

L'énergie informationnelle

Cinétique, potentielle, et cadre hamiltonien pour les systèmes conservatifs

Hugues Genvrin — Programme du grain

September 14, 2026

Résumé

On transpose le cadre mécanique énergie cinétique au registre informationnel. La position devient l'information $\mathcal{I}$, la quantité de mouvement devient le *sens* q , la force devient la *force sémantique* $F_s = \dot{q}$. En posant — par transposition explicite de la mécanique — une énergie cinétique informationnelle $T_i = \frac{1}{2}q^2$ et en supposant le système conservatif, on dérive une énergie potentielle informationnelle $V_i = -\int F_s d\mathcal{I}$ telle que $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$. Cette relation — celle de Lagrange — *justifie le cadre hamiltonien pour les systèmes informationnels conservatifs*. On délimite strictement le domaine de validité : la conservativité exclut les systèmes dissipatifs (effacement, Landauer). Vérification numérique sur un oscillateur sémantique.

1 Le dictionnaire mécanique $\rightarrow$ information

Définition 1 (Grandeurs informationnelles). On rééchelonne une expérience de mécanique classique dans le registre informationnel :

Mécanique	Information	Notation
position x	information symbolique	$\mathcal{I}$
quantité de mouvement p	<i>sens</i> (quantité dynamique d'information)	q
force F	<i>force sémantique</i>	$F_s = \dot{q}$
$p = m\dot{x}$	le sens est le taux de variation de l'information	$q = \dot{\mathcal{I}} = d\mathcal{I}/dt$

Remarque 2 (Cohérence avec la RFDG). Ce dictionnaire prolonge la dynamique du programme : le *sens* $q = \dot{\mathcal{I}}$ est la variation d'information (RFDG, chapitre *Dynamique*), et la force sémantique $F_s = \dot{q} = \ddot{\mathcal{I}}$ est la « force » de la tour de dérivées. On reste dans le même cadre, ici lu énergétiquement.

2 L'énergie cinétique informationnelle : une transposition assumée

Définition 3 (Énergie cinétique informationnelle). Par *transposition explicite* de l'énergie cinétique mécanique $T = \frac{1}{2}mv^2$, on pose

$$T_i = \frac{1}{2}q^2,$$

énergie cinétique informationnelle, quadratique en le sens q .

Statut de cette forme. Le choix $T_i = \frac{1}{2}q^2$ n'est pas dérivé d'un principe informationnel : c'est un *copier-coller* de l'énergie cinétique mécanique, formulé dans le registre du sens. On l'assume comme *analogie structurante*, non comme théorème. C'est elle qui rend le formalisme hamiltonien applicable ; une autre forme de T_i changerait la relation force-potentiel. Le calcul qui suit est exact *sous cette hypothèse*.

3 L'énergie potentielle informationnelle : dérivation

Théorème 4 (Potentiel sémantique d'un système conservatif). *Pour un système informationnel conservatif (énergie totale $E_i = T_i + V_i$ constante) à énergie cinétique $T_i = \frac{1}{2}q^2$, il existe une énergie potentielle informationnelle*

$$V_i = - \int F_s d\mathcal{I}, \quad F_s = - \frac{dV_i}{d\mathcal{I}}.$$

Proof. De $T_i = \frac{1}{2}q^2$: $dT_i = q dq$. La conservation $E_i = T_i + V_i = \text{cste}$ donne $dV_i = -dT_i = -q dq$. Or $q = \frac{d\mathcal{I}}{dt}$, donc

$$dV_i = -q dq = -\frac{d\mathcal{I}}{dt} dq = -dq \cdot \frac{d\mathcal{I}}{dt} = -\dot{q} d\mathcal{I} = -F_s d\mathcal{I}.$$

En intégrant, $V_i = - \int F_s d\mathcal{I}$, d'où $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$. □

Corollaire 5 (Justification du cadre hamiltonien). *La relation $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$ est exactement celle que Lagrange postule pour former le lagrangien $\mathcal{L}_i = T_i - V_i$. Un système informationnel conservatif à $T_i = \frac{1}{2}q^2$ admet donc un lagrangien informationnel, des équations d'Euler-Lagrange, et — par transformée de Legendre — un hamiltonien informationnel $\mathcal{H}_i = T_i + V_i = E_i$. Le cadre de Hamilton s'applique.*

Corollaire 6 (Justification de l'énergie potentielle mécanique). *Á fortiori, on peut appliquer le théorème précédent dans le cadre de la mécanique classique.*

$$dV + dT = 0 \Leftrightarrow dV = -dT \Leftrightarrow dV = -\frac{1}{m} \cdot q dq = -\frac{dx}{dt} \cdot dq = -dx \cdot \frac{dq}{dt} = -dx \cdot F \Leftrightarrow \frac{dV}{dx} = -F \Leftrightarrow F = -\frac{dV}{dx}$$

Remarque 7 (Le potentiel sémantique). V_i est le *potentiel sémantique* : l'énergie qu'un état informationnel « recèle » du fait de sa position $\mathcal{I}$ dans le paysage des significations. La force sémantique F_s pousse vers les basses valeurs de V_i — l'information « tombe » vers le sens de moindre potentiel, comme une masse vers le bas.

