Le grain des racines

Pousser les formules de Viète jusqu'au bout : partie propre, partie partielle et unité imaginaire

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On écrit un trinôme à l'aide de la somme Σ et du produit Π de ses racines, et l'on pose $\alpha = \Sigma/2$. Les racines sont alors $\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Pi}$, et tout se joue dans la comparaison du produit Π avec le carré α^2. Ce carré est le plus grand produit que puissent avoir deux réels de somme Σ : les racines sont complexes exactement lorsque le produit demandé dépasse ce maximum, et la partie imaginaire mesure l'excédent. Le produit s'écrit $\Pi = \alpha^2 - \delta^2$ pour des racines réelles et $\Pi = \alpha^2 + \beta^2$ pour des racines complexes : une relation hyperbolique dans le premier cas, circulaire dans le second. On en tire une notion analogue à celle des instants et des moments : le *grain des racines*, segment qui joint les deux racines, de centre α. Il est couché sur l'axe réel lorsque les racines sont réelles, réduit à son centre pour une racine double, et redressé d'un quart de tour lorsqu'elles sont complexes. Dans le plan à deux résolutions de la théorie du grain, la partie propre α est un grain grossier qui se raffine sur l'axe réel, la partie partielle β se compte en grains grossiers sur l'axe imaginaire, et l'unité imaginaire est le grain grossier atteint par le quart de tour, image du grain fin par la similitude $\omega = 2^{\nu} i$. On précise ce que cette lecture doit à la rotation, et ce qui en disparaît à la promotion. Un modèle de pêche, variante du problème de Dirac, donne un exemple où l'unité imaginaire correspond à un changement d'unité réel, des pêcheurs individués au poids du stock : la partie partielle des racines y est l'aller-retour de deux conversions de signes opposés, et décrit des cycles observables. On montre enfin que la forme de Viète a aussi un intérêt calculatoire : elle économise une multiplication, se prête au calcul de la marge en une seule opération fusionnée, et conduit, en utilisant le produit pour obtenir la seconde racine, à l'algorithme qui évite la perte de chiffres.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels **3**
- 2.1 Grilles et grains . . . 3
- 2.2 Partie propre et partie partielle . . . 3
- 2.3 Le plan à deux résolutions . . . 3
- 2.4 Rotation et symétrie . . . 3

3 Le trinôme écrit par la somme et le produit **4**

4 Le produit maximal **4**

5 Lecture hyperbolique et lecture circulaire **5**

6 Le grain des racines **6**
- 6.1 Définition et trois états . . . 6
- 6.2 Continuité et conjugaison . . . 6

7 Le grain des racines dans le plan à deux résolutions **7**
7.1 Deux principes de lecture 7
7.2 L'unité imaginaire, grain grossier atteint par le quart de tour 7
7.3 La cellule d'une racine 8
7.4 La lecture cartésienne : une ellipse 8

8 Trois précautions **9**

9 L'analogie avec les instants et les moments **10**

10 Les pêcheurs de Dirac devenus flotte **11**
10.1 Le modèle 11
10.2 Le carré du passage ramène à l'individu 11
10.3 Le sens réel des racines complexes 12
10.4 La flotte amortie 12

11 Intérêt calculatoire **14**
11.1 Le décompte des opérations 14
11.2 La perte de chiffres 15
11.3 Pousser Viète jusqu'au bout : l'algorithme stable 15
11.4 La marge en une seule opération 16
11.5 Les valeurs propres d'une matrice 2×2 16

1 Introduction

Les formules de Viète relient les coefficients d'un trinôme à la somme et au produit de ses racines. On les emploie d'ordinaire comme un outil de calcul. On propose ici de les pousser jusqu'au bout, en écrivant le trinôme *uniquement* à l'aide de la somme et du produit, et de lire dans cette écriture la signification des racines complexes.

