

De l'axiome du choix à une fonction de choix sur les grains

Hugues Genvrin

October 2026

Résumé

Nous examinons ce que devient l'axiome du choix dans le cadre de la théorie du grain. Pour une famille hyperfinie d'ensembles non vides de grains, l'existence d'une fonction de choix ne requiert pas l'axiome : c'est, par transfert, le choix fini de la théorie ZF. L'apport propre du grain est ailleurs. Parce que chaque grille est bien ordonnée par l'ordre lexical, la fonction de choix peut être donnée explicitement, sans arbitraire : on choisit le premier grain. Nous montrons ensuite que ce caractère canonique ne survit pas, en général, à la promotion : « choisir le premier grain puis promouvoir » produit une borne inférieure, qui n'appartient pas toujours à l'ensemble de départ. Sur un ouvert, choisir le premier grain *intérieur* (pour $]0, 1[$, le deuxième grain) donne un représentant dans l'ensemble avant promotion, mais pas après ; seul un choix au niveau le plus *grossier* survit, et il est définissable dans ZF. Le grain ne justifie donc pas l'axiome du choix pour le continu ; il localise précisément le lieu où l'axiome devient nécessaire.

1 Introduction

L'axiome du choix, formulé par Zermelo [3, 4], affirme qu'on peut choisir simultanément un élément dans chacun des ensembles d'une famille d'ensembles non vides. Nous utilisons la forme suivante, due à Zermelo (1908).

Axiome 1 (Axiome du choix). *Si T est un ensemble dont les éléments sont des ensembles non vides et disjoints deux à deux, leur union $U = \bigcup T$ contient au moins un sous-ensemble S ayant un et un seul élément en commun avec chaque élément de T .*

L'ensemble S est l'image d'une *fonction de choix* $c: T \rightarrow U$ vérifiant $c(T_i) \in T_i$ pour tout $T_i \in T$. Zermelo a montré que l'axiome équivaut au *théorème du bon ordre* : tout ensemble peut être bien ordonné. Réciproquement, sur un ensemble déjà bien ordonné, le choix est trivial : il suffit de prendre le plus petit élément.

La théorie du grain [1] décrit le continu comme la limite, obtenue par promotion, d'une tour de grilles hyperfinies, et chacune de ces grilles est bien ordonnée par l'ordre lexical. On peut donc se demander ce que le grain permet de dire de l'axiome du choix. Notre réponse tient en trois points :

1. sur les grilles, le choix est acquis sans l'axiome (section 3) ;
2. il y est de plus *canonique* (section 4) ;
3. la promotion détruit ce caractère canonique (section 5) ;
4. sur les ouverts, seul un choix au niveau le plus grossier survit, et la frontière de l'axiome passe par les ensembles d'intérieur vide (section 6).

2 Rappels sur le grain

Soit n_∞ un hyperentier et $k \geq 1$ un entier. À la résolution $-kn_\infty$, le continu unité $C_1 = [0, 1[$ est découpé en grains

$$g_m = [m 2^{-kn_\infty}, (m+1) 2^{-kn_\infty}[, \quad 0 \leq m < 2^{kn_\infty},$$

d'épaisseur 2^{-kn_∞} , infinitésimale non nulle [1, chap. 15]. Chaque grain correspond à une écriture binaire terminante de longueur kn_∞ . L'ensemble B_{-kn_∞} de ces grains est hyperfini, de cardinal 2^{kn_∞} .

L'ordre lexical des écritures binaires coïncide avec l'ordre géométrique des grains [1, § 2.2.4]. Il identifie B_{-kn_∞} à l'ensemble d'indices $\{0, 1, \dots, 2^{kn_\infty} - 1\}$ par $g_m \mapsto m$.

La *promotion* est le passage au quotient $\mathbb{R}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$, où $\mathfrak{m}$ est l'idéal des infinitésimaux. Elle est réalisée par la partie standard st. Nous représenterons un grain g_m par son extrémité gauche $m 2^{-kn_\infty}$, de sorte que $\text{st}(g_m) := \text{st}(m 2^{-kn_\infty})$.

Comme dans [2], nous distinguons les parties de la grille qui sont définissables à son niveau de celles qui ne le sont pas.

