\hbar c}{\rho_0^2} = \frac{E}{\rho_0}.$$

Elle est de la forme α/ρ^2 supposée par la note de 2014, avec $\alpha = \hbar c$.

Démonstration. En mouvement circulaire uniforme, $|d\vec{q}_r/dt| = q_r \omega$, avec $\omega = c/\rho_0$. Enfin $\hbar c/\rho_0 = pc = E$. $\square$

Remarque 8 (Vérification dimensionnelle). $[\hbar c/\rho_0^2] = \text{J s} \cdot \text{m s}^{-1}/\text{m}^2 = \text{J/m} = \text{N}$: c'est bien une force. La formule finale de 2014, $F = h/(2\pi\rho_0^2) = \hbar/\rho_0^2$, a la dimension $\text{J s}/\text{m}^2$: il y manque le facteur c , qui vient de la vitesse angulaire.

étape	note de 2014	version corrigée
origine de $\hbar$	constante d'intégration de $\int F dt$	constante $p\rho_0$ (prop. 2)
moment	$q = \hbar^*/\rho_0$	$p = \hbar/\rho_0$ (de Broglie)
un tour	« énergie » $U_\ell = \int q_r d\theta$	action $\oint q_r ds = h$ (th. 4)
énergie	$E = nU_\xi$, somme sur n périodes	$E = h/T = h\nu$ (prop. 5)
force	$F = h/(2\pi\rho_0^2)$	$F_G = \hbar c/\rho_0^2$ (th. 7)
facteurs 2π	$\hbar^* = h^*/2\pi$, $h = 2\pi\hbar^*$	$h = 2\pi\hbar$, une seule convention

TABLE 1 – Les corrections, étape par étape.

7 Ordres de grandeur et deux ponts

Un photon visible. Pour $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\rho_0 \approx 79,6 \text{ nm}$, $\hbar c \approx 3,16 \cdot 10^{-26} \text{ J m}$, et $F_G \approx 5,0 \cdot 10^{-12} \text{ N}$.

Proposition 9 (Le pont électromagnétique). *La force de Coulomb entre deux charges élémentaires à la distance ρ s'écrit*

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\rho^2} = \alpha_{\text{fs}} \frac{\hbar c}{\rho^2} = \alpha_{\text{fs}} F_G(\rho), \quad \alpha_{\text{fs}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

La force de cohésion est la force « naturelle » à l'échelle ρ ; la force électrique en est la fraction α_{fs} .

Démonstration. Définition de la constante de structure fine. $\square$

Proposition 10 (Le pont gravitationnel). *À la longueur de Planck $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3}$,*

$$F_G(\ell_P) = \frac{\hbar c}{\ell_P^2} = \frac{c^4}{G} \approx 1,21 \cdot 10^{44} \text{ N},$$

la force de Planck, qui figure dans les équations d'Einstein par le coefficient $8\pi G/c^4$.

Démonstration. $\hbar c/\ell_P^2 = \hbar c \cdot c^3/(\hbar G) = c^4/G$. $\square$

Remarque 11 (Statut). Si le grain physique est d'échelle planckienne, la cohésion intra-grain rejoint la constante de couplage de la gravitation, et donc la rétroaction de la matière sur l'espace de la note cosmologique [5]. C'est une piste, non un résultat : rien ici ne fixe l'échelle du grain.

8 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle n'est pas démontrée par les sections précédentes.

8.1 Le doublement d'angle

Proposition 12 (Angle inscrit). *Pour M sur le cercle q_0^0 , l'angle sous lequel on voit l'arc depuis le point O du cercle est la moitié de l'angle au centre O_0 (figure 1). Quand M fait un tour complet autour de O_0 , la direction OM ne balaie qu'un demi-tour.*

Démonstration. Le triangle O_0OM est isocèle en O_0 ($O_0O = O_0M = \rho_0$) ; l'angle extérieur en O_0 est la somme des deux angles égaux en O et en M , d'où le facteur 2. C'est le théorème de l'angle inscrit. $\square$

La remarque de 2014, « la rotation de q_0^0 vue sous cet angle est le double de celle vue sous l'angle de q_0^1 », est ce théorème. La correspondance $\theta \mapsto 2\theta$ est celle du revêtement double qui relie les rotations d'un spin $\frac{1}{2}$ aux rotations de l'espace : un tour de l'un correspond à un demi-tour de l'autre. Elle rejoint la racine carrée du demi-tour de *Plan complexe et grain nul* [4]. C'est une analogie de structure ; le modèle ne contient pas de spin.

