

Épistémologie de la notion de groupe

Origine, échelle de structures, et transport par morphisme

Hugues Geny — Programme du grain

September 9, 2026

Résumé

On propose une lecture épistémologique de la notion de groupe : elle *provient* de l'invariance sous transformations inversibles préservant une structure (Erlangen), et se *stratifie* en une échelle de structures (magma $\rightarrow$ groupe) dont chaque cran a un coût informationnel (échelle de Klein informationnelle). On établit ensuite — correctement — comment un morphisme *transporte* la structure de groupe : c'est l'*image* qui est un groupe (la cible entière seulement si le morphisme est surjectif). On en tire que les groupes de la nature sont *révélés*, non créés, par les morphismes : leur ubiquité tient aux symétries des lois (Noether), dont les groupes sont la forme.

1 Origine de la notion de groupe

À la question « d'où vient la notion de groupe ? », la réponse fidèle à l'histoire (Galois, Klein) et au présent travail est : *de l'invariance*.

Définition 1 (Origine : invariance sous transformation). La notion de groupe provient des *transformations bijectives préservant une structure*, munies de la composition. Une telle collection est close (la composée de deux préservations préserve), contient l'identité (préservation triviale) et les inverses (une bijection préservante se défait) : c'est un groupe.

Remarque 2 (La cyclicité finie n'est qu'un cas particulier). On ne restreint *pas* aux transformations cycliques finies ($\exists n, f^n = \text{id}$). Les groupes fondamentaux sont massivement *non cycliques* et *infinis* : rotations $\text{SO}(3)$, translations $(\mathbb{Z}, +)$ ou $(\mathbb{R}, +)$, groupes de Lie de la physique. Le groupe cyclique $\mathbb{Z}/n$ est le cas *minimal* (une seule transformation, itérée), non la racine. La racine est l'invariance inversible, sans finitude ni cyclicité.

Remarque 3 (Lecture par l'échelle de Klein informationnelle). Un groupe est une *constitution informationnelle* qui laisse invariant l'espace dans sa globalité : par le théorème de Klein (correspondance de Galois entre contenus et groupes), le groupe principal $\text{Sym}(A)$ est exactement l'ensemble des transformations d'équilibre sémantique ($\mathcal{N} = 0$, aucune mesure altérée). La notion de groupe est ainsi *l'invariant, lu comme structure*.

2 L'échelle des structures : définitions, non axiomes

En remontant de l'invariant vers la structure de base, on traverse une hiérarchie :

$$\text{magma} \subset \text{semigroupe} \subset \text{monoïde} \subset \text{groupe} \subset \text{groupe cyclique}.$$

Chaque cran ajoute une propriété (loi interne, associativité, neutre, inverses, puis cyclicité), et le *coût informationnel* de chaque ajout est quantifiable (document *Quantification des axiomes* : l'associativité est de loin le plus coûteux).

Axiome ou définition ? Une distinction à tenir. On appellera ici *définitions* les structures (magma, monoïde, groupe...) — ce sont des conventions de vocabulaire nommant les objets qui satisfont certaines propriétés — et *axiomes* les *propriétés* imposées (associativité, neutre, inverses). La direction de *découverte* (de l'invariant vers le magma, ou l'inverse) ne change pas ce statut : « monoïde » reste une définition, « associativité » un axiome, quel que soit le sens de parcours. La direction heuristique n'est pas la direction logique.

3 Transport de la structure par morphisme

Voici le cœur technique, énoncé *correctement* — l'image, et la surjectivité.

Lemme 4 (Transport : l'image d'un groupe est un groupe). *Soit $(G, \cdot)$ un groupe, $(H, +)$ un magma, et $f : G \rightarrow H$ un morphisme ($f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$). Alors l'image $\text{im } f = f(G)$, munie de $+$, est un groupe. Si de plus f est surjective, alors $(H, +)$ tout entier est un groupe.*

Proof. Tout se passe dans $\text{im } f$. *Associativité* : pour $f(a), f(b), f(c)$,

$$(f(a) + f(b)) + f(c) = f(a \cdot b) + f(c) = f((a \cdot b) \cdot c) = f(a \cdot (b \cdot c)) = f(a) + (f(b) + f(c)).$$

Neutre : $f(e) + f(a) = f(e \cdot a) = f(a)$ et de même à droite, donc $f(e)$ est neutre *sur* $\text{im } f$.

