

Méta-jauges

Une extension du programme d'Erlangen aux transformations physiques

Hugues Genvrin

2026

Résumé

Nous articulons deux acceptions du mot *jauge*. La première, développée dans *Les jauges*, fait d'une jauge un couple ordre/équivalence : une manière élémentaire d'identifier et de hiérarchiser. La seconde, issue de Weyl et de la physique contemporaine, appelle jauge une *invariance sous un groupe de transformations*. Nous montrons que la seconde est la *méta-jauge* de la première : le groupe des transformations qui laissent une jauge invariante. Le pont est la connexion de Galois (Sym, Inv) du théorème de Klein, dont les points fixes sont les géométries au sens d'Erlangen. Nous établissons que la relation de finesse entre jauges est l'*antitonicité* de cette connexion, quantifiée par le comptage d'orbites de Burnside. La seconde partie déroule des applications physiques détaillées : l'électromagnétisme comme méta-jauge $U(1)$ locale, l'effet Aharonov–Bohm comme obstruction sur un cycle, les théories de Yang–Mills, le théorème de Noether, la brisure spontanée de symétrie comme gain de finesse, et la relativité générale comme méta-jauge locale.

Table des matières

I. Théorie	2
1 Rappel : la jauge comme couple ordre/équivalence	2
2 La méta-jauge	2
3 La connexion de Galois jauge $\dashv$ méta-jauge	3
4 Antitonicité et finesse : le comptage de Burnside	3
5 Le joint ordre/équivalence	4
6 Localisation : la connexion et sa courbure	4

II. Applications physiques	5
7 Électromagnétisme : la méta-jauge $U(1)$ locale	5
8 Yang–Mills et le modèle standard : une tour de méta-jauges	6
9 Noether : symétrie conservée, force à la brisure	7
10 Brisure spontanée de symétrie : le gain de finesse chiffré	7
11 Relativité générale : la méta-jauge locale de l'espace-temps	8
Conclusion	8

I. Théorie

1 Rappel : la jauge comme couple ordre/équivalence

On rappelle la brique de base. Sur un ensemble Ω , une *jauge* $\mathcal{J}(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ est la donnée d'un ordre générique $\mathcal{O}$ et d'une équivalence $\mathcal{R}$ tels que l'inordonnabilité coïncide avec l'équivalence. La jauge se résume par le pré-ordre total $x \preceq y : \Leftrightarrow (x \mathcal{O}_1 y) \vee (x \mathcal{R} y)$, dont $\mathcal{R}$ est la partie symétrique et $\mathcal{O}_1$ la partie asymétrique. La *finesse* de $\mathcal{J}$ est le cardinal du quotient $\#(\Omega/\mathcal{R})$: le nombre de classes que la jauge distingue.

La moitié $\mathcal{R}$ dit ce que la jauge *identifie* ; la moitié $\mathcal{O}$ dit comment elle *hiérarchise*. Cette distinction sera cruciale : un groupe de symétrie engendre naturellement une équivalence, mais pas un ordre.

2 La méta-jauge

Définition 1 (Méta-jauge). *Soit $\mathcal{J}$ une jauge sur Ω . On appelle méta-jauge de $\mathcal{J}$ le groupe des transformations de Ω qui la laissent invariante :*

$$\text{Sym}(\mathcal{J}) = \{ g : \Omega \rightarrow \Omega \text{ bijective} \mid \forall x, y, x \preceq y \Rightarrow g(x) \preceq g(y) \}.$$

On note $\text{Sym}_{\mathcal{R}}(\mathcal{J})$ le groupe, en général plus grand, des g qui préservent seulement l'équivalence $\mathcal{R}$ (et non l'ordre).

La méta-jauge est une jauge au sens de l'introduction épistémologique : une transformation locale ou globale sous laquelle la théorie — ici la jauge — reste invariante. Elle vit un niveau au-dessus : ce n'est pas une jauge sur Ω , c'est le groupe d'invariance d'une jauge.

3 La connexion de Galois jauge $\dashv$ méta-jauge

Le lien entre une jauge et sa méta-jauge est une correspondance de Galois, exactement celle qui fonde le programme d'Erlangen dans sa lecture moderne.