Le but est d'aboutir à une notion analogue à celle que la théorie du grain a donnée au temps [11]. Le temps n'y est pas fait d'instants, mais de *moments*, grains de durée non nulle ; un instant est ce qui reste d'un moment quand on le promeut. De même, on montrera que les deux racines d'un trinôme forment un grain, le *grain des racines*, dont la racine double est la forme réduite à un point, et dont les racines complexes sont la forme redressée.

La section 2 rappelle les éléments de la théorie du grain dont on aura besoin. La section 3 écrit le trinôme par la somme et le produit. La section 4 établit l'inégalité du produit maximal, qui est le cœur de l'argument. La section 5 sépare les lectures hyperbolique et circulaire. La section 6 définit le grain des racines et décrit ses trois états. La section 7 le lit dans le plan à deux résolutions, où l'unité imaginaire devient le grain grossier atteint par le quart de tour. La section 8 énonce trois précautions, la section 9 établit l'analogie avec les instants et les moments, la section 10 donne un exemple concret où l'unité imaginaire correspond à un changement d'unité réel, et la section 11 examine l'intérêt calculatoire de la forme de Viète.

Statut. Les sections 3 à 6 sont de l'algèbre élémentaire, entièrement démontrée. La section 7 est démontrée dans le cadre de la théorie du grain rappelé à la section 2. Les principes de lecture y sont signalés comme tels.

2 Rappels

2.1 Grilles et grains

On se place dans un modèle non standard de l'arithmétique de Peano, et l'on note $\nu = \#\mathbb{N}$ la numérosité des entiers : un entier illimité, dont on n'utilise que l'ordre et les changements de niveau.

Définition 1 (Grilles, grains, mesure inférieure)**.** La grille de niveau m est $\mathbb{G}_m = \{k\,2^{-m}\}$. Le grain de niveau m porté par un réel x est

$$g_m(x) = [x,\ x + 2^{-m}[,$$

et x en est la *mesure inférieure* : $m_{\inf}(g_m(x)) = x$.

Proposition 2 (Raffinement)**.** *Le grain $g_\nu(x)$ est la réunion disjointe des 2^ν grains de niveau 2ν*

$$g_{2\nu}(x + k\,2^{-2\nu}), \qquad 0 \le k < 2^\nu,$$

et le premier d'entre eux, $g_{2\nu}(x)$, a la même mesure inférieure x.

Démonstration. $[x, x + 2^{-\nu}[$ se découpe en 2^ν intervalles consécutifs de longueur $2^{-2\nu}$, puisque $2^\nu \cdot 2^{-2\nu} = 2^{-\nu}$. □

Un grain de niveau ν est donc un *grain grossier*, qui se raffine en 2^ν grains fins de niveau 2ν sans changer de mesure inférieure. Tous ces grains sont d'épaisseur infinitésimale : la promotion st les ramène tous à leur mesure inférieure, quand celle-ci est standard.

2.2 Partie propre et partie partielle

Une partie d'un ensemble peut être regardée de deux façons [10] : comme *partie partielle*, incluse dans le tout au grain de base, ou comme *partie propre*, renumérotée comme un tout. Dans le plan complexe de la théorie du grain [14], l'axe réel porte la partie propre, qui sert de norme, et l'axe imaginaire porte la partie partielle, rapportée à un autre tout. On reprend ce vocabulaire : pour une racine $\alpha + i\beta$, α est la *partie propre* et β la *partie partielle*.

2.3 Le plan à deux résolutions

Définition 3 (Plan à deux résolutions [12])**.** Le plan à deux résolutions est

$$\Gamma = 2^{-2\nu}\mathbb{Z} + i\,2^{-\nu}\mathbb{Z}.$$

Son axe réel est au niveau fin 2ν, son axe imaginaire au niveau grossier ν.

Proposition 4 (La similitude ω [12, 13])**.** *La similitude $\omega = 2^\nu i$ envoie la grille fine de l'axe réel sur la grille grossière de l'axe imaginaire :*

$$\omega(2^{-2\nu}\mathbb{Z}) = i\,2^{-\nu}\mathbb{Z}, \qquad \textit{en particulier} \qquad \omega(2^{-2\nu}) = i\,2^{-\nu}.$$

Elle se compose d'un quart de tour et d'une homothétie de rapport 2^ν, et $\omega^2 = -2^{2\nu}$.

