

Une famille de boucles circulaires emboîtées : homéomorphismes, formule de Viète et statut topologique du cercle

Hugues GENVRIN

14 mai 2026

Résumé

Nous étudions une famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ de courbes paramétrées à support circulaire, reliées entre elles par une transformation géométrique simple ψ fondée sur la projection radiale $\cos \theta$. Nous montrons que ψ se restreint en un homéomorphisme entre boucles consécutives de la famille, et qu'une légère modification ψ^* réalise un homéomorphisme entre un arc semi-ouvert et un cercle entier. Ce dernier résultat fournit une description topologique du cercle comme image continue et bijective d'un intervalle semi-ouvert, et permet de retrouver de manière géométrique la formule du produit infini de Viète (1593). Nous concluons par quelques observations sur le comportement asymptotique de la famille lorsque $k \rightarrow \pm\infty$.

1 Introduction

Le cercle admet de nombreuses caractérisations, depuis la définition métrique d'Euclide jusqu'aux constructions différentielles et algébriques modernes. Nous proposons ici une approche par déformation continue : le cercle apparaît comme l'image, par un homéomorphisme explicite, d'un *arc semi-ouvert* obtenu en demi-tour. Cette construction, élémentaire dans son énoncé, met en jeu une famille remarquable de courbes à support circulaire dont les éléments sont tous de même longueur $4\pi\rho_0$, et conduit à une redémonstration géométrique de la formule de Viète.

Le plan est le suivant. La section 2 introduit la famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ et ses propriétés métriques élémentaires. La section 3 définit la transformation ψ et établit qu'il s'agit d'un homéomorphisme entre supports consécutifs. La section 4 contient le résultat principal : la variante ψ^* réalise un homéomorphisme entre un arc semi-ouvert et le cercle. La section 5 en déduit la formule de Viète. La section 6 évoque le comportement aux limites.

2 La famille $(B_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

On se place dans le plan euclidien rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\rho_0 > 0$ un paramètre fixé.

Définition 1. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on note C_k le cercle de centre $O_k(-2^k\rho_0, 0)$ et de rayon $\rho_k = 2^k\rho_0$. La courbe B_k est définie comme le parcours du cercle C_k , dans le sens trigonométrique direct depuis l'origine O , sur une longueur angulaire totale de $2^{-k+1} \cdot 2\pi$.

Tous les cercles C_k passent par l'origine O , qui sert d'origine commune aux courbes B_k . L'extrémité finale de B_k , notée S_k , n'est par convention pas incluse dans la courbe.

Selon la valeur de k , B_k prend trois formes géométriques distinctes :

- pour $k = 1$, B_1 est le cercle C_1 parcouru une fois ;
- pour $k > 1$, B_k est un *arc* de cercle, parcourant 2^{-k+1} tour de C_k (par exemple, demi-cercle pour $k = 2$, quart de cercle pour $k = 3$) ;

— pour $k \leq 0$, B_k est une *multi-boucle*, parcourant $2^{-k+1} \geq 2$ fois le cercle C_k .

Pour décrire sans ambiguïté un point d'une multi-boucle, qui peut être visité plusieurs fois, on introduit un *indice de recouvrement*. Un point de B_k est noté T_k^β , où $\beta \in \{1, 2, \dots, 2^{-k+1}\}$ indique à quel passage on se réfère. L'origine O , point de départ, porte l'indice 1 et se note O^1 .

Définition 2. On définit sur B_k la relation \sim par : $T_k^\beta \sim T_k^{\beta'}$ si et seulement si les deux points coïncident géométriquement dans le plan.

Il est immédiat que \sim est une relation d'équivalence. Pour $k > 0$, chaque classe est un singleton ; pour $k \leq 0$, chaque classe contient exactement 2^{-k+1} éléments. On notera \widetilde{T}_k la classe de T_k^β .

