

Réalité de la mesure et formalisation d'EPR

Le produit sur $\mathbb{R}$ de deux espaces complexes, le singulet et l'inégalité de Bell

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Nous reprenons deux textes antérieurs, *Le produit des réalités* et *Intrication de deux systèmes à deux niveaux*, pour donner une définition opératoire de la « réalité » associée à l'unité imaginaire $\imath$ et une formalisation fidèle de l'argument d'Einstein, Podolsky et Rosen. Sur le produit tensoriel réel $W = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}$, nous montrons que seul le produit $j = \imath_1 \imath_2$ des deux imaginaires est intrinsèque : le sens de $\imath$ d'un système seul n'est pas observable. Le secteur $W_{\neq}$, où $\imath_2 = -\imath_1$, est canoniquement l'espace des opérateurs, et l'échange des facteurs y découpe exactement les observables et les états physiques, sans phase globale : c'est ce que nous appelons la *réalité de la mesure*. Pour EPR, nous remplaçons l'hypothèse d'invariance par échange, qui sélectionnait l'état Ψ^+ au lieu du singulet, par l'anticorrélation parfaite selon deux directions incompatibles : le singulet Ψ^- en est l'unique solution, même parmi les états mélangés, et le facteur $1/\sqrt{2}$ en découle. Nous déroulons ensuite l'argument d'EPR et l'inégalité de Bell-CHSH. Une dernière section, explicitement interprétative, relie ces résultats au quart de tour de la théorie du grain.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Rappels : le produit sur $\mathbb{R}$	2
3	Ce qui est intrinsèque : j, et non $\imath$	2
4	La réalité de la mesure	3
4.1	Le secteur conjugué est l'espace des opérateurs	3
4.2	Définition opératoire	4
5	L'argument d'EPR	4
5.1	Une seule direction ne suffit pas	5
5.2	Le singulet, unique état doublement anticorrélé	5
5.3	Le critère de réalité et la conclusion d'EPR	5
6	L'inégalité de Bell-CHSH	6
7	Deux sens du mot « réalité »	6
8	Lecture dans la théorie du grain	6
9	Synthèse	7

1 Introduction

Le texte *Le produit des réalités* [1] établit que le produit tensoriel sur $\mathbb{R}$ de deux espaces complexes se scinde canoniquement en deux secteurs, l'un où les deux unités imaginaires coïncident, l'autre où elles sont conjuguées. Il propose d'appeler « réalité » le choix d'une unité imaginaire, et renvoie à plus tard une définition opératoire. Le texte *Intrication de deux systèmes à deux niveaux* [2] caractérise les états de Bell $\Psi^\pm$ par l'anticorrélation selon σ_z et l'invariance par échange.

Deux difficultés motivent la présente note.

1. Le sens de ι d'un système isolé n'est pas observable : changer ι en $-\iota$ partout ne modifie aucune probabilité (section 3). Une « réalité » attachée à ce choix doit donc porter sur une grandeur relative.
2. L'état d'EPR-Bohm est le singulet Ψ^- , antisymétrique. Or l'invariance stricte par échange retient Ψ^+ . De plus, une anticorrélation selon une seule direction est reproduite par un mélange classique sans intrication (section 5).

Nous montrons que les deux difficultés ont la même solution : l'échange des facteurs est la condition de réalité *de la mesure*, dans le secteur conjugué $W_\neq$, et non une condition sur les états d'EPR.

Les sections 2 à 6 sont des mathématiques et de la mécanique quantique standard. La section 8 propose une lecture dans la théorie du grain et n'est pas démontrée par ce qui précède.

2 Rappels : le produit sur $\mathbb{R}$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe de dimension finie n (en pratique $n = 2$). On note $W = \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{H}$, de dimension réelle $4n^2$, et

$$J_1 = \iota \otimes \text{id}, \quad J_2 = \text{id} \otimes \iota, \quad K = J_1 J_2,$$

où ι désigne la multiplication par i dans $\mathcal{H}$. On a $J_1^2 = J_2^2 = -\text{id}$, $J_1 J_2 = J_2 J_1$, donc $K^2 = \text{id}$. L'algèbre des nombres bicomplexes $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ agit sur W par $\iota_1 \mapsto J_1$, $\iota_2 \mapsto J_2$, $j = \iota_1 \iota_2 \mapsto K$.

