Définir l'infini par l'indexation du continu

Implications, nombres premiers et épaisseur des grains

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On propose de définir un ensemble infini, non par un axiome d'existence, mais par une propriété : un ensemble est infini si l'ensemble de ses parties permet d'indexer tous les points d'un continu. On démontre que cette définition caractérise exactement les ensembles infinis, et l'on en interprète le contenu : $\aleph_0$ positions engendrent $2^{\aleph_0}$ descriptions, et les indices s'identifient aux entiers 2-adiques, complétés des entiers naturels. On en tire trois implications : la définition emprunte l'existence de l'infini au continu ; elle ne distingue pas les nombres premiers des entiers, car l'indexation est aveugle à la densité ; la non-idempotence apparaît à l'étage des parties itérées. On montre enfin que la distinction recherchée entre les premiers et les entiers relève de la taille fine, et qu'elle prend une forme naturelle dans la théorie du grain : l'épaisseur moyenne d'un grain premier jusqu'à N est équivalente à $\ln N$, ce qui est une reformulation du théorème des nombres premiers. À la résolution $-n_\infty$, elle vaut $n_\infty \ln 2$.

1 La définition

1.1 Énoncé

Définition 1. Un ensemble E est dit *infini* si l'ensemble de ses parties $\mathcal{P}(E)$ permet d'indexer tous les points du segment $[0,1]$, c'est-à-dire s'il existe une surjection $\mathcal{P}(E) \to [0,1]$.

L'idée directrice est d'ancrer la notion d'infini dans un objet représentable, le segment, plutôt que dans un postulat d'existence. Un premier essai, « les éléments de E indexent les points du continu », échoue pour $E = \mathbb{N}$: il n'existe aucune surjection de $\mathbb{N}$ sur $[0,1]$, d'après le théorème de Cantor. Ce sont les *parties* de E, et non ses éléments, qui fournissent les indices.

1.2 La définition caractérise l'infini

Théorème 2. *Pour tout ensemble E, les propriétés suivantes sont équivalentes (on suppose l'axiome du choix dénombrable) :*

1. *E est infini au sens usuel (il n'est en bijection avec aucun $\{1,\dots,n\}$) ;*
2. *il existe une surjection $\mathcal{P}(E) \to [0,1]$;*
3. *$\mathcal{P}(E)$ n'est pas dénombrable.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2). Si E est infini, l'axiome du choix dénombrable fournit une suite injective $(e_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de E. On pose, pour $A \subset E$,

$$f(A) = \sum_{n\,:\,e_n \in A} 2^{-n} \in [0,1].$$

Tout $x \in [0,1]$ s'écrit en base deux $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\ldots$; la partie $A = \{e_n : \varepsilon_n = 1\}$ vérifie $f(A) = x$. Donc f est surjective.

(2) $\Rightarrow$ (3). Si $\mathcal{P}(E)$ était dénombrable, son image par une surjection le serait aussi ; or $[0,1]$ n'est pas dénombrable (Cantor).

(3) $\Rightarrow$ (1). Si E a n éléments, $\mathcal{P}(E)$ en a 2^n, et il est fini, donc dénombrable. □

Remarque. La surjection f n'est pas injective : un rationnel dyadique a deux écritures binaires, par exemple $0,1000\ldots = 0,0111\ldots$ Cela ne gêne pas l'indexation, qui demande seulement que chaque point reçoive au moins un indice.

1.3 Positions et descriptions

La définition fait intervenir deux cardinaux distincts. Les *positions* sont les éléments de E : pour $E = \mathbb{N}$, il y en a $\aleph_0$, et chaque indice est une suite de $\aleph_0$ chiffres binaires. Les *descriptions* sont les parties de E : il y en a $2^{\aleph_0}$, autant que de points du continu.

	Longueur	Nombre d'indices	Ce qu'on indexe
n chiffres	n	2^n	2^n points
$\aleph_0$ chiffres, nombre fini de 1	$\aleph_0$	$\aleph_0$	les dyadiques
$\aleph_0$ chiffres quelconques	$\aleph_0$	$2^{\aleph_0}$	le continu

