

De la métrique logarithmique à l'exponentielle complexe

Émergence géométrique de i dans le programme du grain

Hugues Genyvin

27 mai 2026

Préambule

Ce document construit l'*exponentielle complexe* à partir de l'exponentielle stratale réelle, comme conséquence forcée de la compatibilité entre la stratification du procédé du grain et la structure circulaire de C_1 . L'élément i tel que $i^2 = -1$ n'y est pas adjoint algébriquement, mais émerge *géométriquement* comme nécessité structurelle du procédé.

La construction se déroule en quatre temps :

1. Rappel de la métrique logarithmique et de sa réciproque exponentielle.
2. Identification du demi-tour géométrique sur C_1 avec l'involution $x \mapsto -x$.
3. Imposition de la compatibilité circulaire sur l'exponentielle stratale, et émergence forcée de i .
4. Définition propre de l'exponentielle complexe stratale et identification stratale précise du plan complexe.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III) et les théorèmes précédents : *Métrique stratale* et *Champ stratifié 1D*.

1 Rappel : la métrique logarithmique sur C'_1

1.1 Position du problème

À partir de la factorisation $(2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, 1/2^{n_\infty})$ de \mathcal{G}_{-2n_∞} , le cercle de référence C'_1 porte naturellement deux échelles superposées :

- Une *échelle homothétique linéaire* native, déployée sur la longueur $\mathcal{L} = 2^{n_\infty}$, avec un cardinal 2^{2n_∞} d'éléments d'épaisseur $1/2^{n_\infty}$. Cette échelle vit dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (non-standard).
- Une *échelle logarithmique* obtenue par application de la transformation $T = \log_2$, qui se déploie de $-n_\infty \ln 2$ à 0. Les distances dans cette échelle sont des éléments standards de \mathbb{R} .

1.2 Le rôle de la transformation logarithmique

La transformation T effectue deux opérations simultanées (théorème *Métrique stratale*) :

1. *Linéarisation* : la stratification multiplicative ($x \cdot y$ stratifiant en montant) devient additive ($T(xy) = T(x) + T(y)$).
2. *Réduction de magnitude* : les invariants exponentiels 2^{kn_∞} deviennent les invariants polynomiaux kn_∞ , strictement plus petits.

L'échelle logarithmique ramène $\mathcal{G}_{-2n_\infty}/\mathcal{G}_{-n_\infty}$ dans les réels standards, ce qui est l'avantage conceptuel décisif.

2 L'exponentielle stratale réelle comme réciproque

2.1 Définition

Définition 1 (Exponentielle stratale réelle). *L'exponentielle stratale réelle est l'application réciproque de la transformation logarithmique :*

$$E := T^{-1} : \tilde{\mathbb{R}} \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}_*, \quad y \mapsto 2^y.$$

2.2 Action géométrique

Proposition 1 (Action de E sur les strates). *L'exponentielle stratale E effectue le passage inverse de T : elle remonte de \mathcal{G}_{-n_∞} vers \mathcal{G}_{-2n_∞} , en transformant additivement les positions en multiplicativement les positions, et en amplifiant les invariants polynomiaux en invariants exponentiels.*

Pour y standard : $E(y) = 2^y$ est standard. Pour $y = n_\infty$ stratal : $E(n_\infty) = 2^{n_\infty}$, à la borne supérieure de $\tilde{\mathbb{N}}_1$.

2.3 Transport sur le cercle

Considérons maintenant le cercle C_1 (de circonférence 2π , hérité du programme). L'échelle logarithmique se transporte sur C_1 à un facteur multiplicatif près ($\ln 2$, pour le passage à la base e). On peut alors interroger la *réciproque géométrique* de la transformation logarithmique sur ce cercle.

Remarque 1 (L'échelle exponentielle circulaire). *La réciproque, appliquée à C_1 , distribue les éléments de $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (structure quotient, intrinsèquement circulaire) sur une échelle exponentielle circulaire qui partage le même support géométrique que C_1 . Les deux structures stratales sont superposées sur le même cercle :*

- *La mosaïque fine de \mathcal{G}_{-2n_∞} (cardinal 2^{2n_∞} , épaisseur $1/2^{n_\infty}$).*
- *Le quotient cyclique de $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (cardinal 2^{n_∞} , épaisseur $2\pi/2^{n_\infty}$ ramenée modulo la strate fine).*

Il n'y a pas de second cercle géométrique externe : il y a un seul cercle qui porte plusieurs structures stratales superposées, à des résolutions distinctes.