Théorème 1 (Décomposition, [1], th. 1). Avec $P_+ = \frac{1}{2}(\text{id} - K)$ et $P_- = \frac{1}{2}(\text{id} + K)$,

$$W = W_+ \oplus W_-, \quad W_+ = \ker(K - \text{id}), \quad W_- = \ker(K + \text{id}).$$

Sur W_+ , $J_2 = J_1$; sur W_- , $J_2 = -J_1$. De plus $W_+ = \text{Im}(J_1 + J_2)$, $W_- = \text{Im}(J_1 - J_2)$, $W_+ \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ et $W_- \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \overline{\mathcal{H}}$.

Nous ajoutons l'échange des facteurs.

Lemme 2. L'échange $s(x \otimes y) = y \otimes x$ est une involution $\mathbb{R}$ -linéaire de W qui vérifie $sJ_1 = J_2s$. Elle commute avec K , donc préserve W_+ et W_- .

Démonstration. $sJ_1(x \otimes y) = s(\iota x \otimes y) = y \otimes \iota x = J_2s(x \otimes y)$. Donc $sK = sJ_1 J_2 = J_2 J_1 s = Ks$. $\square$

3 Ce qui est intrinsèque : j , et non ι

Définition 3 (Orientation de phase). Une *orientation de phase* sur un espace réel V est un endomorphisme J tel que $J^2 = -\text{id}$. Les orientations J et $-J$ sont dites *opposées*. Changer J en $-J$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ donne l'espace conjugué $\overline{\mathcal{H}}$, de produit scalaire $\langle x, y \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \overline{\langle x, y \rangle}$.

Nous employons « orientation de phase » plutôt que « réalité » pour le choix de ι , afin de réserver ce dernier mot à la section 4.

Proposition 4 (Le sens de ι d'un système seul n'est pas observable). *Les applications $\mathbb{R}$ -linéaires autoadjointes de $\mathcal{H}$ et de $\overline{\mathcal{H}}$ sont les mêmes. Pour tous vecteurs unitaires φ, ψ et toute observable A ,*

$$|\langle \varphi, \psi \rangle_{\overline{\mathcal{H}}}|^2 = |\langle \varphi, \psi \rangle_{\mathcal{H}}|^2, \quad \langle \psi, A\psi \rangle_{\overline{\mathcal{H}}} = \langle \psi, A\psi \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Les probabilités de Born et les valeurs moyennes ne dépendent pas de l'orientation de phase.

Démonstration. A commute avec J si et seulement s'il commute avec $-J$, et $\overline{\langle x, Ay \rangle} = \langle Ax, y \rangle$ équivaut à $\langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$. Un module est inchangé par conjugaison, et $\langle \psi, A\psi \rangle$ est réel. $\square$

C'est la forme élémentaire du théorème de Wigner : la conjugaison complexe est une symétrie (antiunitaire) de la théorie, liée au renversement du temps [13]. Sur le produit, l'effet est le suivant.

Proposition 5 (Seul j est intrinsèque). *1. Changer simultanément l'orientation des deux facteurs ($J_1 \mapsto -J_1, J_2 \mapsto -J_2$) laisse K , donc W_+, W_-, P_+, P_- , inchangés.*

2. Changer l'orientation d'un seul facteur change K en $-K$ et échange W_+ et W_- .

Démonstration. $(-J_1)(-J_2) = J_1J_2$ et $(-J_1)J_2 = -K$; $\ker(K \pm \text{id})$ devient $\ker(-K \pm \text{id}) = \ker(K \mp \text{id})$. $\square$

Le choix de ι_1 seul, ou de ι_2 seul, est donc conventionnel. Ce qui a un sens est leur *rapport* $j = \iota_1\iota_2 = \pm 1$: même sens ou sens opposés.