Démonstration. $2^\nu i \cdot k\,2^{-2\nu} = i\,k\,2^{-\nu}$, et $(2^\nu i)^2 = 2^{2\nu} i^2 = -2^{2\nu}$. □

2.4 Rotation et symétrie

Dans l'étude du plan complexe [14], l'unité imaginaire est un opérateur J qui fait passer d'un axe à l'autre, et l'on a $J^2 = -I$ parce que ce passage est une *rotation*. Si on le remplaçait par une *symétrie*, on obtiendrait $j^2 = +I$, et donc les nombres hyperboliques. On retrouvera cette alternative à la section 5.

3 Le trinôme écrit par la somme et le produit

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$, de racines x_1 et x_2 dans $\mathbb{C}$. Les formules de Viète donnent

$$\Sigma = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad \Pi = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Proposition 5 (Forme de Viète)**.** *On pose $\alpha = \Sigma/2$, la moyenne des racines. Alors*

$$\frac{1}{a}\,P(x) = x^2 - \Sigma x + \Pi = (x-\alpha)^2 - (\alpha^2 - \Pi),$$

et les racines sont

$$x = \frac{\Sigma}{2} \pm \sqrt{\frac{\Sigma^2}{4} - \Pi} = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Pi}.$$

Le discriminant s'écrit $b^2 - 4ac = 4a^2(\alpha^2 - \Pi)$.

Démonstration. $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 - \Sigma x + \Pi$, et $(x-\alpha)^2 = x^2 - \Sigma x + \alpha^2$. Pour le discriminant, $b^2 - 4ac = a^2(\Sigma^2 - 4\Pi) = 4a^2(\alpha^2 - \Pi)$. □

On appelle *marge* du trinôme la quantité $D = \alpha^2 - \Pi$. Le signe de D décide de tout.

Corollaire 6 (Trichotomie)**.** *(i) Si $\Pi < \alpha^2$, les racines sont réelles et distinctes : $\alpha \pm \delta$, avec $\delta = \sqrt{\alpha^2 - \Pi} > 0$.*

(ii) Si $\Pi = \alpha^2$, il y a une racine double : α.

(iii) Si $\Pi > \alpha^2$, les racines sont complexes conjuguées : $\alpha \pm i\beta$, avec $\beta = \sqrt{\Pi - \alpha^2} > 0$.

Dans les trois cas, la partie propre *des racines est leur moyenne $\alpha = \Sigma/2$.*

Exemple 7. Avec $\Sigma = 4$, donc $\alpha = 2$:

Trinôme	Produit Π	Marge $D = 4 - \Pi$	Racines
$x^2 - 4x + 3$	3	1	1 et 3
$x^2 - 4x + 4$	4	0	2 (double)
$x^2 - 4x + 5$	5	-1	$2 \pm i$

4 Le produit maximal

Proposition 8 (Produit maximal)**.** *Pour deux réels u et v de somme Σ,*

$$uv = \alpha^2 - \Big(\frac{u-v}{2}\Big)^2 \leq \alpha^2,$$

avec égalité si et seulement si $u = v = \alpha$.

Démonstration. $\big(\frac{u+v}{2}\big)^2 - \big(\frac{u-v}{2}\big)^2 = uv$, et $\frac{u+v}{2} = \alpha$. □

C'est l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique, sous sa forme la plus simple. Elle a une lecture géométrique immédiate : parmi les rectangles de demi-périmètre Σ, c'est le carré de côté α qui a la plus grande aire.