Définition 1 (Partie interne). Une partie de B_{-kn_∞} est dite *interne* si elle est définissable au niveau de la grille, c'est-à-dire, dans le langage de l'analyse non standard, si c'est un ensemble interne.

Hypothèse 2 (Transfert). Les énoncés du premier ordre vrais pour les ensembles finis $\{0, \dots, N-1\}$, $N \in \mathbb{N}$, et leurs parties restent vrais pour les ensembles hyperfinis $\{0, \dots, N-1\}$, N hyperentier, et leurs parties internes.

3 Le choix sur une famille hyperfinie

Considérons une famille $T = \{T_1, \dots, T_n\}$ où chaque T_i est un ensemble non vide de grains de B_{-kn_∞} , les T_i étant disjoints deux à deux.

Proposition 3 (Choix fini). *Si n est un entier standard, la famille T admet une fonction de choix. Ce résultat est un théorème de ZF : il ne requiert pas l'axiome du choix.*

Démonstration. Par récurrence sur n . Pour $n = 1$, l'énoncé « $T_1 \neq \emptyset$ » signifie qu'il existe $x_1 \in T_1$, et l'on pose $c(T_1) = x_1$. Si c est une fonction de choix sur $\{T_1, \dots, T_n\}$ et si $x_{n+1} \in T_{n+1}$, alors $c \cup \{(T_{n+1}, x_{n+1})\}$ est une fonction de choix sur $\{T_1, \dots, T_{n+1}\}$. $\square$

Corollaire 4 (Choix hyperfini). *Si n est un hyperentier et si la famille $(T_i)_{1 \leq i \leq n}$ est interne, elle admet une fonction de choix interne.*

Démonstration. C'est le transfert (hypothèse 2) de la proposition 3. $\square$

Remarque 5. La construction qui consiste à « extraire un élément et un seul de chaque structure dyadique » est donc correcte, mais elle établit un résultat qui ne dépend pas de l'axiome du choix. Celui-ci n'est nécessaire que pour des familles *infinies* au sens standard, dont les membres sont des parties arbitraires d'un ensemble qu'on ne sait pas bien ordonner.

4 Un choix canonique : le premier grain

Le corollaire 4 affirme l'existence d'une fonction de choix sans la décrire. Le grain permet de faire mieux : il fournit une fonction de choix explicite.

Lemme 6 (Bon ordre de la grille). *Toute partie interne non vide de B_{-kn_∞} possède un plus petit élément pour l'ordre lexical.*

Démonstration. Par l'identification $g_m \mapsto m$, il suffit de le montrer pour les parties internes non vides de $\{0, \dots, 2^{kn_\infty} - 1\}$. L'énoncé « toute partie non vide de $\{0, \dots, N - 1\}$ a un plus petit élément » est vrai pour tout entier N ; on conclut par l'hypothèse 2. $\square$

Remarque 7 (Nécessité de l'hypothèse interne). L'hypothèse « interne » ne peut pas être omise. L'ensemble $E = \{g_m \in B_{-kn_\infty} : m \text{ illimité}\}$ est non vide, puisqu'il contient le dernier grain, mais il n'a pas de plus petit élément : si m est illimité, $m - 1$ l'est aussi. L'ensemble E n'est pas défini au niveau de la grille : la notion d'« illimité » renvoie au standard, c'est-à-dire à ce que voit la promotion.

Théorème 8 (Fonction de choix canonique). *Soit $T = (T_i)_{i \in I}$ une famille interne d'ensembles non vides de grains de B_{-kn_∞} . L'application*

$$c(T_i) = \min T_i \quad (\text{premier grain de } T_i \text{ dans l'ordre lexical})$$

est une fonction de choix sur T . Si de plus les T_i sont disjoints deux à deux, l'ensemble $S = \{\min T_i : i \in I\}$ a un et un seul élément en commun avec chaque T_i .

Démonstration. Le minimum existe par le lemme 6, et $\min T_i \in T_i$. Si les T_i sont disjoints, $\min T_j \notin T_i$ pour $j \neq i$, donc $S \cap T_i = \{\min T_i\}$. $\square$

La fonction c ne dépend d'aucun choix arbitraire : elle est entièrement déterminée par la structure dyadique de la grille. C'est le mécanisme de Zermelo à l'envers. L'axiome du choix équivaut au théorème du bon ordre ; la grille étant bien ordonnée par construction, le choix y devient une simple lecture de cet ordre.