Le caractère circulaire du quotient est essentiel : c'est lui qui justifie que l'image de l'exponentielle stratale sur le cercle soit elle-même circulaire (et non linéaire).

Remarque 2 (Principe de superposition stratale). *Plus généralement, le programme du grain ne multiplie pas les supports géométriques : il superpose plusieurs structures stratales sur les mêmes supports. C'est déjà le cas dans le Volume I avec le segment $\tilde{\mathbb{R}}^+$, qui porte simultanément la mosaïque fine (cardinal 2^{2n_∞}) et la mosaïque grossière (cardinal 2^{n_∞}). C'est encore le cas ici : le cercle C_1 porte à la fois sa structure linéaire native, sa structure logarithmique transportée, et la structure exponentielle circulaire image du quotient stratal.*

Cette superposition de structures sur un même support est la signature géométrique du programme. Toute représentation graphique qui distingue visuellement les structures (par exemple par deux cercles emboîtés) relève d'une convention de lisibilité, non d'une différence géométrique réelle.

3 Le demi-tour géométrique et l'involution -1

3.1 La structure géométrique du cercle

Le cercle C_1 a une structure géométrique intrinsèque qui ne dépend d'aucune construction algébrique externe :

- Un point de référence : $\theta = 0$, position d'origine sur le cercle.
- Un antipode : $\theta = \pi$, point diamétralement opposé.
- Une orientation : sens trigonométrique sur le cercle, hérité du flot universel Γ du procédé.

3.2 Le demi-tour et son interprétation stratale

Proposition 2 (Demi-tour comme involution). *L'opération de demi-tour sur C_1 , envoyant $\theta = 0$ sur $\theta = \pi$, est :*

- *Involutive : appliquée deux fois, elle ramène au point initial.*
- *Inversive d'orientation : un déplacement vers la droite devient un déplacement vers la gauche.*

Si l'on identifie le point $\theta = 0$ à la position $+1$ (point de tangence canonique avec Δ , repère du programme), alors le point $\theta = \pi$ s'identifie à la position -1 , l'image de $+1$ par l'involution $x \mapsto -x$ de la symétrisation $\tilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ (Volume I, Partie III).

Remarque 3 (Identification intrinsèque). *Cette identification $\theta = \pi \leftrightarrow -1$ ne dépend pas de la formule d'Euler ni d'aucune construction d'analyse complexe. Elle est une conséquence directe de :*

1. *La structure géométrique du cercle (un antipode existe).*
2. *La symétrisation du Volume I, qui dote $\tilde{\mathbb{R}}$ d'une involution $x \mapsto -x$.*

La demi-tour géométrique est l'involution algébrique sur le diamètre principal du cercle.

4 L'émergence forcée de i

4.1 La contrainte de compatibilité circulaire

On cherche à étendre l'exponentielle stratale E en une fonction \mathcal{E} définie sur les arguments angulaires θ , qui soit compatible avec la structure géométrique du cercle. Les contraintes incontournables sont :

1. **Position d'origine** : $\mathcal{E}(0) = +1$.
2. **Antipode** : $\mathcal{E}(\pi) = -1$ (par la proposition 2).
3. **Périodicité** : $\mathcal{E}(2\pi) = +1$ (retour au point de départ après un tour complet).
4. **Propriété multiplicative** : $\mathcal{E}(\theta_1 + \theta_2) = \mathcal{E}(\theta_1) \cdot \mathcal{E}(\theta_2)$, héritée de la propriété fondamentale de l'exponentielle.

4.2 L'insuffisance de l'exponentielle réelle

Proposition 3 (Non-compatibilité réelle). *L'exponentielle stratale réelle $E(\theta) = 2^\theta$ ne satisfait pas les contraintes de compatibilité circulaire.*

Démonstration. $E(0) = 2^0 = 1$: contrainte 1 satisfaite. $E(\pi) = 2^\pi \approx 8,82 \neq -1$: contrainte 2 violée. E est strictement croissante, donc non périodique : contrainte 3 violée.

L'image de E est \mathbb{R}_*^+ (réels strictement positifs), donc -1 n'appartient jamais à son image. \square

4.3 Introduction d'un facteur structurel

Pour satisfaire les contraintes circulaires, introduisons un *facteur multiplicatif* ξ sur l'argument :

$$\mathcal{E}(\theta) := E(\xi \cdot \theta) = 2^{\xi\theta},$$

où ξ est un élément à déterminer dans une extension appropriée de $\tilde{\mathbb{R}}$.