Proposition 3 (Longueur commune). *Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la longueur curviligne de B_k vaut $4\pi\rho_0$.*

Démonstration. La longueur vaut $\theta_k \cdot \rho_k$ où $\theta_k = 2\pi \cdot 2^{-k+1}$ est l'amplitude angulaire totale parcourue, et $\rho_k = 2^k \rho_0$. Le produit vaut $4\pi\rho_0$, indépendamment de k . \square

Remarque 4. Les angles à l'origine $\alpha_k = \widehat{O_k O S_k}$ et au centre $\theta_k = \widehat{O O_k S_k}$ vérifient pour $k > 1$ (cas des arcs) :

$$\theta_k = \frac{\pi}{2^{k-2}}, \quad \alpha_k = \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{2^{k-2}} \right).$$

On a $\theta_k \rightarrow 0$ et $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

3 L'homéomorphisme ψ

Nous définissons à présent une transformation reliant B_k à B_{k-1} .

3.1 Construction

Plus généralement, pour $\alpha > 0$, désignons par $\alpha\{C_k\}$ le support C_k parcouru α fois depuis l'origine O dans le sens direct, point final exclu. Tout point $T_k^\beta \in \alpha\{C_k\}$ est repéré par sa mesure angulaire $\theta_k^\beta = \widehat{O O_k T_k^\beta} \in [0, 2\pi\alpha)$.

Définition 5. On définit

$$\psi : \alpha\{C_k\} \longrightarrow 2\alpha\{C_{k-1}\}, \quad T_k^\beta \longmapsto T_{k-1}^{\beta'}$$

en imposant que le point image $T_{k-1}^{\beta'}$ soit caractérisé par

$$\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \cos(\theta_k^\beta) \cdot \overrightarrow{O_k T_k^\beta}.$$

Lemme 6. *Le point $T_{k-1}^{\beta'}$ ainsi défini appartient effectivement à C_{k-1} , et sa mesure angulaire dans le repère centré en O_{k-1} vaut $\theta_{k-1}^{\beta'} = 2\theta_k^\beta$.*

Démonstration. On part de $\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_k \cos(\theta_k^\beta) \vec{e}_r^k$, où $\vec{e}_r^k = \cos(\theta_k^\beta) \vec{i} + \sin(\theta_k^\beta) \vec{j}$. Par développement,

$$\overrightarrow{O_k T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_k (\cos^2 \theta_k^\beta \vec{i} + \cos \theta_k^\beta \sin \theta_k^\beta \vec{j}) = \rho_{k-1} ((1 + \cos 2\theta_k^\beta) \vec{i} + \sin 2\theta_k^\beta \vec{j}),$$

en utilisant $\rho_k = 2\rho_{k-1}$ et les formules de duplication. Puisque $\overrightarrow{O_{k-1} O_k} = -\rho_{k-1} \vec{i}$, il vient

$$\overrightarrow{O_{k-1} T_{k-1}^{\beta'}} = \rho_{k-1} (\cos 2\theta_k^\beta \vec{i} + \sin 2\theta_k^\beta \vec{j}),$$

ce qui prouve que le point est à distance ρ_{k-1} de O_{k-1} et que sa mesure angulaire vaut $2\theta_k^\beta$. \square

3.2 Bijection et continuité

Proposition 7. ψ est une bijection de $\alpha\{C_k\}$ sur $2\alpha\{C_{k-1}\}$.

Démonstration. Par construction, ψ est l'application $\theta \mapsto 2\theta$ entre les domaines de paramétrage $[0, 2\pi\alpha)$ et $[0, 4\pi\alpha)$. Cette application est une bijection croissante, donc ψ également. \square

Proposition 8. ψ est un homéomorphisme.