Définition 2 (Contenu et symétrie). À un sous-groupe $G \leq \text{Sym}(\Omega)$ on associe le contenu invariant $\text{Inv}(G)$: la jauge dont l'équivalence est la relation d'orbite ($x \mathcal{R}_G y \Leftrightarrow \exists g \in G, g(x) = y$), c'est-à-dire la jauge la plus fine que G laisse invariante. À une jauge $\mathcal{J}$ (un contenu) on associe sa méta-jauge $\text{Sym}(\mathcal{J})$.

Théorème 1 (Connexion de Galois, d'après Klein). Les applications Sym et Inv forment une connexion de Galois antitone entre le treillis des jauges sur Ω (ordonné par la finesse) et le treillis des sous-groupes de $\text{Sym}(\Omega)$ (ordonné par l'inclusion) :

$\mathcal{J}$ plus fine que $\mathcal{J}' \implies \text{Sym}(\mathcal{J}) \subseteq \text{Sym}(\mathcal{J}'), \quad G \subseteq G' \implies \text{Inv}(G') \text{ plus fine que } \text{Inv}(G),$
avec les inégalités de clôture $\mathcal{J} \preceq_\delta \text{Inv}(\text{Sym}(\mathcal{J}))$ et $G \subseteq \text{Sym}(\text{Inv}(G))$.

Démonstration. Antitonie de Sym : si $\mathcal{J}$ raffine $\mathcal{J}'$, toute bijection préservant $\preceq$ préserve $\preceq'$ (plus grossier), donc $\text{Sym}(\mathcal{J}) \subseteq \text{Sym}(\mathcal{J}')$. Antitonie de Inv : un groupe plus grand a des orbites plus grandes, donc une équivalence-orbite plus grossière, donc un contenu moins fin. Les inégalités de clôture expriment que Sym et Inv sont adjointes : une jauge est toujours au moins aussi fine que le contenu invariant de sa propre méta-jauge, et un groupe toujours contenu dans la symétrie de son propre contenu invariant. $\square$

Définition 3 (Géométrie). Une géométrie au sens d'Erlangen est un couple clos $(\mathcal{J}, G)$ de la connexion : $\mathcal{J} = \text{Inv}(G)$ et $G = \text{Sym}(\mathcal{J})$. C'est une jauge auto-cohérente — celle dont la méta-jauge restitue exactement le contenu.

Principe 1 (Une jauge est la méta-jauge d'une jauge). Les théories de jauge de Weyl et de la physique contemporaine sont, dans ce cadre, les géométries : des jauges dont le groupe d'invariance est stipulé, et qui coïncident avec le contenu invariant de ce groupe. « Théorie invariante sous un groupe » et « jauge auto-cohérente » sont deux formulations du même point fixe de Galois.

4 Antitonie et finesse : le comptage de Burnside

La connexion de Galois n'est pas qu'un cadre : elle chiffre la finesse.

Proposition 1 (Finesse comme nombre d'orbites). Pour un groupe fini G agissant sur un ensemble fini Ω , la finesse du contenu invariant est le nombre d'orbites, donné par la formule de Burnside :

$$\#(\Omega/\mathcal{R}_G) = |\Omega/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\text{Fix}(g)|.$$

Corollaire 1 (La brisure de symétrie augmente la finesse). *Si $G' \subsetneq G$ (brisure de la symétrie G vers G'), alors $|\Omega/G'| \geq |\Omega/G|$: le contenu $\text{Inv}(G')$ est plus fin que $\text{Inv}(G)$. Le gain de finesse, mesuré en bits, est*

$$\Delta N = \log_2 \frac{|\Omega/G'|}{|\Omega/G|} \geq 0.$$

Remarque 1 (Identité avec la monotonie de la finesse). *Ce corollaire est la contrepartie, côté groupes, du théorème de monotonie de la finesse de Les jauges. Le quotient $\Omega \rightarrow \Omega/G$ est une poussée en avant qui fusionne les orbites : agrandir le groupe, c'est fusionner davantage, donc faire chuter la finesse jusqu'au nombre d'orbites. Réciproquement, briser une symétrie raffine la jauge. La relation d'ordre $\mathcal{O}_\delta$ sur les jauges est ainsi l'image renversée de l'inclusion des groupes : plus fine que du côté jauges = sous-groupe de du côté symétries.*

5 Le joint ordre/équivalence

Un point de rigueur, qui est aussi l'apport propre de ce cadre par rapport à Erlangen. Un groupe de symétrie engendre une *équivalence* (les orbites), soit la moitié $\mathcal{R}$ d'une jauge, mais pas d'ordre $\mathcal{O}_1$. La méta-jauge $\text{Sym}_{\mathcal{R}}(\mathcal{J})$ ne capture donc que la partie identification.

