Mécanique quantique et programme du grain

Lecture stratale de la fonction d'onde et de la mesure

Hugues Genvrin

27 mai 2026

Préambule

L'émergence géométrique de i et de l'exponentielle complexe dans le programme du grain (cf. *De la métrique logarithmique à l'exponentielle complexe*) suggère un parallèle avec la mécanique quantique : si la nature complexe de la fonction d'onde n'est pas un axiome adjoint mais une conséquence d'une dualité stratale, alors la mécanique quantique pourrait trouver une fondation géométrique dans le programme.

Ce document explore ce parallèle. Il propose une lecture stratale de :

1. La fonction d'onde, comme objet du plan complexe stratal $\mathscr{P}_{\mathbb{C}}$ avec amplitude dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (axe réel) et phase sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.
2. Le caractère probabiliste, comme conséquence de la cardinalité stratale (pluralité des positions fines projetant sur une même position grossière).
3. La règle de Born $|\psi|^2$, comme conséquence du facteur 2 caractéristique de la transformation logarithmique entre strates.
4. La mesure quantique, comme projection stratale irréversible $\mathcal{G}_{-2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-n_\infty}$.

Statut épistémologique. Ce document propose un parallèle exploratoire, situé entre la suggestion conceptuelle et la reformulation géométrique. Il ne prétend pas démontrer la mécanique quantique classique : il propose une lecture stratale qui suggère que les structures mathématiques de cette dernière (espace complexe, règle de Born, projection irréversible) pourraient trouver une fondation naturelle dans le programme du grain.

Référence implicite. Programme du grain (Volumes I-III), *Métrique stratale* et *De la métrique logarithmique à l'exponentielle complexe.*

1 La fonction d'onde comme objet stratal

1.1 Rappel des correspondances stratales

On rappelle (cf. *De la métrique logarithmique à l'exponentielle complexe*, théorème des correspondances stratales) que le plan complexe stratal $\mathscr{P}_{\mathbb{C}}$ abrite trois objets géométriques distincts :

— **Axe réel** $\widetilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-2n_\infty}$: déploiement linéaire fin.
— **Axe imaginaire** $i\widetilde{\mathbb{R}} \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$: déploiement linéaire grossier.
— **Cercle unité** $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$: quotient circulaire.

Ces trois objets ont des rôles distincts dans la lecture stratale de la mécanique quantique.

1.2 Position du problème

En mécanique quantique standard, l'état d'un système est représenté par une fonction d'onde $\psi(x) \in \mathbb{C}$, où x parcourt l'espace des positions. Cette fonction d'onde admet la décomposition canonique :

$$\psi(x) = |\psi(x)| \cdot e^{i\theta(x)},$$

avec $|\psi(x)| \in \mathbb{R}^+$ (amplitude) et $\theta(x) \in [0, 2\pi[$ (phase). L'amplitude donne la probabilité par son carré, la phase est responsable des interférences.

Question. Dans le cadre du programme du grain, où doivent vivre ces deux composantes ?

1.3 Identification stratale

Définition 1 (Fonction d'onde stratale). *Une* fonction d'onde stratale *est une application*

$$\psi : \widetilde{\mathbb{R}}_*^+ \longrightarrow \mathscr{P}_{\mathbb{C}},$$

qui à chaque position physique x associe une valeur complexe stratale $\psi(x) = |\psi(x)| \cdot e^{i\theta(x)}$, où :

- *L'amplitude $|\psi(x)| \in \widetilde{\mathbb{R}}_*^+$ est une position dans la* strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ *(axe réel).*
- *La phase $e^{i\theta(x)} \in \mathbb{S}^1$ est un élément du* cercle unité*, en correspondance avec le quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (structure cyclique).*

1.4 Justification de cette identification

Proposition 1 (Cohérence interne). *L'identification de la* Définition 1 *est cohérente avec les structures du plan complexe stratal établies dans le document précédent.*

Démonstration. L'amplitude $|\psi|$, par nature non-négative, vit sur la demi-droite réelle $\widetilde{\mathbb{R}}^+ \subset \widetilde{\mathbb{R}}$, donc dans la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (axe réel).

La phase θ, par nature circulaire (équivalence modulo 2π), est représentée par l'élément $e^{i\theta}$ sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 \subset \mathscr{P}_{\mathbb{C}}$. Or par le théorème des correspondances stratales, le cercle unité correspond au quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.