1.4 Les indices sont des entiers 2-adiques

Lisons à l'envers les chiffres binaires d'un réel $x = 0,\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots$:

$$\mathrm{ind}(x) = \sum_{i\geq 1} \varepsilon_i\, 2^{i-1} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 4\varepsilon_3 + \cdots$$

x	Écriture binaire	Indice	Nature
$1/2$	$0,1$	1	entier naturel
$1/4$	$0,01$	2	entier naturel
$3/4$	$0,11$	3	entier naturel
$1/3$	$0,010101\ldots$	$\ldots 101010 = -2/3$	entier 2-adique
1	$0,1111\ldots$	$\ldots 1111 = -1$	entier 2-adique

Proposition 3. *L'indice de x est un entier naturel si et seulement si x est un rationnel dyadique écrit avec un nombre fini de chiffres* 1*. En général, c'est un entier* 2*-adique, élément de l'anneau $\mathbb{Z}_2$ des séries $\sum_i \varepsilon_i 2^{i-1}$, qui est le complété de $\mathbb{N}$ pour la distance* 2*-adique.*

Les entiers naturels n'indexent donc qu'une partie dénombrable et dense du continu, les rationnels dyadiques. Pour indexer tout le continu, il faut compléter $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Z}_2$, c'est-à-dire lui adjoindre ses points limites. On retrouve le geste de compactification ou de complétion qui rend l'infini actuel opératoire.

Lien avec l'arbre de séries. Dans l'arbre binaire de séries obtenu en séparant à chaque étage les termes de rang impair et pair, une branche est une suite de choix gauche/droite, c'est-à-dire une partie de $\mathbb{N}$ (les étages où l'on va à droite), donc un point du segment. Le terme a_n est placé au point obtenu en renversant l'écriture binaire de $n-1$. Les branches qui portent un terme sont celles dont l'indice 2-adique est un entier naturel ; les branches vides, qui vont à droite une infinité de fois, ont un indice 2-adique non naturel. L'arbre est une représentation de $\mathbb{Z}_2$, où $\mathbb{N}$ occupe les feuilles non vides.

2 Première implication : l'existence est empruntée au continu

La définition 1 dit ce que *signifie* « être infini », comme la définition de Dedekind (un ensemble est infini s'il est en bijection avec une de ses parties propres). Mais aucune définition ne fait *exister* un ensemble infini. Pour que la définition s'applique à $\mathbb{N}$, il faut que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et le segment existent comme totalités ; or c'est le niveau le plus fort de l'infini actuel, celui de l'axiome de l'ensemble des parties.

Niveau	Ce qui le donne	Ce qu'on obtient
Entiers potentiels	ZF sans l'axiome de l'infini	chaque n existe, mais pas $\mathbb{N}$
Entiers actuels	l'axiome de l'infini	$\mathbb{N}$
Continu actuel	l'axiome de l'ensemble des parties	$\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R}$

La définition rattache ainsi l'infini des entiers à celui du continu. C'est philosophiquement éclairant, puisque le segment est représentable, et c'est une position ancienne (Aristote, Brouwer, Weyl) que de prendre le continu comme donnée première. Mais la définition ne remplace pas l'axiome : elle s'appuie sur un infini actuel plus fort encore.

3 Deuxième implication : les premiers vérifient la définition

Corollaire 4. *L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini au sens de la définition 1.*

Démonstration. Numérotons les premiers dans l'ordre, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$ Ils forment une suite injective, et la construction du théorème 2 s'applique : $f(A) = \sum_{p_n \in A} 2^{-n}$ est une surjection de $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ sur $[0, 1]$. □

Exemple 5. Le réel $1/2 = 0,1$ est indexé par $\{2\}$, le réel $3/4 = 0,11$ par $\{2, 3\}$, le réel $1/3 = 0,0101\dots$ par $\{3, 7, 13, 19, 29, \dots\}$ (les premiers de rang pair), et le réel 1 par l'ensemble de tous les premiers.

La construction n'utilise que le *rang* de chaque premier, non sa taille : l'indexation est aveugle à la densité. Toute partie infinie de $\mathbb{N}$ convient.

3.1 Indexer n'est pas engendrer

On pourrait objecter que les parties de $\mathbb{P}$ n'engendrent, par produits, que des entiers : $\prod_{p \in A} p$ est un entier sans facteur carré lorsque A est fini, et n'a pas de valeur entière lorsque A est infini. C'est exact, mais cela confond deux opérations.