Remarque 6 (Quel secteur porte les états?). Si les deux systèmes sont décrits avec la même orientation, leurs évolutions $e^{-\iota H_1 t}$ et $e^{-\iota H_2 t}$ se composent en $e^{-\iota(H_1 \otimes \text{id} + \text{id} \otimes H_2)t}$, ce qui exige qu'un même ι agisse sur les deux facteurs : les états conjoints vivent dans $W_+ \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$. C'est le produit tensoriel usuel de la mécanique quantique. La question de savoir si la nature impose ce produit, plutôt qu'un produit réel, est aujourd'hui débattue [14, 15]; elle porte exactement sur la manière dont se composent les imaginaires de deux systèmes.

4 La réalité de la mesure

4.1 Le secteur conjugué est l'espace des opérateurs

Proposition 7. *L'application $\mathbb{R}$ -bilinéaire $(x, y) \mapsto |x\rangle\langle y|$ induit une application $\mathbb{R}$ -linéaire $\Phi: W \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ telle que*

1. $\Phi(J_1 w) = i \Phi(w)$ et $\Phi(J_2 w) = -i \Phi(w)$;
2. $\ker \Phi = W_+$, et Φ restreinte à W_- est un isomorphisme sur $\mathcal{L}(\mathcal{H})$;
3. $\Phi(s w) = \Phi(w)^\dagger$.

Démonstration. Point 1 : $|\iota x\rangle\langle y| = i|x\rangle\langle y|$ et $|x\rangle\langle \iota y| = -i|x\rangle\langle y|$, l'antilinearité du bra. Point 2 : par le point 1, $\Phi((J_1 + J_2)w) = 0$, donc $W_+ = \text{Im}(J_1 + J_2) \subset \ker \Phi$. Les opérateurs de rang 1 $|x\rangle\langle y|$ engendrent $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, donc Φ est surjective, et $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{L}(\mathcal{H}) = 2n^2 = \dim_{\mathbb{R}} W_-$. Ainsi $\ker \Phi = W_+$ exactement. Point 3 : $\Phi(y \otimes x) = |y\rangle\langle x| = (|x\rangle\langle y|)^\dagger$. $\square$

4.2 Définition opératoire

Définition 8 (Réalité de la mesure). On appelle *réalité de la mesure* le sous-espace réel

$$\mathfrak{R} = \{ w \in W_{\neq} : s(w) = w \}$$

des éléments du secteur conjugué invariants par échange. Pour un vecteur unitaire ψ , on pose

$$r_{\psi} = P_{\neq}(\psi \otimes \psi) = \frac{1}{2}(\psi \otimes \psi + \imath\psi \otimes \imath\psi) \in \mathfrak{R}.$$

Théorème 9 (La réalité de la mesure est l'espace des observables). *1. Φ envoie $\mathfrak{R}$ isomorphiquement sur $\text{Herm}(\mathcal{H})$, l'espace réel des opérateurs autoadjoints, de dimension n^2 .*

2. $\Phi(r_{\psi}) = |\psi\rangle\langle\psi|$.

3. $r_{e^{\imath\theta}\psi} = r_{\psi}$ pour tout θ : la réalité de la mesure ne voit pas la phase globale.