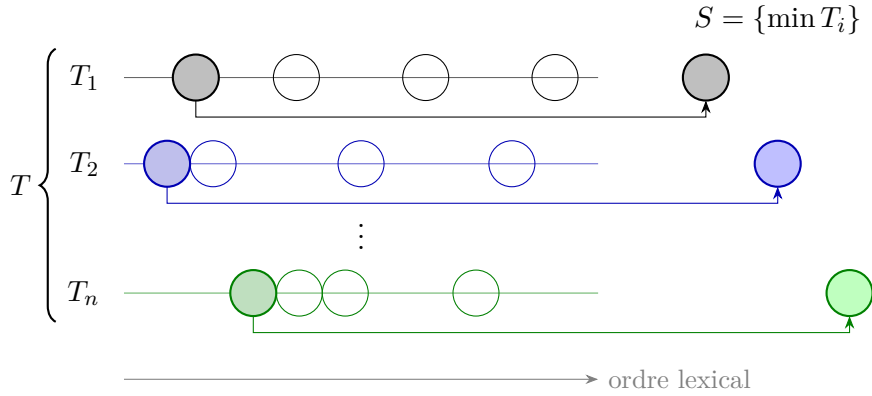


FIGURE 1 – Fonction de choix canonique : dans chaque T_i , on retient le premier grain dans l'ordre lexical (grain grisé). Aucun choix arbitraire n'intervient.

5 La promotion ne transporte pas le choix

La question naturelle est alors de savoir si la fonction de choix canonique passe au continu. Pour une partie standard $A \subset [0, 1]$, on considère son approximation par la grille.

Définition 9 (Approximation par la grille). Pour $A \subset [0, 1]$ standard et non vide, on pose

$$\mathcal{G}(A) = \{g \in B_{-kn_\infty} : g \cap {}^*A \neq \emptyset\},$$

où *A désigne l'extension non standard de A . C'est une partie interne non vide de B_{-kn_∞} .

Le procédé « choisir, puis promouvoir » associe alors à A le point

$$\sigma(A) = \text{st}(\min \mathcal{G}(A)).$$

Proposition 10 (Choisir puis promouvoir donne la borne inférieure). *Pour toute partie standard non vide $A \subset [0, 1[$,*

$$\sigma(A) = \inf A.$$

Démonstration. Posons $\alpha = \inf A$. Le grain g_{m_0} qui contient α rencontre *A : ou bien $\alpha \in A$, ou bien, par transfert de la définition de la borne inférieure, il existe un point de *A dans $[\alpha, \alpha + 2^{-kn_\infty}[$, et donc dans g_{m_0} ou dans le grain suivant. Aucun grain situé entièrement à gauche de α ne rencontre *A , puisque ${}^*A \subset [\alpha, 1[$. Le premier grain de $\mathcal{G}(A)$ est donc g_{m_0} ou g_{m_0+1} , dont l'extrémité gauche est infiniment proche de α . D'où $\text{st}(\min \mathcal{G}(A)) = \alpha$. $\square$

Exemple 11 (Échec pour un ouvert). Soit $A =]0, 1[$. Alors $\sigma(A) = \inf A = 0 \notin A$. Plus concrètement, le premier grain de $\mathcal{G}(A)$ est $g_0 = [0, 2^{-kn_\infty}[$, qui contient des points de *A , par exemple $2^{-kn_\infty-1}$. Mais sa promotion est 0, qui n'est pas dans A . La fonction σ n'est donc pas une fonction de choix sur les parties de $[0, 1[$.

Corollaire 12. *La fonction σ est une fonction de choix sur la famille des parties non vides de $[0, 1[$ fermées dans $[0, 1[$, et elle y coïncide avec $A \mapsto \min A$.*

Démonstration. Un fermé contient sa borne inférieure ; on conclut par la proposition 10. $\square$

Remarque 13 (Ce qui survit est déjà définissable). Le corollaire 12 montre que le choix canonique survit à la promotion exactement là où il n'apportait rien : la fonction $A \mapsto \min A$ sur les fermés est définissable dans ZF, sans axiome du choix. Là où le choix échoue (exemple 11), c'est que la promotion écrase l'ordre fin des grains : elle identifie le premier grain de $\mathcal{G}(A)$, qui est bien dans la grille, avec un point du continu qui n'est pas dans A .