Lecture de la définition	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}$
Indexer : $\mathcal{P}(E)$ étiquette tous les points du continu	oui	oui
Engendrer : $\mathcal{P}(E)$ produit le continu par des opérations finies	non	non

Ce qu'on obtient à partir d'un ensemble dénombrable par des opérations finies (sommes, produits) reste dénombrable : aucun ensemble dénombrable n'engendre le continu en ce sens. La lecture « engendrer » exclurait donc $\mathbb{N}$ lui-même, et la définition cesserait de caractériser l'infini. Aucune des deux lectures ne sépare $\mathbb{P}$ de $\mathbb{N}$.

Les nombres surnaturels. Le rôle générateur des premiers donne cependant une image frappante. Les produits $\prod_p p^{e_p}$ à *support fini* décrivent exactement $\mathbb{N}^*$ (théorème fondamental de l'arithmétique). Si l'on autorise un *support infini*, avec $e_p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on obtient les nombres surnaturels de Steinitz, qui forment un ensemble de la puissance du continu. Le même « capital » engendre les entiers par ses supports finis et un continu par ses supports infinis : on retrouve la frontière entre parties finies et parties quelconques.

4 Troisième implication : la non-idempotence

En arithmétique des cardinaux, l'addition et la multiplication sont idempotentes : $2 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Par conséquent $\mathcal{P}(E \sqcup E)$ a la même puissance que $\mathcal{P}(E)$, puisque $2^{2\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$: doubler E ne change rien. Le fait que $2n_\infty$ ou 2^{n_∞} éléments indexent aussi le continu est une *monotonie*, non une non-idempotence.

La non-idempotence apparaît à l'étage des parties itérées, par le théorème de Cantor :

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0} < 2^{2^{\aleph_0}} < \cdots$$

Avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(E))$, on peut indexer strictement plus que le continu, par exemple toutes les parties du segment. Elle apparaît aussi dans les cadres où les tailles infinies sont des nombres : pour des hyperentiers infinis, N, $2N$ et N^2 sont distincts ; dans la théorie du grain, l'axiome de stratification stricte pose $2^{kn_\infty} \neq 2^{jn_\infty}$ pour $k \neq j$.

5 La taille fine : où se trouve la différence entre premiers et entiers

5.1 La densité n'est pas conservée par les bijections

L'intuition selon laquelle les premiers sont « moins nombreux » que les entiers est juste, mais elle ne relève pas du cardinal. La densité d'une partie $A \subset \mathbb{N}$,

$$\delta(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{|A \cap [1, N]|}{N},$$

dépend de la manière dont A est placé dans $\mathbb{N}$, et non de A seul. La bijection $n \mapsto p_n$ comprime les premiers : la fenêtre $[1, N]$ des rangs correspond à la fenêtre $[1, p_N]$ des premiers, avec $p_N \sim N \ln N$. C'est le paradoxe de Galilée (1638) : les carrés sont en bijection avec les entiers, alors que leur densité est nulle.

Mesure	Ce qu'elle compare	$\mathbb{P}$ face à $\mathbb{N}$
Cardinal (Cantor)	les ensembles, par toute bijection	égaux : $\aleph_0$
Taille dans une fenêtre	les ensembles placés dans $\mathbb{N}$	$N/\ln N$ contre N

Dans le cadre hyperfini, pour un hyperentier N infini, l'ensemble des premiers inférieurs à N et l'ensemble $\{1, \ldots, N\}$ sont tous deux hyperfinis, de tailles $\pi(N) \approx N/\ln N$ et N, et il n'existe entre eux aucune bijection interne. La théorie des numérosités de Benci et Di Nasso systématise ce point de vue en conservant le principe d'Euclide, « le tout est plus grand que la partie ».

5.2 Une indexation plus économe

Dans le cadre hyperfini, la grille $\{k/N : 0 \leq k \leq N\}$ indexe le continu au sens où sa partie standard est le segment entier : tout réel de $[0, 1]$ est infiniment proche d'un point de la grille. La grille des premiers fait de même.

Proposition 6. *Pour un hyperentier N infini, tout réel de $[0, 1]$ est infiniment proche d'un point de la grille $\{p/N : p \leq N$ premier$\}$.*

Démonstration. Le théorème des nombres premiers implique $p_{n+1}/p_n \to 1$: les écarts entre premiers consécutifs sont négligeables devant les premiers eux-mêmes. Pour un réel standard $x \in]0, 1]$, l'écart entre deux premiers consécutifs au voisinage de xN est donc infinitésimal devant N ; près de 0, on utilise le premier 2, et $2/N$ est infinitésimal. □

Les premiers indexent donc le continu, mais avec une grille plus clairsemée : $N/\ln N$ points au lieu de N. La « seconde espèce » des premiers n'est pas une incapacité à indexer le continu, mais une indexation plus économe.