Le caractère cyclique de la phase (θ et $\theta + 2\pi$ donnent la même physique) trouve donc sa fondation géométrique dans la structure quotient stratale : c'est précisément parce que les positions distantes d'un multiple de l'épaisseur fine sont identifiées dans le quotient que la phase est cyclique. □

Remarque 1 (Lecture intuitive). *L'amplitude « habite » la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, là où sont localisées les positions précises. Elle est sur l'axe réel du plan complexe.*

La phase, elle, ne vit pas sur l'axe imaginaire entier (qui serait $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, une droite stratale perpendiculaire complète), mais sur le cercle unité *du plan complexe — sous-ensemble du plan correspondant au quotient $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$.*

Cette distinction est essentielle : la phase quantique a une nature intrinsèquement cyclique, pas linéaire, et c'est cette nature qui se reflète dans l'identification au quotient stratal (et non à l'axe imaginaire entier).

La fonction d'onde combine ainsi deux niveaux stratals distincts : strate fine pour la localisation (amplitude), quotient cyclique pour la phase.

2 Le caractère probabiliste par cardinalité stratale

2.1 Le principe : pluralité des positions fines

Le programme du grain est intrinsèquement stratifié : pour chaque position x dans la strate grossière $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, il existe 2^{n_∞} positions fines distinctes dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ qui projettent sur cette même position grossière.

Principe 1 (Caractère probabiliste stratal). *Le caractère probabiliste de la mécanique quantique émerge de la* cardinalité stratale *: l'observation d'un système à la résolution grossière $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ correspond à l'agrégation de 2^{n_∞} états fins distincts dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$. La probabilité d'observer un résultat est proportionnelle au nombre d'états fins compatibles avec ce résultat grossier.*

2.2 Lien avec l'incertitude fondamentale

Remarque 2 (Perte d'information par projection). *La projection $\mathcal{G}_{-2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-n_\infty}$ n'est pas inversible sans perte d'information : à chaque position grossière correspond une multitude de positions fines indistinguables au niveau grossier. Cette perte d'information est l'analogue stratal de l'incertitude quantique fondamentale.*

L'observateur, situé au niveau grossier (c'est lui qui mesure, lui qui voit), ne peut accéder qu'aux positions agrégées. Les positions fines restent inaccessibles, et leur multiplicité produit le caractère probabiliste.

2.3 Lien avec la densité

Proposition 2 (Densité de positions fines). *Pour une position grossière $X \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$ donnée, le nombre de positions fines $x \in \mathcal{G}_{-2n_\infty}$ projetant sur X est constant et vaut 2^{n_∞}. Cette densité uniforme correspond à la mosaïque stratifiée homogène.*

Dans le cadre d'une fonction d'onde ψ, la distribution effective *sur $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ n'est pas uniforme mais pondérée par l'amplitude : les positions grossières où $|\psi|$ est grande correspondent à une concentration plus grande des positions fines compatibles avec l'état ψ.*

3 La règle de Born : émergence du facteur $|\psi|^2$

3.1 Le facteur 2 caractéristique

La règle de Born stipule que la densité de probabilité est $|\psi|^2$, pas $|\psi|$. Le carré est essentiel à la mécanique quantique. Voici sa lecture stratale.

Théorème 1 (Règle de Born stratale). *Si l'amplitude $|\psi|$ est une position dans la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$, alors la* densité de probabilité *effective* observée *à la strate grossière $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ se déduit par projection, et la relation entre les deux fait apparaître le carré $|\psi|^2$ comme conséquence du facteur 2 caractéristique de la transformation logarithmique entre strates adjacentes.*

Démonstration. On rappelle (Volume I) que la multiplication lexicale stratifie : pour $x \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$, le produit $x \cdot x = x^2$ vit dans $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (sortie de strate par multiplication).

Inversement, dans la coordonnée logarithmique, le passage entre strates adjacentes ($\mathcal{G}_{-n_\infty}$ et $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$) se fait par facteur 2 additif : $T(x^2) = 2T(x)$.

La règle de Born s'interprète alors comme suit. L'amplitude $|\psi|$, qui mesure la localisation de l'état dans la strate fine, doit produire une densité de probabilité *observable* par projection vers la strate grossière. Cette projection introduit le facteur 2 caractéristique entre strates, qui se manifeste comme *carré* dans la coordonnée linéaire (strate fine) et comme *facteur 2 additif* dans la coordonnée logarithmique (strate grossière).

Plus concrètement : la densité de probabilité observée à la strate grossière correspond à l'*aire* occupée par l'amplitude dans la strate fine, et l'aire d'une portion linéaire de longueur $|\psi|$ dans la mosaïque fine est précisément $|\psi|^2$ (carré).