4.4 Détermination de ξ par les contraintes

Théorème 1 (Émergence géométrique de i). *L'unique élément ξ tel que $\mathcal{E}(\theta) = 2^{\xi\theta}$ satisfasse les contraintes de compatibilité circulaire vérifie*

$$\boxed{\xi^2 = -1.}$$

Cet élément ξ n'est pas dans $\widetilde{\mathbb{R}}$: il appartient nécessairement à une extension corporelle où $\sqrt{-1}$ existe. On le note i .

Démonstration. Étape 1 : Évaluation de $\mathcal{E}(\pi)$. Par la contrainte d'antipode, $\mathcal{E}(\pi) = -1$, soit :

$$2^{\xi\pi} = -1.$$

Étape 2 : Évaluation de $\mathcal{E}(\pi/2)$. Par la propriété multiplicative,

$$\mathcal{E}(\pi) = \mathcal{E}(\pi/2 + \pi/2) = \mathcal{E}(\pi/2)^2.$$

Posons $\mathcal{E}(\pi/2) = \eta$. Alors $\eta^2 = -1$ par l'étape 1.

Étape 3 : Identification du quart de tour. Le quart de tour ($\theta = \pi/2$) sur le cercle envoie le point $+1$ sur un point géométriquement à équidistance entre $+1$ et -1 , sur l'axe perpendiculaire au diamètre principal. Cet axe n'est pas dans $\widetilde{\mathbb{R}}$ (qui ne contient que des positions sur le diamètre principal), mais dans une direction transverse, qu'on doit ajouter au plan.

L'élément $\eta = \mathcal{E}(\pi/2)$ est donc dans une extension géométrique de $\widetilde{\mathbb{R}}$ contenant un axe perpendiculaire. La propriété $\eta^2 = -1$ caractérise cette extension de manière unique : c'est l'extension par $\sqrt{-1}$, classiquement notée $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$ avec $i^2 = -1$.

Étape 4 : Identification de ξ . La cohérence entre $\mathcal{E}(\pi/2) = \eta$ et la forme générale $\mathcal{E}(\theta) = 2^{\xi\theta}$ donne :

$$2^{\xi\pi/2} = \eta \quad \text{et} \quad 2^{\xi\pi} = -1 = \eta^2.$$

Pour que la propriété multiplicative tienne et que η soit le quart de tour de $+1$, ξ doit être proportionnel à η — plus précisément, $\xi = \eta/\ln 2$ (à la conversion de base près). En notant $i := \eta$, on a :

$$\xi = \frac{i}{\ln 2}, \quad i^2 = -1.$$

□

4.5 Lecture conceptuelle

Remarque 4 (Le statut de l'émergence). *i n'est pas adjoint algébriquement à $\widetilde{\mathbb{R}}$. Il est forcé d'exister par la contrainte de cohérence entre :*

- La structure circulaire de C_1 (cercle géométrique du procédé).
- L'exponentielle stratale, qui veut être compatible avec cette circularité.
- La symétrisation $\widetilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$ qui impose $\theta = \pi \leftrightarrow -1$.

L'extension $\widetilde{\mathbb{R}}[i]$ apparaît comme le plus petit corps dans lequel l'exponentielle stratale s'étend de manière cohérente au cercle entier. i y est forcé géométriquement, pas posé algébriquement.

5 L'exponentielle complexe stratale et le plan complexe stratal

5.1 Définition de l'exponentielle complexe stratale

Définition 2 (Exponentielle complexe stratale). *Pour $\theta \in \widetilde{\mathbb{R}}$, l'exponentielle complexe stratale est*

$$\mathcal{E}(\theta) := 2^{i\theta/\ln 2} = e^{i\theta}.$$

La seconde égalité utilise $2^{1/\ln 2} = e$, conversion de base standard.

Remarque 5 (Coïncidence avec l'exponentielle complexe classique). *L'expression $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ est strictement identique à l'exponentielle complexe classique. La différence est de statut : ici, elle est dérivée comme unique extension stratale de E compatible avec C_1 , alors que classiquement elle est posée ou démontrée à partir d'une série de Taylor sur \mathbb{C} .*

5.2 Propriétés

Proposition 4 (Propriétés de \mathcal{E}). *\mathcal{E} vérifie les propriétés caractéristiques de l'exponentielle complexe :*

1. $\mathcal{E}(0) = 1$.
2. $\mathcal{E}(\pi) = -1$ (formule d'Euler comme conséquence).
3. $\mathcal{E}(2\pi) = 1$ (périodicité).
4. $\mathcal{E}(\theta_1 + \theta_2) = \mathcal{E}(\theta_1) \cdot \mathcal{E}(\theta_2)$ (multiplicativité).
5. $|\mathcal{E}(\theta)| = 1$ pour tout θ réel : \mathcal{E} prend ses valeurs sur le cercle unité.
6. $\mathcal{E}(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$ (forme canonique, par développement en série dans $\tilde{\mathbb{R}}[i]$).