4. Règle de Born : $\text{Tr}(\Phi(r_{\varphi}) \Phi(r_{\psi})) = |\langle\varphi|\psi\rangle|^2$.

Démonstration. Point 1 : par la proposition 7, s préserve $W_{\neq}$ (lemme 2) et correspond à $A \mapsto A^{\dagger}$; ses points fixes correspondent aux $A = A^{\dagger}$, qui forment un espace réel de dimension n^2 . Point 2 : $\psi \otimes \psi$ est invariant par s , s commute avec $P_{\neq}$, et $\Phi(\psi \otimes \psi) = |\psi\rangle\langle\psi|$; comme $\Phi \circ P_{=} = 0$, $\Phi(r_{\psi}) = \Phi(\psi \otimes \psi)$. Point 3 : sur $W_{\neq}$, $J_2 = -J_1$, donc $(e^{\imath\theta}\psi) \otimes (e^{\imath\theta}\psi)$ s'écrit $e^{\theta J_1} e^{\theta J_2} (\psi \otimes \psi) = e^{\theta J_1} e^{-\theta J_1} (\psi \otimes \psi) = \psi \otimes \psi$ après projection par $P_{\neq}$. Point 4 : $\text{Tr}(|\varphi\rangle\langle\varphi| |\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\varphi|\psi\rangle\langle\psi|\varphi\rangle$. $\square$

Remarque 10 (Le contraste avec $W_{=}$). Dans $W_{=}$, le même calcul donne $P_{=}(e^{\imath\theta}\psi \otimes (e^{\imath\theta}\psi)) = e^{2\theta J_1} P_{=}(\psi \otimes \psi)$: les phases *s'ajoutent*. Dans $W_{\neq}$, elles se *compensent*. Pour $\theta = \pi/2$: $\imath\psi \otimes \imath\psi$ vaut $-\psi \otimes \psi$ dans $W_{=}$ ($j = -1$) et $+\psi \otimes \psi$ dans $W_{\neq}$ ($j = +1$).

Remarque 11 (Où l'échange est une condition de réalité). Dans $W_{=} \simeq \mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$, les points fixes de s sont les états *symétriques* (de type bosonique), comme Ψ^{+} ; le singulet Ψ^{-} vérifie $s\Psi^{-} = -\Psi^{-}$. Dans $W_{\neq}$, les points fixes de s sont les observables. L'hypothèse d'invariance par échange de [2] appartient donc naturellement au secteur de la mesure : elle exprime que ce qui est mesuré est réel, $A = A^{\dagger}$. Appliquée aux états, elle exclut précisément l'état d'EPR.

	$W_{=}$	$W_{\neq}$
$j = \imath_1 \imath_2$	-1	+1
imaginaires	$\imath_2 = \imath_1$	$\imath_2 = -\imath_1$
isomorphe à	$\mathcal{H} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}$ (états conjoints)	$\mathcal{L}(\mathcal{H})$ (opérateurs)
points fixes de l'échange	états symétriques	observables, $\mathfrak{R}$
phase $e^{\imath\theta}$ sur les deux facteurs	$e^{2\imath\theta}$	1

TABLE 1 – Les deux secteurs du produit sur $\mathbb{R}$.

5 L'argument d'EPR

On prend $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, de base $(|0\rangle, |1\rangle)$, deux systèmes A et B , et les observables de Pauli σ_z, σ_x . On écrit $\Psi^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle)$.

5.1 Une seule direction ne suffit pas

Proposition 12 (Anticorrélation classique). *L'état mélangé séparable $\rho_{\text{cl}} = \frac{1}{2}(|01\rangle\langle 01| + |10\rangle\langle 10|)$ vérifie $\text{Tr}(\rho_{\text{cl}} \sigma_z \otimes \sigma_z) = -1$, est invariant par échange, et donne $\text{Tr}(\rho_{\text{cl}} \sigma_x \otimes \sigma_x) = 0$.*

Démonstration. $|01\rangle$ et $|10\rangle$ sont propres de $\sigma_z \otimes \sigma_z$ pour -1 , et l'échange les permute. $\sigma_x \otimes \sigma_x$ envoie $|01\rangle$ sur $|10\rangle$, donc $\langle 01 | \sigma_x \otimes \sigma_x | 01 \rangle = 0$, de même pour $|10\rangle$. $\square$

Une paire de boules, l'une blanche et l'autre noire, distribuées au hasard, est parfaitement anticorrélée « selon z ». L'argument d'EPR exige davantage : la prédiction certaine de *deux* grandeurs incompatibles.