Remarque 14 (Le cas de Vitali). L'axiome du choix intervient de façon essentielle dans la construction de l'ensemble de Vitali [5], qui retient un représentant dans chaque classe de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Ces classes sont denses : pour chacune, $\mathcal{G}(A)$ est la grille entière, et σ choisit 0 pour toutes. Le procédé canonique ne distingue donc pas les classes. Ce n'est pas un hasard : le continu n'est pas bien ordonnable de façon définissable dans ZF [6], et le grain ne peut pas fabriquer ce bon ordre. Il le déplace au niveau de la grille, où il ne survit pas à st .

6 Le choix sur les ouverts

L'échec de l'exemple 11 suggère une modification : choisir, dans la grille, le deuxième grain plutôt que le premier. Nous montrons que cette idée est juste avant promotion, qu'elle se formule canoniquement comme le choix du *premier grain intérieur*, mais qu'elle ne survit pas à la promotion. Pour franchir celle-ci, il faut choisir au niveau *le plus grossier*, et non au plus fin.

Dans cette section, le *représentant* d'un grain $g_m = [m 2^{-kn_\infty}, (m+1) 2^{-kn_\infty}[$ est son extrémité gauche $m 2^{-kn_\infty}$, qui appartient au grain.

6.1 Le deuxième grain

Exemple 15 (Le deuxième grain de $]0, 1[$). Soit $A =]0, 1[$. Le deuxième grain de $\mathcal{G}(A)$ est $g_1 = [2^{-kn_\infty}, 2 2^{-kn_\infty}[$, dont le représentant 2^{-kn_∞} appartient à *A . Avant promotion, ce choix fournit donc un représentant dans l'ensemble, ce que le premier grain ne faisait pas.

Il faut noter qu'avant promotion, on disposait déjà d'une fonction de choix *sur les grains* : g_0 rencontre *A , donc $\min \mathcal{G}(A) \in \mathcal{G}(A)$ (théorème 8). Ce que corrige le deuxième grain, c'est le choix du *point* représentant.

Remarque 16 (Une règle de rang fixe ne convient pas). La règle « prendre le deuxième grain de $\mathcal{G}(A)$ » n'est pas une fonction de choix en général.

1. Si $A = \{x\}$, $\mathcal{G}(A)$ n'a qu'un grain : il n'y a pas de deuxième élément.
2. Si $A = \{0\} \cup]1/2, 1[$, le premier grain de $\mathcal{G}(A)$ est g_0 , qui contient $0 \in A$. Les grains suivants ne rencontrent *A qu'au-delà de $1/2$; comme $1/2$ est une jonction de toutes les grilles, le deuxième grain est $[1/2, 1/2 + 2^{-kn_\infty}[$, dont le représentant $1/2$ n'appartient pas à A . Ici, c'est le premier grain qui convenait.

6.2 Le premier grain intérieur

Ce qui fait fonctionner l'exemple 15, c'est que g_1 est le premier grain *entièrement contenu* dans *A .

Définition 17 (Grains intérieurs). Pour $A \subset [0, 1[$ standard, on pose

$$\mathcal{G}^0(A) = \{g \in B_{-kn_\infty} : g \subset {}^*A\}.$$

C'est une partie interne de B_{-kn_∞} , contenue dans $\mathcal{G}(A)$.

Proposition 18 (Premier grain intérieur). *Si A est d'intérieur non vide, $\mathcal{G}^0(A)$ est non vide, et le représentant $c^0(A)$ de $\min \mathcal{G}^0(A)$ appartient à *A .*

Démonstration. L'intérieur de A contient un intervalle $]u, v[$ avec $u < v$ standard. Le grain qui contient $(u + v)/2$ a une épaisseur infinitésimale, donc il est contenu dans $]u, v[$, et $\mathcal{G}^0(A) \neq \emptyset$. Par le lemme 6, $\mathcal{G}^0(A)$ a un plus petit élément g . Le représentant de g appartient à g , donc à *A . $\square$

Pour $A =]0, 1[$, le grain g_0 contient $0 \notin {}^*A$, donc $\min \mathcal{G}^0(A) = g_1$: la règle du premier grain intérieur retrouve exactement le deuxième grain de l'exemple 15, mais elle vaut pour toute partie d'intérieur non vide.