Proposition 2 (Deux niveaux de méta-jauge). *Pour toute jauge $\mathcal{J}$, $\text{Sym}(\mathcal{J}) \subseteq \text{Sym}_{\mathcal{R}}(\mathcal{J})$. La méta-jauge qui respecte l'ordre est un sous-groupe de celle qui respecte seulement l'équivalence.*

Démonstration. Toute bijection préservant $\preceq$ préserve sa partie symétrique $\mathcal{R}$; l'inclusion est donc immédiate. Elle est en général stricte : une transformation peut permuter les classes sans respecter leur hiérarchie. $\square$

La géométrie de Klein ne connaît que $\mathcal{R}$; la jauge y superpose $\mathcal{O}$. Une théorie de jauge au sens plein est donc une *géométrie ordonnée* : outre le groupe qui identifie, un ordre transverse que ce groupe peut préserver (homogène) ou aplatis (hétérogène). Cette distinction est l'analogue exact de la distinction homogène/hétérogène du jaugeage.

6 Localisation : la connexion et sa courbure

Le passage de Klein à Weyl tient en un geste : *rendre le groupe local*. Une géométrie de Klein fixe un groupe unique pour tout l'espace ; une jauge physique fait dépendre le groupe du point.

Définition 4 (Méta-jauge locale). *Soit une famille de loci (U_i) recouvrant un espace, chacun portant une jauge $\mathcal{J}_i$ et sa méta-jauge G_i . Une méta-jauge locale est la donnée, sur chaque recouvrement $U_i \cap U_j$, d'une jauge de*

compatibilité topologique g_{ij} reliant $\mathcal{J}_i$ et $\mathcal{J}_j$ — une règle de transport de la jauge d'un locus vers son voisin.

Principe 2 (Compatibilité = connexion, obstruction sur un cycle = courbure). *La jauge de compatibilité g_{ij} est un transport parallèle : elle joue le rôle d'une connexion. Le long d'un chemin fermé (un cycle), la composition des g_{ij} peut ne pas revenir à l'identité : ce défaut de recollement est l'analogue de la courbure. C'est exactement l'obstruction sur un cycle mise en évidence par le recollement segment $\rightarrow$ cercle, où la finesse chute faute de pouvoir refermer l'ordre.*

Ce principe reste, à ce stade, une analogie structurelle : la courbure n'est pleinement définie qu'une fois donnée la différentielle de la méta-jauge. La seconde partie montre que, dans les théories de jauge de la physique, cette analogie devient une identité littérale.

II. Applications physiques

7 Électromagnétisme : la méta-jauge $U(1)$ locale

C'est l'exemple le plus pur, et il réalise *littéralement* tout le schéma théorique.

La phase est une équivalence de jauge. L'état d'une particule chargée est décrit par une fonction d'onde $\psi(x) \in \mathbb{C}$. La phase globale est physiquement inobservable : ψ et $e^{i\alpha}\psi$ décrivent le même état. Deux fonctions d'onde différant d'une phase sont donc *identifiées* : c'est une équivalence $\mathcal{R}$, dont la méta-jauge est le groupe

$$U(1) = \{ e^{i\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \} = \text{Sym}_{\mathcal{R}}(\mathcal{J}).$$

Les observables sont les invariants $\text{Inv}(U(1))$: le contenu gauge-invariant. Le couple (observables, $U(1)$) est une géométrie de Klein au sens strict.

Localisation : la connexion électromagnétique. Weyl impose que la phase soit choisie *indépendamment en chaque point* : $\alpha = \alpha(x)$. La dérivée ordinaire $\partial_\mu \psi$ n'est alors plus covariante, car $\partial_\mu (e^{i\alpha(x)} \psi) = e^{i\alpha} (\partial_\mu \psi + i \partial_\mu \alpha \psi)$. Pour comparer ψ en deux loci voisins, il faut une règle de transport : la *dérivée covariante*

$$D_\mu = \partial_\mu - i e A_\mu,$$

où le champ A_μ — le potentiel électromagnétique — se transforme par $A_\mu \mapsto A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha$. On vérifie alors $D_\mu (e^{i\alpha} \psi) = e^{i\alpha} D_\mu \psi$: la covariance est rétablie.