5.2 Le singulet, unique état doublement anticorrélé

Théorème 13 (Caractérisation du singulet). *Un état ρ de $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ (opérateur densité, pur ou mélangé) vérifie*

$$\text{Tr}(\rho \sigma_z \otimes \sigma_z) = -1 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\rho \sigma_x \otimes \sigma_x) = -1$$

si et seulement si $\rho = |\Psi^-\rangle\langle \Psi^-|$.

Démonstration. Une observable O de valeurs propres ± 1 vérifie $\text{Tr}(\rho O) = -1$ si et seulement si ρ est porté par l'espace propre $E_-(O)$: en effet $\text{Tr}(\rho O) = 1 - 2\text{Tr}(\rho P_-)$, avec P_- le projecteur sur $E_-(O)$, et $\text{Tr}(\rho P_-) = 1$ si et seulement si $\rho = P_- \rho P_-$. Ici $E_-(\sigma_z \otimes \sigma_z) = \text{Vect}(|01\rangle, |10\rangle)$. Sur ce plan, $\sigma_x \otimes \sigma_x$ échange $|01\rangle$ et $|10\rangle$; son espace propre pour -1 y est la droite $\mathbb{C} \Psi^-$. Donc ρ est porté par $E_-(\sigma_z \otimes \sigma_z) \cap E_-(\sigma_x \otimes \sigma_x) = \mathbb{C} \Psi^-$, et $\rho = |\Psi^-\rangle\langle \Psi^-|$. La réciproque se vérifie directement. $\square$

Corollaire 14 (Origine du facteur $1/\sqrt{2}$). *En écrivant $\Psi^- = \alpha|01\rangle + \beta|10\rangle$, la seconde condition impose $\beta = -\alpha$ et la normalisation $2|\alpha|^2 = 1$. Le facteur $1/\sqrt{2}$ résulte de l'anticorrélation selon deux directions incompatibles et de la normalisation, sans hypothèse de symétrie. L'état réduit de chaque système est alors $\frac{1}{2}\text{id}$: l'intrication est maximale.*

Proposition 15 (Invariance par rotation). *Pour tous vecteurs unitaires $a, b \in \mathbb{R}^3$, avec $\sigma_a = a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z$,*

$$E(a, b) := \langle \Psi^- | \sigma_a \otimes \sigma_b | \Psi^- \rangle = -a \cdot b = -\cos \theta_{ab}.$$

En particulier l'anticorrélation est parfaite selon toute direction.

Démonstration. On vérifie sur la base que $(\sigma_a \otimes \text{id})|\Psi^-\rangle = -(\text{id} \otimes \sigma_a)|\Psi^-\rangle$. Donc $E(a, b) = -\langle \Psi^- | \text{id} \otimes \sigma_a \sigma_b | \Psi^- \rangle = -\text{Tr}(\frac{1}{2}\text{id} \sigma_a \sigma_b) = -a \cdot b$, puisque l'état réduit est $\frac{1}{2}\text{id}$ et $\text{Tr}(\sigma_a \sigma_b) = 2a \cdot b$. $\square$

5.3 Le critère de réalité et la conclusion d'EPR

Définition 16 (Élément de réalité, EPR 1935 [6]). « Si, sans perturber en aucune façon un système, on peut prédire avec certitude la valeur d'une grandeur physique, alors il existe un élément de réalité physique correspondant à cette grandeur. »

Proposition 17 (Deux éléments de réalité incompatibles). *Dans l'état Ψ^- , mesurer σ_z sur A permet de prédire avec certitude σ_z sur B (valeur opposée), et mesurer σ_x sur A permet de prédire avec certitude σ_x sur B . Si l'on admet la localité (la mesure sur A ne perturbe pas B), le critère attribue à B des éléments de réalité pour σ_z et pour σ_x . Or aucun état quantique de B ne donne une valeur certaine aux deux, puisque $[\sigma_z, \sigma_x] \neq 0$.*

Démonstration. Par le théorème 13, le résultat sur A selon σ_z (resp. σ_x) fixe le résultat opposé sur B avec probabilité 1. Un vecteur propre commun à σ_z et σ_x n'existe pas. $\square$

EPR en concluent que la description quantique est incomplète. Bohm a donné cette version à spin de l'argument [7], initialement formulé avec position et impulsion.