Remarque 6 (La formule d'Euler comme conséquence). *La formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$, classiquement présentée comme une identité remarquable de l'analyse complexe, est ici un conséquence directe de la construction : elle exprime simplement que le demi-tour sur C_1 est l'involution -1 , propriété géométrique élémentaire du cercle.*

6 Le plan complexe stratal : identification précise des trois objets

6.1 Définition

Définition 3 (Plan complexe stratal). *Le plan complexe stratal est*

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}} := \tilde{\mathbb{R}} \oplus i\tilde{\mathbb{R}} = \{x + iy : x, y \in \tilde{\mathbb{R}}\},$$

avec sa structure de corps héritée de $\tilde{\mathbb{R}}[i]$.

6.2 Distinction des trois objets géométriques

Théorème 2 (Correspondances stratales dans $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}$). *Le plan complexe stratal abrite trois objets géométriques distincts, qui correspondent à trois éléments distincts de la stratification du programme :*

1. **Axe réel** $\tilde{\mathbb{R}}$: *déploiement linéaire fin, en correspondance avec $\mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$ (strate fine, mosaïque d'épaisseur $1/2^{n_{\infty}}$).*
2. **Axe imaginaire** $i\tilde{\mathbb{R}}$: *déploiement linéaire grossier (droite perpendiculaire au déploiement réel), en correspondance avec $\mathcal{G}_{-n_{\infty}}$ (strate grossière, mosaïque d'épaisseur 2π).*
3. **Cercle unité complexe** $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\theta} : \theta \in [0, 2\pi[\}$: *structure circulaire, en correspondance avec le quotient $\mathcal{G}_{-n_{\infty}}/\mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$ (structure quotient, intrinsèquement cyclique).*

Démonstration. (1) L'axe réel $\tilde{\mathbb{R}}$ est le déploiement par défaut du programme (Volume I, Partie III) : il porte la mosaïque fine de $2^{2n_{\infty}}$ éléments d'épaisseur $1/2^{n_{\infty}}$. C'est par définition $\mathcal{G}_{-2n_{\infty}}$.

(2) L'axe imaginaire $i\tilde{\mathbb{R}}$ est obtenu par rotation de 90° de l'axe réel. C'est encore une droite stratifiée, mais *perpendiculaire* au déploiement principal. Son rôle structurel est de représenter une seconde direction du déploiement linéaire — à la résolution *grossière*, héritée du Volume I (déploiement à résolution $-n_{\infty}$ avec mosaïque grossière). C'est donc $\mathcal{G}_{-n_{\infty}}$.

(3) Le cercle unité \mathbb{S}^1 est l'image de $\tilde{\mathbb{R}}$ par l'exponentielle complexe $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$: il s'agit d'une structure circulaire, paramétrée par les angles $\theta \in [0, 2\pi[$.

Le quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ est, par construction, la structure des positions à résolution grossière *modulo* les positions fines. Cette opération de quotient, en identifiant les positions distantes d'un multiple de l'épaisseur fine, produit une structure naturellement cyclique : c'est exactement la structure du cercle.

L'identification $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ est donc cohérente avec leur nature commune de structure cyclique quotient. \square

6.3 Lecture conceptuelle

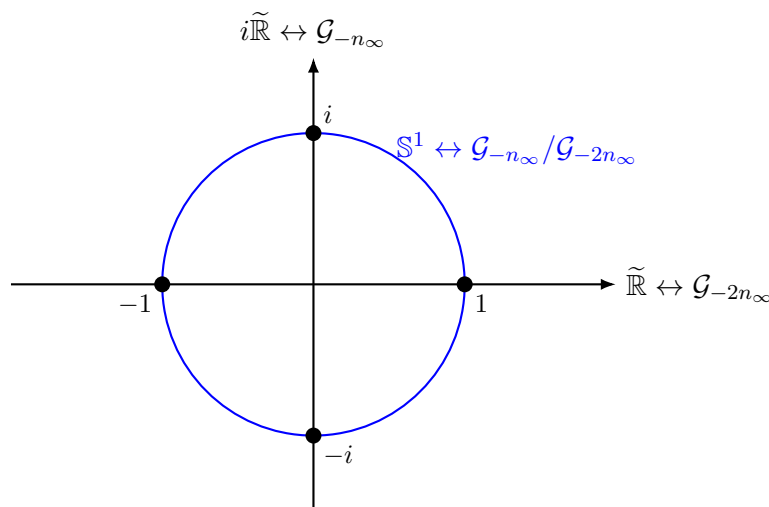
Remarque 7 (Trois objets, trois rôles). *La distinction est importante :*