Démonstration. Par le lemme 6, ψ est conjuguée à l'application linéaire $\theta \mapsto 2\theta$ entre les espaces de paramètres. Cette application est continue et de réciproque continue. Comme la paramétrisation par l'angle est un homéomorphisme entre $[0, 2\pi\alpha)$ (resp. $[0, 4\pi\alpha)$) et $\alpha\{C_k\}$ (resp. $2\alpha\{C_{k-1}\}$), le résultat suit. \square

Remarque 9 (Construction géométrique). Le passage de T_k^β à son image se traduit ainsi : $T_{k-1}^{\beta'}$ est le second point d'intersection de la droite $(O_k T_k^\beta)$ avec C_{k-1} (l'autre étant O_k lui-même).

3.3 Action sur la famille (B_k)

Comme $B_k = 2^{-k+1}\{C_k\}$, la définition 5 donne immédiatement :

Corollaire 10. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\psi(B_k) = B_{k-1}$ et $\psi^{-1}(B_k) = B_{k+1}$. En itérant, pour tous $k, j \in \mathbb{Z}$:

$$\psi^{\circ k}(B_j) = B_{j-k}.$$

4 La variante ψ^* et le statut topologique du cercle

Considérons le cas particulier $\alpha = 1/2$. Le domaine de ψ est alors le demi-cercle supérieur $\frac{1}{2}\{C_1\} = (O^1; \bar{S}_k)$ où S_k est diamétralement opposé à O sur C_1 ; ce point étant exclu par convention.

4.1 Définition de ψ^*

Définition 11. On définit $\psi^* : (\bar{O}^1; S_k] \rightarrow \{C_0\}$ par

$$\psi^*(T) = \psi(T) \text{ si } T \in (\bar{O}^1; \bar{S}_k), \quad \psi^*(S_k) = O^2,$$

où O^2 désigne l'origine O avec indice de recouvrement 2 (le point de retour sur C_0 après un tour complet).

Ainsi, ψ^* est définie sur l'arc semi-ouvert $(\bar{O}^1; S_k]$ — origine exclue, extrémité incluse — et prend ses valeurs sur le cercle $\{C_0\}$ entier, vu comme $(\bar{O}^1; O^2]$ avec extrémité incluse.

Théorème 12. $\psi^* : (\bar{O}^1; S_k] \rightarrow \{C_0\}$ est un homéomorphisme.

Démonstration. La bijectivité est claire : ψ est bijective sur l'intérieur, et l'on a ajouté un point isolé de chaque côté en bijection.

La continuité de ψ^* sur l'intérieur $(\bar{O}^1; \bar{S}_k)$ découle de la proposition 8. Il reste à vérifier la continuité en S_k : lorsque $\theta_k \rightarrow \pi^-$, on a $\theta_{k-1} = 2\theta_k \rightarrow 2\pi^-$, donc l'image tend vers O^2 , qui est précisément la valeur en S_k . Le même argument s'applique à $(\psi^*)^{-1}$ en O^2 . \square

4.2 Conséquence topologique

Le théorème 12 fournit une description du cercle comme image continue et bijective d'un intervalle semi-ouvert. Plus précisément :

Corollaire 13. *Le cercle $\{C_0\}$, identifié à $(\bar{O}^1; O^2]$, est homéomorphe à l'intervalle semi-ouvert $(0, \pi]$ via la paramétrisation angulaire.*

Cette observation, classique en topologie générale lorsqu'on écrit $S^1 \cong [0, 2\pi]/(0 \sim 2\pi)$, prend ici un sens géométrique direct : *en étirant continûment un demi-cercle, on obtient un cercle entier, à condition d'inclure l'extrémité finale (qui s'identifie alors à l'origine via la relation \sim).*

Remarque 14 (Trois points de vue sur le cercle). Le cercle $\{C_0\}$ peut être présenté comme :

- *semi-ouvert* en tant qu'ensemble paramétré $(\bar{O}^1; O^2]$;
- *ouvert* en excluant également O^2 , ce qui correspond à ψ appliqué à $(\bar{O}^1; \bar{S}_k)$;
- *fermé* (compact) en passant aux classes d'équivalence : $\widetilde{O}^1 = \widetilde{O}^2 = O$ scelle l'orbite.