Remarque 2. A_μ est exactement la jauge de compatibilité topologique g_{ij} du principe de localisation : la règle qui relie la phase d'un locus à celle du voisin. Le potentiel électromagnétique est la connexion de la méta-jauge $U(1)$ rendue locale.

Courbure : le champ électromagnétique. Le défaut de commutation du transport parallèle est la courbure :

$$[D_\mu, D_\nu] = -ie F_{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu,$$

qui est gauge-invariant et rassemble les champs électrique et magnétique. $F_{\mu\nu}$ est l'obstruction infinitésimale au recollement de la phase le long d'une boucle : c'est la *courbure* au sens du principe précédent, ici parfaitement définie.

L'effet Aharonov–Bohm : l'obstruction sur un cycle, mesurée. La manifestation physique la plus nette de « l'obstruction sur un cycle » est l'effet Aharonov–Bohm. Une particule chargée contournant un solénoïde acquiert, le long d'un cycle fermé C , une phase

$$\Delta\varphi = \frac{e}{\hbar} \oint_C A_\mu dx^\mu = \frac{e}{\hbar} \Phi_B,$$

où Φ_B est le flux magnétique enlacé — *non nul même là où $F_{\mu\nu} = 0$ le long du trajet*. Cette phase (l'holonomie de la connexion, ou boucle de Wilson $W = \exp(i\frac{e}{\hbar} \oint A)$) est précisément la non-trivialité du recollement sur un cycle : la jauge de compatibilité ne revient pas à l'identité après un tour. C'est l'analogue physique exact du recollement segment $\rightarrow$ cercle, et il est *mesurable* (décalage des franges d'interférence).

Remarque 3. On retrouve ici le lien avec la théorie du grain : l'obstruction est un invariant de cycle (π_1 non trivial de l'espace privé du solénoïde), non un nombre caractéristique local. C'est la version physique de la thèse « ce n'est pas χ , c'est le cycle ».

8 Yang–Mills et le modèle standard : une tour de méta-jauges

Le schéma se répète pour les groupes non abéliens. Pour un groupe G (par exemple $SU(2)$ ou $SU(3)$), la connexion $A_\mu = A_\mu^a T^a$ est à valeurs dans l'algèbre de Lie, et la courbure acquiert un terme d'auto-interaction :

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

où f^{abc} sont les constantes de structure de G . Le modèle standard est la géométrie associée au groupe

$$G_{\text{SM}} = SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y.$$

Proposition 3 (Antitonicité dans le modèle standard). *Le groupe G_{SM} identifie de vastes familles d'états (couleurs, isospin, hypercharge) : son contenu invariant est grossier. Enrichir le contenu mesurable — distinguer les couleurs, fixer une direction d'isospin — revient à restreindre le groupe, conformément à l'antitonicité de Klein. La hiérarchie des interactions est une tour de méta-jauges, ordonnée à l'envers de la finesse de leurs contenus.*

9 Noether : symétrie conservée, force à la brisure

Le théorème de Noether s'inscrit exactement dans le couple jauge/méta-jauge. À toute symétrie continue de la méta-jauge correspond un courant conservé $\partial_\mu j^\mu = 0$ et une charge $Q = \int j^0 d^3x$ constante.

Principe 3 (Noether lu dans les deux sens). *Tant que la transformation reste dans la méta-jauge $\text{Sym}(\mathcal{J})$, la charge conjuguée est conservée : $\dot{q}_X = \{q_X, H\} = 0$. À la brisure — lorsque la transformation sort de la méta-jauge — cette variation devient une force : $F_s = \dot{q}_X \neq 0$. Symétrie conservée et force à la brisure sont deux faces du même fait. La force sémantique $F_s = \Delta\mu$ de la théorie du grain est exactement cette variation de mesure : ce que la brisure distingue et que la symétrie confondait.*

10 Brisure spontanée de symétrie : le gain de finesse chiffré

La brisure spontanée illustre le corollaire de finesse dans un cas physique central. Un potentiel $V(\phi)$ à minima dégénérés admet une variété de vides G/H ; le choix d'un vide brise G vers son sous-groupe H . Les directions brisées $\dim(G/H)$ deviennent des modes de Goldstone ; par le mécanisme de Higgs, les bosons de jauge des générateurs brisés acquièrent une masse.