6 L'inégalité de Bell–CHSH

Supposons, comme EPR, que chaque paire porte des valeurs préexistantes, fixées localement par une variable cachée $\lambda : A(a, \lambda), B(b, \lambda) \in \{\pm 1\}$, chacune ne dépendant que du réglage local.

Théorème 18 (CHSH [8, 9]). *Sous ces hypothèses, pour tous réglages a, a', b, b' ,*

$$S = E(a, b) + E(a, b') + E(a', b) - E(a', b'), \quad |S| \leq 2.$$

Démonstration. Pour chaque λ , avec $A = A(a, \lambda)$, $A' = A(a', \lambda)$, etc., $A(B + B') + A'(B - B') = \pm 2$, car l'un des deux termes $B \pm B'$ est nul et l'autre vaut ± 2 . On moyenne sur λ . $\square$

Proposition 19 (La mécanique quantique viole l'inégalité). *Dans l'état Ψ^- , avec a, a', b, b' dans le plan (x, z) aux angles $0, \pi/2, \pi/4, -\pi/4$,*

$$S = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}, \quad |S| = 2\sqrt{2} > 2.$$

Démonstration. Par la proposition 15, $E = -\cos \theta$, avec $\theta_{ab} = \theta_{ab'} = \theta_{a'b} = \pi/4$ et $\theta_{a'b'} = 3\pi/4$, donc $E(a', b') = +\sqrt{2}/2$. $\square$

La valeur $2\sqrt{2}$ est le maximum quantique (borne de Tsirelson [10]). Les expériences confirment la violation [11, 12] : les deux prémisses d'EPR, le critère de réalité pris comme valeurs préexistantes et la localité, ne peuvent être conservées ensemble.

7 Deux sens du mot « réalité »

Les sections précédentes séparent deux notions qu'il est utile de ne pas confondre.

1. L'*élément de réalité* d'EPR est une valeur préexistante, attachée à chaque grandeur avant la mesure. Avec la localité, il conduit à $|S| \leq 2$, que l'expérience réfute.
2. La *réalité de la mesure* (définition 8) est l'élément invariant par échange du secteur conjugué : observables et états sans phase globale. Elle ne postule aucune valeur préexistante ; elle fournit les statistiques, qui sont réelles et vérifient la règle de Born (théorème 9).

Dans ce vocabulaire, le résultat de Bell dit que la mécanique quantique possède une réalité de la mesure, mais pas d'éléments de réalité locaux au sens d'EPR.

8 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle n'est pas démontrée par les sections précédentes.

Dans *Plan complexe et grain nul* [3], l'unité imaginaire est le quart de tour normé $\hat{i}$, et le demi-tour admet deux racines carrées : le quart de tour, et l'aller-retour en résolution. Le tableau 1 se lit alors ainsi.

- *Secteur W_+ , $j = -1$.* Deux quarts de tour de même sens se composent en un *demi-tour*. Les phases s'ajoutent : c'est le secteur des états conjoints, où vit l'intrication.
- *Secteur W_- , $j = +1$.* Un quart de tour suivi de son inverse est un *aller-retour*, qui rend l'identité. Les phases se compensent : c'est le secteur de la mesure. La règle de Born, $\psi\bar{\psi} = |\psi|^2$, est la trace de cet aller-retour, comme dans les lectures de Cramer [16] et d'Aharonov–Bergmann–Lebowitz [17], où une onde « retour » conjuguée rejoint l'onde « aller ».
- *Phase globale.* Le point 3 du théorème 9 dit que la réalité de la mesure ne voit pas le quart de tour global. Cela correspond à la restauration à la promotion décrite dans *Mouvement de rotation intrinsèque* [4] : les quatre états de la grille sont distincts, mais la mesure ne les distingue pas.