6.3 La promotion efface encore le choix

Proposition 19. *Pour $A =]0, 1[$, tout grain g_m de rang m limité se promeut en $\text{st}(m 2^{-kn_\infty}) = 0 \notin A$. En particulier, $\text{st}(c^0(A)) = 0$.*

Démonstration. Si m est limité, $m 2^{-kn_\infty}$ est infinitésimal. $\square$

Le passage du premier au deuxième grain, ou à tout grain de rang limité, ne résiste donc pas à la promotion, pour la même raison que dans l'exemple 11 : la promotion écrase l'écart entre g_0 et g_1 .

6.4 Choisir au niveau le plus grossier

Pour franchir la promotion, il faut changer de sens : au lieu de descendre vers les grains les plus fins, on remonte vers les plus grossiers.

Définition 20 (Choix grossier). Pour $A \subset [0, 1[$ d'intérieur non vide, soit $N(A)$ le plus petit entier standard N tel qu'un grain de résolution $-N$ soit contenu dans A , et $\ell(A)$ le plus petit indice d'un tel grain. On pose

$$\sigma^0(A) = \ell(A) 2^{-N(A)}.$$

Théorème 21 (Choix grossier). *Pour toute partie $A \subset [0, 1[$ d'intérieur non vide, $\sigma^0(A)$ est bien défini, c'est un nombre dyadique standard, et $\sigma^0(A) \in A$. La fonction σ^0 est donc une fonction de choix sur les parties d'intérieur non vide de $[0, 1[$, invariante par promotion, et définissable dans ZF.*

Démonstration. L'intérieur de A contient $]u, v[$ avec $u < v$. Si $2^{-N+1} < v-u$, l'intervalle $]u, v[$ contient deux jonctions consécutives de résolution $-N$, donc un grain entier. L'ensemble des N possibles est une partie non vide de $\mathbb{N}$; il a un plus petit élément $N(A)$, et à ce niveau il n'y a qu'un nombre fini de grains, d'où $\ell(A)$. Le représentant $\ell(A) 2^{-N(A)}$ appartient au grain, donc à A . Il est standard, donc égal à sa promotion. Aucune étape n'utilise l'axiome du choix. $\square$

Exemple 22. Pour $A =]0, 1[$: au niveau 0, le seul grain $[0, 1[$ n'est pas contenu dans A ; au niveau -1 , le grain $[1/2, 1[$ l'est. Donc $\sigma^0(A) = 1/2$.

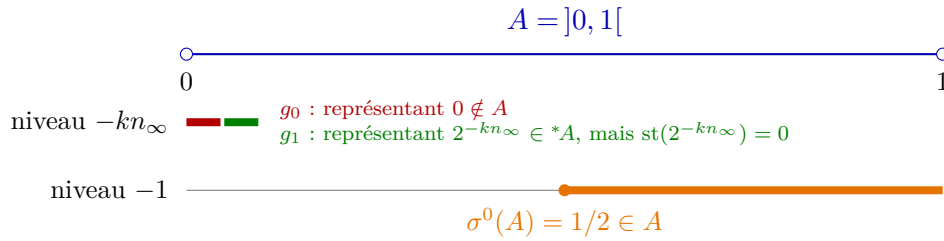


FIGURE 2 – Choisir au plus fin (grains g_0, g_1 , agrandis) ou au plus grossier. Seul le choix grossier donne un point standard de A .

Remarque 23. Le théorème 21 est une version « en grains » d'un procédé classique de ZF : choisir, dans un ouvert non vide, le premier rationnel d'une énumération fixée de $\mathbb{Q}$. Le choix sur les parties d'intérieur non vide n'a jamais requis l'axiome du choix.