Le facteur 2 caractéristique de la règle de Born est donc le *degré de stratification* : passage de $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ à $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ s'effectue par carré dans les positions, par facteur 2 dans les coordonnées logarithmiques. □

3.2 Lecture conceptuelle

Remarque 3 (Pourquoi le carré, pas une autre puissance). *Le carré $|\psi|^2$ n'est pas une convention arbitraire : c'est le degré de stratification qui sépare la strate de l'observateur (grossière) de la strate de la réalité physique (fine).*

Dans une hypothétique mécanique quantique où l'observateur serait deux strates au-dessus de la réalité, la règle de Born serait $|\psi|^4$. Dans une mécanique où l'observateur et la réalité seraient *dans la même strate (classique), il n'y aurait pas de règle de Born : $|\psi|$ donnerait directement la probabilité (ce qui correspond à la distribution de probabilité classique).*

Le carré est donc la signature d'un décalage d'une strate *entre observation et réalité. C'est la profondeur stratale propre à la mécanique quantique.*

3.3 Conservation de la probabilité

Corollaire 1 (Normalisation). *La conservation de la probabilité $\int |\psi(x)|^2 dx = 1$ s'interprète stratalement comme la conservation du flux entre la strate fine (amplitude) et la strate grossière (densité observée) : tout état accessible à l'observateur correspond à exactement 2^{n_∞} positions fines, et leur somme totale est conservée par la projection.*

4 La mesure comme projection stratale irréversible

4.1 Le mécanisme de la mesure

Principe 2 (Mesure stratale). *La* mesure quantique *est la projection stratale*

$$\pi : \mathcal{G}_{-2n_\infty} \longrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}$$

qui à chaque position fine associe sa position grossière correspondante.

Cette projection est irréversible *: connaître la position grossière ne permet pas de reconstituer la position fine (il y a 2^{n_∞} positions fines compatibles).*

Avant la mesure, le système est dans une superposition *: il occupe simultanément plusieurs positions fines, encodées par l'amplitude (strate fine) et la phase (cercle unité, quotient stratal) de la fonction d'onde.*

Après la mesure, le système est dans une position grossière déterminée : c'est le résultat observé*. La phase, qui vivait sur le cercle unité, est éliminée (la position cyclique est « gelée » par la mesure).*

4.2 Le caractère probabiliste de la mesure

Proposition 3 (Probabilité d'un résultat). *La probabilité d'obtenir un résultat de mesure $X \in \mathcal{G}_{-n_\infty}$ donné est proportionnelle au nombre de positions fines compatibles avec X* et *avec l'état préparé ψ.*

Pour une fonction d'onde ψ, cette probabilité est encodée par $|\psi(X)|^2$: l'amplitude carrée mesure la densité de positions fines compatibles à la fois avec X et avec l'état préparé.

4.3 L'effondrement de la fonction d'onde

Remarque 4 (Effondrement comme passage stratal). *L'« effondrement de la fonction d'onde » de la mécanique quantique correspond stratalement au passage* instantané et irréversible *de la strate fine vers la strate grossière au moment de la mesure.*

Avant la mesure, le système est décrit par une superposition complexe $\psi \in \mathscr{P}_\mathbb{C}$, qui combine amplitude (strate fine) et phase (cercle unité du quotient stratal).

Au moment de la mesure, la projection π réduit *le système à sa composante grossière : la position grossière est observée, et la phase (cyclique, vivant sur le cercle unité) est éliminée.*

C'est cette élimination de la phase qui rend la mesure irréversible : on perd la coordonnée cyclique, et on ne peut pas la reconstituer à partir de la seule position grossière. Géométriquement, on projette le cercle unité $\mathbb{S}^1$ sur un point (la phase est « écrasée »).

4.4 Pourquoi la mesure « réduit » la superposition

Remarque 5 (Lecture stratale)**.** *La superposition quantique avant mesure correspond, dans le langage du programme, à la* multiplicité *des positions fines de $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ compatibles avec un état préparé. Ce n'est pas une « indéterminée » au sens classique, c'est une* réalité plurielle *à la strate fine.*

L'observateur, situé à la strate grossière $\mathcal{G}_{-n_\infty}$, ne peut accéder à cette pluralité directement. La mesure projette cette pluralité fine sur une position grossière unique, et le résultat observé est *cette projection.*

Il n'y a pas d'« effondrement » physique au sens d'un changement objectif du système : il y a un passage d'échelle d'observation*, qui agrège la pluralité fine en un résultat grossier unique.*

5 Remarque exploratoire : l'évolution unitaire

Remarque 6 (Lien avec l'exponentielle complexe stratale)**.** *L'évolution temporelle d'un état quantique est gouvernée par l'équation de Schrödinger :*

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt/\hbar}|\psi(0)\rangle,$$

où H est l'opérateur hamiltonien et $\hbar$ la constante de Planck réduite.