Inverses : $f(a) + f(a^{-1}) = f(a \cdot a^{-1}) = f(e)$, donc $f(a^{-1}) = -f(a)$ dans $\text{im } f$. Ainsi $\text{im } f$ est un groupe. Si f est surjective, $\text{im } f = H$ et $(H, +)$ est un groupe. $\square$

Pourquoi l'image, et pas H entier. Sans surjectivité, la preuve ne touche que les éléments de la forme $f(a)$: $f(e)$ est neutre *pour l'image*, pas nécessairement pour tout H . Contre-exemple : $G = \{e\}$ trivial, $H = (\mathbb{N}, +)$ (magma sans inverses), $f(e) = 0$. L'image $\{0\}$ est un groupe, mais $(\mathbb{N}, +)$ n'en est pas un (2 n'a pas d'inverse). Le morphisme ne rend pas H groupe — il exhibe un sous-groupe. C'est la version correcte du lemme.

Corollaire 5 (Cyclicité transportée). *Si G est cyclique engendré par a ($G = \{a^k\}$), alors $f(a^k) = k f(a)$: l'image est cyclique, engendrée par $f(a)$. Exemple : $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/n, +)$, $a \mapsto a \bmod n$, surjective, transporte la structure sur $\mathbb{Z}/n$ tout entier.*

4 Les groupes dans la nature : révélés, non créés

Remarque 6 (Le morphisme révèle, il ne fabrique pas). Par le lemme 4, un morphisme depuis un groupe fait apparaître une structure de groupe *dans son image*. Mais cette structure *préexiste* : elle est transportée de G , elle n'est pas créée par f . Le morphisme est un *révélateur* — il rend visible une structure qui pouvait être invisible — non un *générateur*. Dire qu'un magma « devient un groupe par morphisme » est un abus : soit son image porte la structure (transportée), soit elle ne la porte pas ; le morphisme ne l'ajoute pas *ex nihilo*.

Remarque 7 (Pourquoi tant de groupes dans la nature). L'ubiquité des groupes dans la nature ne découle pas du lemme de transport (qui suppose déjà un groupe en amont), mais d'un fait plus fondamental : *les lois physiques ont des symétries*. Invariance par translation d'espace, de temps, par rotation, par transformation de jauge — chacune est une collection de transformations inversibles préservant les lois, donc *un groupe* par définition. Le théorème de Noether relie chaque symétrie continue à une quantité conservée : c'est la source profonde. Les groupes de la nature sont les *invariants des lois*, et le morphisme ne fait que les transporter d'un registre à un autre (p.ex. vers $(\mathbb{Z}, +)$ ou un groupe de Lie), révélant la même structure sous une autre forme.

Remarque 8 (Cohérence avec le programme). Cette lecture referme le corpus sur les groupes : l'*origine* est l'invariant (Klein) ; l'*échelle* des structures a un coût informationnel (quantification des axiomes) ; le *poids* d'un groupe mesure sa rareté (Cayley informationnel) ; et le *transport* par morphisme révèle la structure sans la créer (présent document). Le fil unique : *un groupe est un invariant, et l'information mesure ce que l'invariance coûte ou préserve.*

5 Portée et limites

Remarque 9 (Acquis). L'origine du groupe est l'invariance inversible (non la cyclicité finie, cas minimal). L'échelle magma→groupe est une hiérarchie de définitions, aux axiomes quantifiables. Le lemme de transport, correctement énoncé, dit que l'*image* d'un groupe par morphisme est un groupe (la cible entière ssi surjectif). Les groupes de la nature sont révélés par les morphismes et fondés par les symétries des lois (Noether).

Limites. (i) Le lemme exige que $+$ soit une loi *donnée* sur H (magma) : le morphisme transporte les *propriétés*, pas la loi. (ii) « Origine » est ici *conceptuelle* (l'invariance comme racine logique), non une thèse historique exhaustive — Galois, Lie, Noether jalonnent une histoire plus riche. (iii) Le lien aux symétries physiques (Noether) est un renvoi à une théorie établie, non une conséquence du présent formalisme : on *décrit* pourquoi les groupes abondent, on ne le *dérive* pas du lemme de transport.