Corollaire 9 (Sens de la partie imaginaire)**.** *Les racines sont complexes si et seulement si le produit demandé Π dépasse le plus grand produit α^2 que puissent avoir deux réels de somme Σ. La partie partielle mesure l'excédent :*

$$\beta^2 = \Pi - \alpha^2.$$

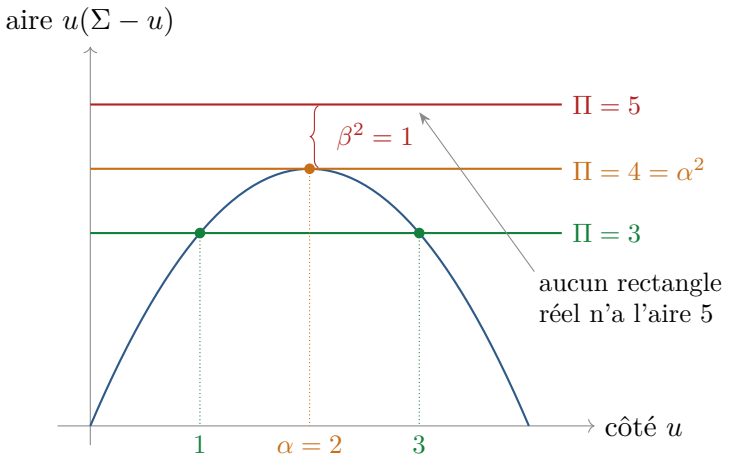


FIGURE 1 – Le produit maximal, pour $\Sigma = 4$. L'aire d'un rectangle de demi-périmètre Σ et de côté u est $u(\Sigma - u)$; elle est maximale pour le carré, de côté $\alpha = 2$ et d'aire $\alpha^2 = 4$. Les racines du trinôme $x^2 - \Sigma x + \Pi$ sont les côtés u pour lesquels l'aire vaut Π. Pour $\Pi = 3$, on obtient 1 et 3 ; pour $\Pi = 4$, le carré ; pour $\Pi = 5$, aucun côté réel ne convient, et l'excédent $\beta^2 = \Pi - \alpha^2 = 1$ donne la partie partielle $\beta = 1$ des racines $2 \pm i$.

Démonstration. Par la proposition 8, deux réels de somme Σ et de produit Π n'existent que si $\Pi \leq \alpha^2$. Le reste est le corollaire 6(iii). □

La figure 1 montre la situation. Les racines réelles sont les côtés des rectangles qui réalisent le produit demandé. Quand le produit demandé dépasse ce qu'un rectangle réel peut donner, la partie propre α reste celle du carré, et la partie partielle mesure ce qui manque au carré pour atteindre le produit.

5 Lecture hyperbolique et lecture circulaire

Proposition 10 (Deux relations)**.** *(i) Pour des racines réelles $\alpha \pm \delta$, $\Pi = \alpha^2 - \delta^2$: relation hyperbolique.*

(ii) Pour des racines complexes $\alpha \pm i\beta$, $\Pi = \alpha^2 + \beta^2 = |\alpha + i\beta|^2$: relation circulaire. Les racines sont sur le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{\Pi}$, et $\sqrt{\Pi}$ est l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés $|\alpha|$ et β.

Démonstration. (i) $(\alpha + \delta)(\alpha - \delta) = \alpha^2 - \delta^2$. (ii) $(\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 - i^2\beta^2 = \alpha^2 + \beta^2$. □

La différence entre les deux cas est donc celle du signe de i^2. Dans les nombres hyperboliques $\alpha + j\delta$, où $j^2 = +1$, le produit du nombre et de son conjugué vaut $(\alpha + j\delta)(\alpha - j\delta) = \alpha^2 - \delta^2$: c'est la relation (i). Dans les nombres complexes, où $i^2 = -1$, c'est la relation (ii). Le trinôme a donc toujours la même structure, un centre α et une « norme » Π ; ce qui change est la nature, hyperbolique ou circulaire, de la relation qui les lie.

La figure 2 fixe le produit et fait varier la moyenne. Elle montre que le passage du réel au complexe n'est pas une rupture : la demi-étendue décroît le long de l'hyperbole, s'annule à la racine double, puis repart le long du cercle. Ce qui change, c'est la direction dans laquelle elle se porte.