6 La lecture par les grains et le théorème des nombres premiers

6.1 La factorisation $L = |L| \cdot \varepsilon$

Dans la théorie du grain, un continu de longueur L observé à une résolution donnée se factorise en un triplet $(L, |L|, \varepsilon)$: longueur totale, nombre de grains, épaisseur d'un grain, avec la relation fondamentale $L = |L| \cdot \varepsilon$. Deux opérations élémentaires préservent le continu décrit :

- le *regroupement*, à longueur fixée : $(L, N_1 N_2, \varepsilon) \simeq (L, N_2, N_1\varepsilon)$;
- le *déploiement*, à cardinal fixé : $(L, N, \varepsilon) \simeq (\lambda L, N, \lambda\varepsilon)$.

Pour une partie $A \subset \mathbb{N}$, on peut attribuer à chaque élément un grain *couvrant*, l'intervalle qui le sépare de l'élément suivant. Les grains de A pavent alors la fenêtre $[1, N]$, et la relation fondamentale s'écrit

$$N \approx |A \cap [1, N]| \cdot \bar{\varepsilon}_A(N),$$

où $\bar{\varepsilon}_A(N)$ est l'épaisseur moyenne des grains de A jusqu'à N.

Remarque (Deux conventions). On peut aussi considérer que chaque élément de A est un entier, donc un grain d'épaisseur 1, et voir A comme une mosaïque lacunaire de $\mathbb{N}$. Dans cette convention, les pairs, les carrés et les premiers ont tous le même grain que les entiers. Il faut choisir une convention et s'y tenir ; seule la convention des grains couvrants distingue les ensembles.

6.2 Pairs, carrés, premiers

Les pairs. Chaque pair couvre deux unités. À fenêtre fixée, c'est un regroupement, $(L, L/2, 2)$, qui donne la densité $1/2$. Par la bijection $n \mapsto 2n$, c'est un déploiement : $(2L, L, 2)$, avec le même cardinal, une épaisseur double et une longueur double. Le paradoxe de Galilée se résout par la transposabilité entre cardinal et dilatation.

Les carrés. Le k-ième carré couvre l'intervalle de k^2 à $(k+1)^2$, d'épaisseur $2k+1$, soit environ $2\sqrt{x}$ au voisinage de x : les grains sont hétérogènes et croissent comme la dérivée de x^2. Dans $[1, N]$, il y a $\sqrt{N}$ carrés d'épaisseur moyenne $\sqrt{N}$.

Les premiers. Le n-ième premier couvre l'écart $p_{n+1} - p_n$. Ces écarts sont irréguliers : ils valent 2 pour les premiers jumeaux, et peuvent être arbitrairement grands, puisque $n! + 2, \ldots, n! + n$ sont tous composés.

Théorème 7 (Le théorème des nombres premiers comme théorème d'épaisseur)**.** *L'épaisseur moyenne des grains premiers jusqu'à N,*

$$\bar{\varepsilon}_{\mathbb{P}}(N) = \frac{N}{\pi(N)},$$

vérifie $\bar{\varepsilon}_{\mathbb{P}}(N) \sim \ln N$. Cet énoncé est équivalent au théorème des nombres premiers, $\pi(N) \sim N/\ln N$ (Hadamard, de la Vallée Poussin, 1896).

Démonstration. L'équivalence $N/\pi(N) \sim \ln N$ est une simple réécriture de $\pi(N) \sim N/\ln N$. La moyenne des écarts entre premiers consécutifs jusqu'à N, $(p_{\pi(N)} - 2)/(\pi(N) - 1)$, lui est équivalente, puisque $p_{\pi(N)} \leq N < p_{\pi(N)+1}$ et $p_{n+1}/p_n \to 1$. □

Le tableau 1 donne les valeurs numériques, calculées jusqu'à 10^7. Elles montrent que l'épaisseur moyenne suit $\ln N - 1$ de très près : c'est le terme correctif connu, $\pi(N) \approx N/(\ln N - 1)$.

N	$\pi(N)$	$N/\ln N$	$\bar{\varepsilon}_{\mathbb{P}}(N) = N/\pi(N)$	$\ln N$
10^3	168	145	5,95	6,91
10^4	1 229	1 086	8,14	9,21
10^5	9 592	8 686	10,43	11,51
10^6	78 498	72 382	12,74	13,82
10^7	664 579	620 421	15,05	16,12

Table 1: Épaisseur moyenne des grains premiers. Le plus grand écart rencontré jusqu'à 10^7 vaut 154, après le premier 4 652 353.