Cette évolution est de la forme exponentielle complexe d'un opérateur autoadjoint*. Or l'exponentielle complexe $\mathrm{e}^{i\theta}$ émerge naturellement du programme du grain comme construction stratale (cf. document précédent).*

Conjecture exploratoire. *L'évolution unitaire $\mathrm{e}^{-iHt/\hbar}$ pourrait être interprétée comme une* rotation sur le cercle unité $\mathbb{S}^1$*, c'est-à-dire un déplacement dans le quotient stratal $\mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$. Le hamiltonien H jouerait le rôle du générateur de la rotation, et la constante $\hbar$ serait liée à l'invariant stratal $(2\pi)^2$.*

Cette piste demande une formalisation séparée, qui dépasse le cadre de ce document.

6 Remarque exploratoire : le principe d'indétermination

Remarque 7 (Lien avec l'invariant stratal)**.** *Le principe d'indétermination de Heisenberg stipule que le produit des incertitudes en position et en impulsion est borné inférieurement :*

$$\Delta X \cdot \Delta P \geq \hbar/2.$$

Or le programme du grain a fait apparaître un invariant produit dans le Volume II : $(2\pi)^2$ comme produit croisé fine $\times$ grossière des finesses élémentaires.

Conjecture exploratoire. *Si la position X vit dans la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ avec finesse $1/2^{n_\infty}$, et l'impulsion P (canoniquement conjuguée) vit dans la strate grossière $\mathcal{G}_{-n_\infty}$ avec finesse 2π, alors le produit $\Delta X \cdot \Delta P$ serait au moins l'invariant croisé $(2\pi)^2$ modulo un facteur lié à l'identification de $\hbar$.*

Le principe d'indétermination trouverait ainsi une fondation géométrique dans la dualité de résolution du programme. La constante de Planck $\hbar$ serait alors un invariant stratal *dérivable du procédé du grain.*

Cette piste, comme la précédente, demande une formalisation séparée.

7 Synthèse

— La *fonction d'onde stratale* $\psi(x) \in \mathscr{P}_{\mathbb{C}}$ admet la décomposition canonique avec amplitude dans la strate fine $\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (axe réel) et phase sur le cercle unité $\mathbb{S}^1 \leftrightarrow \mathcal{G}_{-n_\infty}/\mathcal{G}_{-2n_\infty}$ (quotient circulaire). Sa nature complexe est forcée par la dualité stratale du programme.

— Le *caractère probabiliste* émerge de la cardinalité stratale : 2^{n_∞} positions fines projettent sur chaque position grossière, et l'observateur grossier ne peut accéder qu'à la position projetée.
— La *règle de Born* $|\psi|^2$ se dérive du facteur 2 caractéristique de la transformation logarithmique entre strates adjacentes : la densité de probabilité observée à la strate grossière est le carré de l'amplitude dans la strate fine.
— La *mesure quantique* est la projection stratale irréversible $\mathcal{G}_{-2n_\infty} \to \mathcal{G}_{-n_\infty}$. L'effondrement de la fonction d'onde correspond à l'élimination de la phase (écrasement du cercle unité) lors de cette projection.
— *Évolution unitaire* et *principe d'indétermination* admettent des lectures stratales naturelles, consignées comme perspectives à approfondir.

Conclusion

Le parallèle entre la mécanique quantique et le programme du grain proposé ici est exploratoire. Il ne prétend pas démontrer la mécanique quantique à partir du programme, mais propose une lecture géométrique des structures fondamentales : nature complexe de la fonction d'onde, caractère probabiliste, règle de Born, mesure et effondrement.

Cette lecture présente plusieurs avantages conceptuels :
— Elle fournit une *fondation géométrique* à la nature complexe de la fonction d'onde, qui n'est plus un axiome adjoint mais une conséquence de la dualité stratale.
— Elle interprète le caractère probabiliste comme une *conséquence de l'échelle d'observation*, plutôt que comme une indéterminée fondamentale.
— Elle dérive la règle de Born $|\psi|^2$ d'une *propriété structurelle* du programme (facteur 2 de la stratification), plutôt que comme un postulat indépendant.
— Elle distingue clairement les rôles de la *strate fine* (amplitude, localisation) et du *quotient circulaire* (phase, interférences), reflétant la structure du plan complexe stratal.