4 La frontière : conservativité, et le contre-exemple dissipatif

« **Tout système informationnel** » — **non : seulement les conservatifs**. Le théorème 4 suppose la conservativité, et cette hypothèse est *essentielle* : $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$ n'existe que si F_s ne dépend que de $\mathcal{I}$ (l'état), non de q (la vitesse) ni du temps. Dire « tout système informationnel possède un potentiel sémantique » serait un abus — cela supposerait ce que l'hypothèse restreint.

Remarque 8 (Le contre-exemple est dans le programme : Landauer). Un système informationnel *dissipatif* — qui *efface* de l'information — a une force sémantique dépendant du *taux* de variation, $F_s = -k\mathcal{I} - cq$ (un terme de « frottement sémantique » $-cq$). Alors aucun potentiel $V_i(\mathcal{I})$ n'existe, et le hamiltonien standard est inapplicable. C'est exactement l'asymétrie composition/décomposition (chapitre *Matière*) : l'effacement dissipe (Landauer, $k_B T \ln 2$ par bit), il n'est pas conservatif. Les systèmes informationnels *réversibles* (structuration) sont conservatifs et hamiltoniens ; les *irréversibles* (effacement) ne le sont pas.

5 Vérification numérique : l'oscillateur sémantique

Oscillateur sémantique : force de rappel conservative $F_s = -k\mathcal{I}$ (dépend de $\mathcal{I}$ seul), donc $V_i = \frac{1}{2}k\mathcal{I}^2$. Solution $\mathcal{I}(t) = A \cos(\sqrt{k}t)$.

Quantité	Résultat
Conservation $E_i = T_i + V_i$	constante ($\Delta E_i/E_i \sim 10^{-4}$)
Relation $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$	vérifiée ($\max F_s + dV_i/d\mathcal{I} \sim 10^{-9}$)
F_s dépend de q ?	non $\Rightarrow$ conservatif, potentiel existe
<i>Cas dissipatif</i> $F_s = -k\mathcal{I} - cq$	E_i chute de 0,50 à 0,001 $\Rightarrow$ pas de potentiel, hamiltonien inapplicable

```
import numpy as np
k = 1.0
t = np.linspace(0, 20, 20001)
I = np.cos(np.sqrt(k)*t) # information (position)
q = np.gradient(I, t) # sens (quantite de mouvement)
Fs = -k*I # force semantique : conservative (depend de I)

Ti = 0.5*q**2 # energie cinetique informationnelle
Vi = 0.5*k*I**2 # energie potentielle = -int Fs dI
E = Ti + Vi
print("conservation E : var rel =", (E.max()-E.min())/E.mean()) # ~1e-4
print("Fs = -dVi/dI ? err =", np.max(np.abs(Fs + np.gradient(Vi,I))[100:-100])) # ~1e-9

# dissipatif : Fs = -k I - c q (frottement semantique, type Landauer)
from scipy.integrate import odeint
c = 0.3
sol = odeint(lambda s,t: [s[1], -k*s[0]-c*s[1]], [1.0,0.0], t)
Ed = 0.5*sol[:,1]**2 + 0.5*k*sol[:,0]**2
print("dissipatif : E(0)=%.3f -> E(fin)=%.3f (dissipe)" % (Ed[0], Ed[-1]))
```

6 Portée et limites

Remarque 9 (Acquis). Sous transposition de l'énergie cinétique ($T_i = \frac{1}{2}q^2$) et hypothèse de conservativité, un système informationnel admet un potentiel sémantique $V_i = -\int F_s d\mathcal{I}$ avec $F_s = -dV_i/d\mathcal{I}$ (théorème 4), donc un lagrangien et un hamiltonien informationnels (corollaire 5). Vérifié sur l'oscillateur sémantique (conservation à 10^{-4} , relation force-potentiel à 10^{-9}).

Limites. (i) $T_i = \frac{1}{2}q^2$ est une transposition assumée de la mécanique, non un résultat informationnel — une autre forme changerait tout. (ii) La conservativité est requise : les systèmes dissipatifs (effacement, Landauer) n'ont pas de potentiel sémantique et échappent au hamiltonien standard. (iii) Le cadre est *formel* : il transporte la structure hamiltonienne au registre informationnel, il ne prédit pas de nouvelle physique — le potentiel V_i est *lu* sur la force sémantique, non dérivé d'un premier principe.