6.3 À la résolution $-n_\infty$

À la résolution $-n_\infty$, la fenêtre contient $N = 2^{n_\infty}$ positions. Si l'on admet que le théorème 7 se transfère à cette résolution, on obtient

$$\bar{\varepsilon}_{\mathbb{P}}\big(2^{n_\infty}\big) \approx \ln 2^{n_\infty} = n_\infty \ln 2, \qquad \pi\big(2^{n_\infty}\big) \approx \frac{2^{n_\infty}}{n_\infty \ln 2}.$$

L'épaisseur moyenne d'un grain premier est donc proportionnelle au niveau de résolution n_∞ lui-même. La « seconde espèce » des premiers reçoit ici une formulation précise : leurs grains ont une épaisseur de l'ordre de n_∞, au lieu de 1 pour les entiers.

6.4 Une hiérarchie des espèces

On peut classer les parties infinies de $\mathbb{N}$ selon la croissance de l'épaisseur moyenne de leurs grains :

Ensemble	Épaisseur moyenne	Nombre jusqu'à N	Espèce
$\mathbb{N}$	1	N	première
Pairs	2	$N/2$	première (épaisseur bornée)
Premiers	$\sim \ln N$	$\sim N/\ln N$	seconde, logarithmique
Carrés	$\sim \sqrt{N}$	$\sqrt{N}$	seconde, puissance
Puissances de 2	$\sim N/\log_2 N$	$\log_2 N$	seconde, quasi linéaire

Les ensembles d'épaisseur bornée (densité inférieure strictement positive) forment une première espèce ; ceux dont l'épaisseur tend vers l'infini (densité nulle) forment une seconde espèce, elle-même graduée par la vitesse de croissance de l'épaisseur. Parmi les exemples du tableau, les premiers sont les plus proches de la première espèce : leur épaisseur ne croît que comme un logarithme. On peut y lire, de façon heuristique, un fait bien connu. Puisque A compte environ $dx/\bar{\varepsilon}_A(x)$ éléments dans $[x, x+dx]$, on a $\sum_{a\in A} 1/a \approx \int dx/\big(x\,\bar{\varepsilon}_A(x)\big)$. Pour les premiers, $\int dx/(x\ln x) = \ln\ln x$ diverge, et l'on retrouve la divergence de $\sum 1/p$; pour les carrés, $\int dx/(2x^{3/2})$ converge, comme $\sum 1/k^2$. Les premiers sont rares, mais pas assez pour que la série de leurs inverses converge.

Conclusion

La définition proposée, « un ensemble est infini si ses parties indexent le continu », est exacte : elle caractérise les ensembles infinis, et elle a une interprétation transparente, $\aleph_0$ positions

engendrant $2^{\aleph_0}$ descriptions, qui sont les entiers 2-adiques. Elle a trois implications : elle emprunte l'existence de l'infini au continu, au lieu de la fonder ; elle ne distingue pas les nombres premiers des entiers, car l'indexation ne voit que le rang et non la densité ; la non-idempotence n'y apparaît qu'à l'étage des parties itérées.

La différence entre premiers et entiers relève de la taille fine. Dans la théorie du grain, elle prend une forme naturelle : l'épaisseur moyenne d'un grain premier jusqu'à N est équivalente à $\ln N$, ce qui est exactement le théorème des nombres premiers, et à la résolution $-n_\infty$ elle vaut $n_\infty \ln 2$. Les premiers forment un infini de seconde espèce, non parce qu'ils n'indexeraient pas le continu, mais parce que leurs grains sont plus épais : ils l'indexent avec une grille plus économe.

Références

- G. Galilée, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638.
- G. Cantor, « Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen », 1874 ; « Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre », 1891.
- J. Hadamard ; C.-J. de la Vallée Poussin, démonstrations du théorème des nombres premiers, 1896.
- E. Steinitz, « Algebraische Theorie der Körper », *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 1910 (nombres surnaturels).
- A. Robinson, *Non-standard Analysis*, 1966.
- V. Benci, M. Di Nasso, « Numerosities of labelled sets: a new way of counting », *Advances in Mathematics*, 2003 ; *How to Measure the Infinite*, World Scientific, 2019.
- H. Genvrin, *Théorie du grain*, 2026.