Dans notre langage : avant brisure, les états d'une orbite de G sont indiscernables (une seule classe) ; après, le vide est épinglé et les directions G/H deviennent distinguables. La finesse augmente exactement de ΔN .

Proposition 4 (Chiffrage par Burnside). *Pour une action de groupe fini sur un ensemble fini de configurations, le gain de finesse à la brisure $G \rightarrow H$ est*

$$\Delta N = \log_2 \frac{|\Omega/H|}{|\Omega/G|} \text{ bits.}$$

Remarque 4 (Exemple travaillé : collier à 6 perles, 3 couleurs). Avec $|\Omega| = 3^6 = 729$, le comptage de Burnside donne pour le groupe cyclique C_6 ($|G| = 6$) un nombre d'orbites $|\Omega/C_6| = 130$, soit $N = 2,487$ bits, et pour le groupe diédral D_6 ($|G| = 12$) $|\Omega/D_6| = 92$, soit $N = 2,986$ bits. Le groupe plus grand fusionne davantage ($92 < 130$) et porte plus de négentropie ; la brisure $D_6 \rightarrow$

C_6 (perte des réflexions) libère $\Delta N = 0,499$ bit. Via le principe de Landauer, cette néguentropie se convertit en énergie libre $\Delta F = \Delta N k_B T \ln 2$, dont le gradient déforme : c'est la chaîne Klein $\rightarrow$ Burnside $\rightarrow$ Landauer $\rightarrow$ force de la théorie du grain.

Remarque 5 (Garde-fou). Cette dernière chaîne (brisure $\rightarrow$ néguentropie $\rightarrow$ énergie $\rightarrow$ force) est physiquement fondée à l'échelle moléculaire ($k_B T \ln 2 \approx 10^{-21}$ J), mais elle décrit un stockage d'énergie déformante dans un système thermodynamique, non une nouvelle force fondamentale. Elle est à distinguer nettement des méta-jauges $U(1)$, $SU(N)$, qui sont, elles, des théories physiques établies.

11 Relativité générale : la méta-jauge locale de l'espace-temps

La relativité générale entre dans le même moule, la méta-jauge étant cette fois le groupe local de Lorentz (ou, de manière équivalente, l'invariance sous difféomorphismes). La connexion est la connexion de Levi-Civita $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$, la courbure le tenseur de Riemann $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$. Dans le vocabulaire du situs : un espace-temps plat est un situs homogène (courbure nulle, la jauge se transporte sans obstruction) ; un espace-temps courbe est un situs hétérogène, dont la courbure est l'obstruction au recollement de la jauge le long des cycles. La déviation géodésique — deux trajectoires initialement parallèles qui divergent — est la mesure directe de cette obstruction.

Remarque 6. On rejoint la remarque d'Einstein assimilant une géodésique à une ligne droite généralisée : la géodésique est la trajectoire qui préserve la jauge locale (transport parallèle du vecteur vitesse), et sa déviation mesure le défaut de la méta-jauge à être globale.

Conclusion

Une jauge est la méta-jauge d'une jauge : le groupe qui la laisse invariante. La connexion de Galois de Klein articule les deux niveaux, ses points fixes sont les géométries d'Erlangen, et sa relation d'antitonicité est la finesse, chiffrée par Burnside. Rendue locale, la méta-jauge produit une connexion dont la courbure est l'obstruction au recollement sur un cycle — littéralement, en physique, le potentiel et le champ de jauge, l'effet Aharonov–Bohm, la courbure de l'espace-temps. Le cadre unifie ainsi, sous une même relation ordre/équivalence, le programme d'Erlangen et les théories de jauge de la physique contemporaine.

Deux réserves à poser : la partie théorique (connexion de Galois, antitonicité, finesse) est établie ; l'identification compatibilité = connexion est une analogie structurelle que la physique réalise mais que le formalisme abstrait doit encore doter d'une différentielle propre. Et le joint ordre/équivalence — un groupe encode l'identification, non la hiérarchie — reste le lieu où la jauge dépasse la géométrie de Klein, et où le travail théorique demeure ouvert.

Références

- [1] H. Genvrin, *Applications du programme du grain*.
- [2] F. Klein, *Programme d'Erlangen* (1872).
- [3] H. Weyl, *Espace, temps, matière*.
- [4] C. N. Yang, R. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. 96 (1954).
- [5] Y. Aharonov, D. Bohm, *Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory*, Phys. Rev. 115 (1959).