8.2 Le cercle élémentaire et la circulation h

Dans le *Niveau d'observation* [2], le cercle élémentaire est formé de 2^{n_∞} points de résolution. Dans *Du monde du grain au monde expérimental* [3], l'hypothèse d'échelle d'action pose

$$\hbar = J A, \quad J = 2^{-n_\infty},$$

où A est une unité d'action macroscopique : $\hbar$ est un point de résolution d'action au niveau fin.

Proposition 13 (La circulation du cercle élémentaire). *Identifions le cercle q_0^0 au cercle élémentaire. Sous l'hypothèse $\hbar = JA$:*

1. *la circulation sur un tour vaut $h = 2\pi JA$: 2π points de résolution d'action au niveau fin, et une quantité ponctuelle ($h/A = 2\pi J \simeq 0$) au niveau macroscopique ;*
2. *répartie uniformément sur les 2^{n_∞} points du cercle, la part de chaque point est $h/2^{n_\infty} = 2\pi J^2 A$, inférieure au point de résolution JA du niveau fin.*

Démonstration. $h = 2\pi\hbar = 2\pi JA$; et $2\pi J^2 A/(JA) = 2\pi J \simeq 0$. $\square$

Remarque 14 (Une circulation globale). Le point 2 dit que l'action d'un tour n'est pas localisable sur les grains du cercle : au niveau fin, aucun grain n'en porte une part visible. Seul le *tour entier* porte la circulation h . Cela s'accorde avec le caractère global de la condition de Bohr–Sommerfeld, qui porte sur l'orbite et non sur un point, et avec la lecture de h comme *circulation sur le cercle élémentaire* plutôt que comme constante d'intégration.

8.3 Du grain grossier au grain fin : F_G est une force virtuelle

Revenons à la construction de 2014 : le cercle q_0^0 est engendré à partir du demi-cercle q_1^0 , centré en Q_1 , point du cercle q_0^0 diamétralement opposé à O . Nous lisons le demi-cercle q_1^0 au niveau du *grain grossier* et le cercle q_0^0 au niveau du *grain fin* (figure 2).

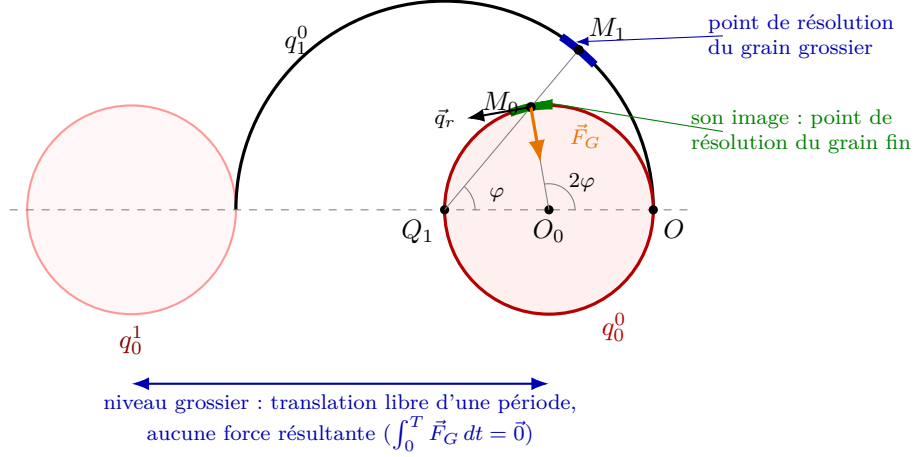


FIGURE 2 – Du grain grossier au grain fin. La direction φ issue de Q_1 porte un point du demi-cercle grossier q_1^0 et un point du cercle fin q_0^0 , à l'angle central 2φ : un demi-tour grossier donne un tour fin. La force centripète $\vec{F}_G$ n'apparaît qu'au niveau fin ; sur une période, son travail et son impulsion sont nuls, et le niveau grossier ne voit qu'une translation libre : F_G est une force virtuelle. Rapports symboliques.