6.5 La frontière : les ensembles d'intérieur vide

Proposition 24. *Si A est d'intérieur vide, alors $\mathcal{G}^0(A) = \emptyset$ à toutes les résolutions, standard ou hyperfinies. Ni le premier grain intérieur ni le choix grossier ne s'appliquent.*

Démonstration. « A est d'intérieur vide » s'écrit : pour tous $u < v$, $]u, v[\not\subset A$. Par transfert, *A ne contient aucun intervalle $]u, v[$ avec $u < v$ hyperréels, même d'épaisseur infinitésimale. Or chaque grain contient un tel intervalle. $\square$

Les classes de Vitali $x + \mathbb{Q}$ sont dénombrables, donc d'intérieur vide : c'est exactement là que les procédés canoniques de la grille cessent de s'appliquer. On obtient le bilan suivant.

Parties de $[0, 1[$	Choix canonique par les grains	Surviv à st
fermées	premier grain de $\mathcal{G}(A)$	oui (= $\min A$)
d'intérieur non vide	premier grain intérieur	non
d'intérieur non vide	premier grain au niveau le plus grossier	oui ($\in \mathbb{D}$)
d'intérieur vide, non fermées	aucun	—

Les cas où la grille permet un choix qui survit à la promotion sont exactement des cas définissables dans ZF. La frontière de l'axiome du choix passe par les ensembles d'intérieur vide, là où aucun grain ne tient entièrement dans l'ensemble.

7 Une question de fondements

Les constructions usuelles des modèles de l'analyse non standard, par ultrapuissance, utilisent le lemme de l'ultrafiltre, qui est une forme faible de l'axiome du choix [7]. La théorie des ensembles internes de Nelson [8] est conservative sur ZFC, c'est-à-dire qu'elle suppose l'axiome du choix. Un cadre non standard ne peut donc servir à *justifier* l'axiome du choix que s'il est lui-même bâti sans lui.

De tels cadres existent : Hrbacek et Katz [9] ont développé une analyse infinitésimale compatible avec l'absence de l'axiome du choix. Il conviendrait de préciser comment l'axiomatique du grain [1, chap. 2] introduit l'hyperentier n_∞ , afin de déterminer si la section 4 vaut dans ZF seul, ou seulement dans ZFC.

8 Conclusion

Le projet initial, « justifier l'axiome du choix par les grains », se reformule ainsi.

1. Sur une famille hyperfinie interne d'ensembles de grains, une fonction de choix existe sans l'axiome, par transfert du choix fini (cor. 4).
2. Cette fonction peut être rendue canonique : c'est le premier grain dans l'ordre lexical (th. 8). Le grain permet de choisir *sans arbitraire*.
3. La promotion détruit ce caractère canonique : choisir puis promouvoir donne la borne inférieure, qui n'appartient pas toujours à l'ensemble (prop. 10 et ex. 11).
4. Sur un ouvert, le premier grain intérieur (pour $]0, 1[$, le deuxième grain) fournit un représentant dans l'ensemble avant promotion, mais la promotion l'efface encore (prop. 19). Seul le choix au niveau le plus grossier survit (th. 21), et il est définissable dans ZF. L'axiome du choix n'est requis que pour des ensembles d'intérieur vide (prop. 24).

Ce résultat s'inscrit dans le même fil que l'étude du paradoxe de la réflexivité [2] : ce que la grille rend canonique, le bon ordre comme le comptage, est précisément ce que la promotion efface. L'axiome du choix apparaît alors comme le prix à payer, au niveau du continu, pour retrouver par un postulat l'ordre que la promotion a détruit.

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] E. Zermelo, « Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann », *Mathematische Annalen* 59 (1904), 514–516.
- [4] E. Zermelo, « Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung », *Mathematische Annalen* 65 (1908), 107–128.
- [5] G. Vitali, *Sul problema della misura dei gruppi di punti di una retta*, Bologne, 1905.
- [6] T. Jech, *The Axiom of Choice*, North-Holland, 1973.
- [7] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.
- [8] E. Nelson, « Internal set theory : a new approach to nonstandard analysis », *Bulletin of the American Mathematical Society* 83 (1977), 1165–1198.
- [9] K. Hrbacek, M. Katz, « Infinitesimal analysis without the axiom of choice », *Annals of Pure and Applied Logic* 172 (2021).