Ces trois points de vue sont cohérents et coexistent selon que l'on raisonne sur les éléments paramétrés (avec indices de recouvrement) ou sur leurs classes d'équivalence géométrique.

5 Une démonstration géométrique de la formule de Viète

L'homéomorphisme ψ permet de retrouver, par calcul direct sur les ordonnées des extrémités S_k , la formule du produit infini de Viète.

Théorème 15 (Viète, 1593).

$$\frac{2}{\pi} = \cos \frac{\pi}{4} \cdot \cos \frac{\pi}{8} \cdot \cos \frac{\pi}{16} \cdots = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdots$$

Démonstration. Pour $k \geq 1$, soit y_k l'ordonnée de l'extrémité S_k de B_k . Un calcul direct par translation du repère en O_k donne

$$y_k = 2^k \rho_0 \sin\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right).$$

En utilisant $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, on obtient la récurrence

$$y_{k+1} = y_k \cdot \frac{1}{\cos(\pi/2^{k-1})} \quad (k \geq 3).$$

Par télescopage à partir de $y_3 = 4\rho_0$,

$$y_{p+1} = 4\rho_0 \cdot \prod_{j=3}^p \frac{1}{\cos(\pi/2^{j-1})}.$$

Or $y_k \rightarrow 4\pi\rho_0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$ (longueur limite, proposition 3, combinée à $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ qui donne un segment vertical limite de longueur $4\pi\rho_0$). On en déduit

$$\prod_{j=3}^{\infty} \frac{1}{\cos(\pi/2^{j-1})} = \pi, \quad \text{soit} \quad \prod_{n=2}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^n} = \frac{2}{\pi}.$$

La seconde expression résulte de la récurrence $u_{n+1} = \sqrt{(1+u_n)/2}$ avec $u_1 = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$, qui se vérifie par récurrence en utilisant la formule de l'arc moitié : $\cos(\pi/2^{n+2}) = \sqrt{(1+\cos(\pi/2^{n+1}))/2}$. \square

6 Comportement asymptotique

L'action de ψ sur la famille (B_k) permet de poser naturellement la question des limites.

Limite $k \rightarrow +\infty$. Les boucles B_k deviennent des arcs de plus en plus courts sur des cercles de plus en plus grands. Comme $\theta_k \rightarrow 0$, $\alpha_k \rightarrow \pi/2$ et que la longueur reste constante égale à $4\pi\rho_0$, on conjecture que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} B_k = [O; P), \quad \text{où } P = (0, 2\pi\rho_1).$$

Cette limite est cohérente avec les propriétés de la famille : longueur conservée et nature semi-ouverte de l'ensemble.

Limite $k \rightarrow -\infty$. Cette limite est plus délicate. Les rayons tendent vers 0, les centres tendent vers O , mais le nombre de recouvrements tend vers l'infini :

$$B_k = 2^{-k+1}\{C_k\}, \quad \rho_k \rightarrow 0, \quad 2^{-k+1} \rightarrow +\infty.$$

La limite ponctuelle est O , mais cette description dévoile des propriétés invariantes (longueur $4\pi\rho_0$, structure de multi-boucle). Cela laisse ouvert le champ à une nouvelle géométrie, où le point n'est plus ce dont la partie est nulle.

7 Conclusion

L'homéomorphisme ψ^* offre une description géométrique transparente du cercle comme image continue et bijective d'un demi-cercle semi-ouvert, et la famille (B_k) fournit le cadre naturel pour itérer cette construction. La formule de Viète apparaît alors comme un corollaire métrique de cette structure. Le comportement asymptotique en $k \rightarrow -\infty$ suggère qu'il existe une notion intéressante d'objet limite à recouvrement infini, sur laquelle nous reviendrons.

Références

- [1] F. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII*, Tours, 1593.
- [2] Euclide, *Éléments*, Livre I, définition 15.