Proposition 15 (Du demi-cercle grossier au cercle fin). *Pour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la demi-droite issue de Q_1 dans la direction φ , qui porte le point M_1 du demi-cercle q_1^0 , recoupe le cercle q_0^0 en un point M_0 tel que*

$$Q_1 M_0 = 2\rho_0 \cos \varphi, \quad (\widehat{O_0 O, O_0 M_0}) = 2\varphi.$$

Quand la direction balaie le demi-tour $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ du niveau grossier, le point M_0 fait un tour complet du cercle fin.

Démonstration. Prenons O_0 pour origine et $Q_1 = (-\rho_0, 0)$. Le point $Q_1 + 2\rho_0 \cos \varphi (\cos \varphi, \sin \varphi) = (\rho_0 \cos 2\varphi, \rho_0 \sin 2\varphi)$ est sur le cercle de centre O_0 et de rayon ρ_0 , à l'angle 2φ de la direction $O_0 O$. La longueur $Q_1 M_0 = 2\rho_0 \cos \varphi$ est l'équation polaire du cercle passant par le pôle ; c'est l'intensité « $\rho \cos \theta$ » de la note de 2014. $\square$

Chaque point de résolution du niveau grossier, un élément d'arc de q_1^0 , a ainsi pour image un point de résolution du niveau fin, un élément d'arc de q_0^0 : la dynamique du grain grossier se lit, au niveau fin, comme une rotation.

Proposition 16 (F_G est une force virtuelle). *Sur une période T du mouvement circulaire :*

1. le travail de F_G est nul : $\oint \vec{F}_G \cdot d\vec{s} = 0$;
2. son impulsion est nulle : $\int_0^T \vec{F}_G dt = \vec{q}_r(T) - \vec{q}_r(0) = \vec{0}$;
3. au niveau grossier, où un point de résolution contient un tour entier, F_G n'a donc aucun effet observable : le mouvement y est une translation libre d'une période à la suivante.

Démonstration. Point 1 : $\vec{F}_G$ est centripète, donc orthogonale à la vitesse. Point 2 : principe fondamental de la dynamique, et $\vec{q}_r$ reprend sa valeur après un tour. Point 3 : conséquence des deux premiers points. $\square$

Remarque 17 (Au sens de la mécanique). F_G n'existe que dans la lecture fine, attachée au cercle q_0^0 ; elle disparaît dans la lecture grossière. C'est le comportement d'une force d'inertie, qui dépend du repère de description. La note de 2014 le présentait : « cette force ne s'exercerait pas dans le même repère que celui qui a amené son expression ». C'est aussi l'analogie dynamique de la remarque précédente : comme la circulation h , la cohésion n'est visible qu'à l'échelle du tour, et sa résultante sur un tour est nulle.

9 Synthèse

Ce qui est établi.

- La loi $E \propto 1/\lambda$ implique l'existence d'une constante d'action invariante d'échelle, et $p = \hbar/\rho_0$ (proposition 2).
- La circulation du moment sur un tour vaut h : c'est l'origine de h dans le modèle (théorème 4).
- L'énergie d'un quantum est $E = h\nu$, par période et sans sommation (proposition 5).
- La force de cohésion est $F_G = \hbar c/\rho_0^2$ (théorème 7); elle vaut $1/\alpha_{\text{fs}}$ fois la force de Coulomb, et c^4/G à la longueur de Planck.

Ce qui est proposé.

- Le doublement d'angle du modèle comme analogue du revêtement double du spin $\frac{1}{2}$.
- Le passage du demi-cercle grossier au cercle fin, où un demi-tour grossier donne un tour fin, et F_G comme force virtuelle : travail et impulsion nuls sur une période, invisible au niveau grossier (propositions 15 et 16).
- h comme circulation globale sur le cercle élémentaire, non localisable sur ses grains.
- L'échelle planckienne du grain physique, qui relierait la cohésion intra-grain à la gravitation.

Questions ouvertes.

1. Fixer l'échelle physique du grain : qu'est-ce qui, dans la théorie, choisirait ρ_0 ?
2. Le modèle traite un quantum de lumière ($v = c$). Que devient-il pour une particule massive, où $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$?
3. Relier la constante de structure fine, rapport de deux forces à la même échelle, à une propriété du grain.

Références

- [1] H. Genvrin, *h comme constante d'intégration*, manuscrit, 2014.
- [2] H. Genvrin, *Niveau d'observation*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Du monde du grain au monde expérimental*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Un cosmos en rotation ?*, manuscrit, 2026.