- L'axe imaginaire entier $i\tilde{\mathbb{R}}$ est une droite stratale au même titre que l'axe réel, simplement à une résolution différente (grossière au lieu de fine). Il accueille des positions linéaires perpendiculaires.
- Le cercle unité \mathbb{S}^1 , sous-ensemble du plan, accueille les positions circulaires, c'est-à-dire les phases. C'est sur ce cercle que vit l'image de l'exponentielle complexe stratale.

Le quotient stratal $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ correspond précisément au cercle unité parce que c'est dans la structure quotient que les positions deviennent cycliques (équivalence modulo la strate fine). C'est l'« échelle exponentielle circulaire » évoquée précédemment.

Conformément au principe de superposition stratale (Remarque 2), le cercle unité \mathbb{S}^1 du plan complexe n'est pas un cercle géométriquement distinct du cercle C_1 du procédé : il s'agit du même support géométrique, portant la structure quotient stratale. La représentation schématique ci-dessous distingue visuellement les trois objets pour la lisibilité, mais l'axe réel et le cercle unité partagent le même support physique, à des structures stratales superposées.

6.4 Représentation schématique



7 Interprétation : un parallèle avec la mécanique quantique

Remarque 8 (Parallèle exploratoire). *La construction admet un parallèle suggestif avec la mécanique quantique :*

- L'expérimentateur prépare une expérience dans le grain \mathcal{G}_{-2n_∞} (déploiement fin, axe réel).
- La mesure produit une réalité dans le grain \mathcal{G}_{-n_∞} (déploiement grossier, axe imaginaire) projetée sur le cercle unité (la phase observée).

Ce parallèle évoque la projection de la mesure quantique : passage d'une superposition (espace fin) à une réalité observée (espace grossier), avec irréversibilité de l'opération. La nature complexe de la fonction d'onde quantique trouverait alors son origine dans la nécessité géométrique d'introduire i pour relier les deux niveaux stratales.

Ce parallèle est développé en détail dans le document *Mécanique quantique et programme du grain*.

8 Synthèse

- L'exponentielle stratale réelle $E = T^{-1}$ est l'inverse de la transformation logarithmique. Elle remonte de \mathcal{G}_{-n_∞} vers \mathcal{G}_{-2n_∞} en amplifiant les invariants polynomiaux en exponentiels.
- La structure circulaire de C_1 et la symétrisation $\tilde{\mathbb{R}}^+ \rightarrow \tilde{\mathbb{R}}$ imposent que le demi-tour géométrique $\theta = \pi$ corresponde à l'involution -1 .
- Étendre E en une exponentielle compatible avec la circularité force l'apparition d'un élément i tel que $i^2 = -1$. *Cet élément n'est pas adjoint algébriquement : il émerge géométriquement* comme nécessité structurelle.
- L'exponentielle complexe stratale $\mathcal{E}(\theta) = e^{i\theta}$ est l'unique extension cohérente, et coïncide formellement avec l'exponentielle complexe classique. La formule d'Euler $e^{i\pi} = -1$ devient une conséquence immédiate.
- Le plan complexe stratal $\mathcal{P}_\mathbb{C}$ abrite trois objets géométriques distincts :
 - L'axe réel $\tilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (déploiement fin).
 - L'axe imaginaire $i\tilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$ (déploiement grossier).
 - Le cercle unité $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (quotient circulaire).
- La dualité \ln / \exp structure l'ensemble : descente vers les strates par \ln , montée par \exp .

Conclusion

L'apport principal de ce travail est de présenter i et l'exponentielle complexe non comme des constructions algébriques imposées de l'extérieur, mais comme des objets *géométriquement forcés* par la compatibilité entre la stratification du procédé du grain et la structure circulaire de C_1 .

Cette émergence offre une lecture nouvelle du plan complexe : il n'est plus un objet algébrique abstrait mais la *réalisation naturelle de la dualité stratale*, où l'axe réel et l'axe imaginaire correspondent à deux niveaux de résolution distincts du procédé (fin et grossier respectivement), et le cercle unité correspond au quotient cyclique entre les deux.

Les implications physiques de cette construction sont explorées dans le document *Mécanique quantique et programme du grain*.