Remarque 20 (Questions ouvertes). 1. Le singulet est l'unique état de spin total nul : la somme de ses composantes selon toute direction s'annule en moyenne. Existe-t-il un lien précis avec la croix orientée de [3], dont l'orbite sous $\hat{i}$ a une somme exactement nulle ? À ce stade, c'est une analogie, non un résultat.

2. Dans une lecture à deux résolutions, les deux facteurs du produit pourraient porter des grains différents (δ_f et δ_g). Le secteur de la mesure réalise-t-il alors le passage du grossier au fin décrit dans *Du monde du grain au monde expérimental* [5] ?

9 Synthèse

Ce qui est démontré.

- Le sens de $\imath$ d'un système seul n'est pas observable ; seul le rapport $j = \imath_1\imath_2$ des deux imaginaires est intrinsèque (propositions 4 et 5).
- Le secteur conjugué W_- est canoniquement l'espace des opérateurs ; l'échange y découpe les observables. Cette *réalité de la mesure* contient les états sans phase globale et porte la règle de Born (théorème 9).
- L'invariance par échange est une condition de réalité de la mesure, et non une condition sur l'état d'EPR, qu'elle exclut (remarque 11).
- Le singulet est l'unique état, même mélangé, parfaitement anticorrélé selon z et selon x ; le facteur $1/\sqrt{2}$ en découle (théorème 13).
- L'argument d'EPR et l'inégalité de Bell–CHSH se formalisent directement à partir de là : $|S| \leq 2$ pour des valeurs locales préexistantes, $2\sqrt{2}$ pour le singulet.

Ce qui est proposé. La lecture de $j = -1$ comme demi-tour et de $j = +1$ comme aller-retour, et le lien entre la réalité de la mesure et la promotion, restent à développer dans la théorie du grain.

Références

- [1] H. Genvrin, *Le produit des réalités. Version reformulée sur $\mathbb{R}$* , manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Intrication de deux systèmes à deux niveaux et origine du facteur $1/\sqrt{2}$* , manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *Plan complexe et grain nul*, manuscrit, 2026.
- [4] H. Genvrin, *Mouvement de rotation intrinsèque*, manuscrit, 2026.
- [5] H. Genvrin, *Du monde du grain au monde expérimental*, manuscrit, 2026.
- [6] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, « Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ? », *Phys. Rev.* 47 (1935), p. 777–780.

- [7] D. Bohm, *Quantum Theory*, Prentice-Hall, 1951, chap. 22.
- [8] J. S. Bell, « On the Einstein Podolsky Rosen paradox », *Physics* 1 (1964), p. 195–200.
- [9] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, R. A. Holt, « Proposed experiment to test local hidden-variable theories », *Phys. Rev. Lett.* 23 (1969), p. 880–884.
- [10] B. S. Cirel'son, « Quantum generalizations of Bell's inequality », *Lett. Math. Phys.* 4 (1980), p. 93–100.
- [11] A. Aspect, J. Dalibard, G. Roger, « Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers », *Phys. Rev. Lett.* 49 (1982), p. 1804–1807.
- [12] B. Hensen et al., « Loophole-free Bell inequality violation using electron spins separated by 1.3 kilometres », *Nature* 526 (2015), p. 682–686.
- [13] E. P. Wigner, *Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra*, Academic Press, 1959, chap. 20 et 26.
- [14] M.-O. Renou et al., « Quantum theory based on real numbers can be experimentally falsified », *Nature* 600 (2021), p. 625–629.
- [15] T. Hoffreumon, M. P. Woods, « Quantum theory based on real numbers cannot be experimentally falsified », arXiv :2603.19208, 2026.
- [16] J. G. Cramer, « The transactional interpretation of quantum mechanics », *Rev. Mod. Phys.* 58 (1986), p. 647–687.
- [17] Y. Aharonov, P. G. Bergmann, J. L. Lebowitz, « Time symmetry in the quantum process of measurement », *Phys. Rev.* 134 (1964), p. B1410–B1416.