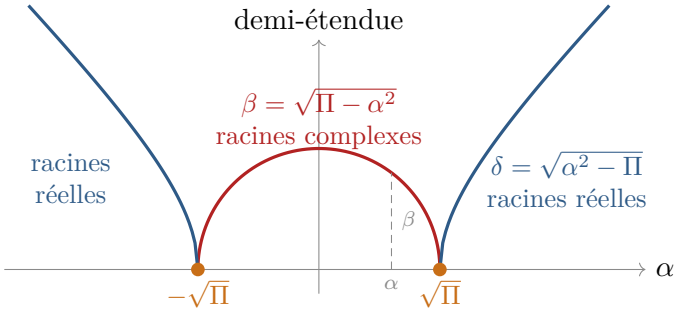


FIGURE 2 – À produit Π fixé, la demi-étendue du grain des racines en fonction de la partie propre α. Pour $|\alpha| > \sqrt{\Pi}$, elle est réelle et suit l'hyperbole $\alpha^2 - \delta^2 = \Pi$ (bleu). Pour $|\alpha| < \sqrt{\Pi}$, elle est imaginaire et suit le cercle $\alpha^2 + \beta^2 = \Pi$ (rouge). Les deux courbes se rejoignent aux racines doubles $\alpha = \pm\sqrt{\Pi}$ (orange).

6 Le grain des racines

6.1 Définition et trois états

Définition 11 (Grain des racines)**.** Le *grain des racines* d'un trinôme est le segment du plan complexe qui joint ses deux racines. Son *centre* est la partie propre $\alpha = \Sigma/2$, et sa *demi-étendue* est la distance de chaque racine au centre, $\sqrt{|\alpha^2 - \Pi|}$.

Proposition 12 (Les trois états du grain)**.** *(i) Si $\Pi < \alpha^2$, le grain est* couché *: c'est le segment $[\alpha - \delta, \alpha + \delta]$ de l'axe réel, et les deux racines en sont les extrémités.*

(ii) Si $\Pi = \alpha^2$, le grain est réduit à son centre *: la racine double α.*

(iii) Si $\Pi > \alpha^2$, le grain est debout *: c'est le segment vertical d'extrémités $\alpha - i\beta$ et $\alpha + i\beta$. Il est l'image du grain couché de même centre et de demi-étendue β par le quart de tour de centre α.*

Démonstration. (i) et (ii) découlent du corollaire 6. (iii) Le quart de tour de centre α est $z \mapsto \alpha + i(z - \alpha)$; il envoie $\alpha \pm \beta$ sur $\alpha \pm i\beta$. □

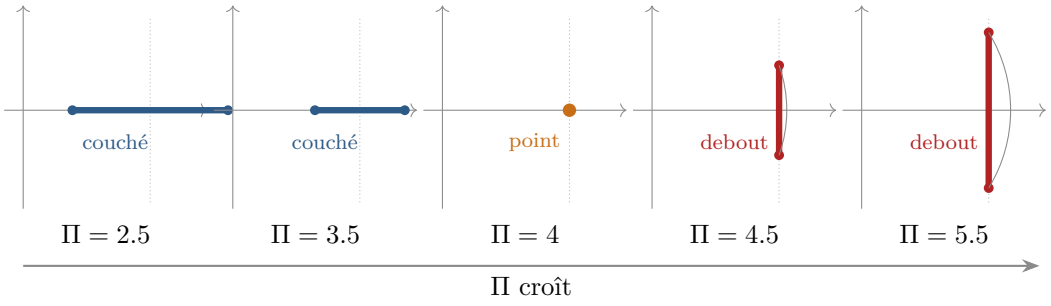


FIGURE 3 – Le grain des racines à somme fixée ($\Sigma = 4$, centre $\alpha = 2$, en pointillés), quand le produit Π croît. D'abord couché sur l'axe réel, le grain se raccourcit, se réduit à son centre pour $\Pi = \alpha^2 = 4$, puis se redresse et s'allonge. Les extrémités du grain debout sont sur le cercle de rayon $\sqrt{\Pi}$ (arc gris).

6.2 Continuité et conjugaison

Proposition 13 (Continuité de l'étendue)**.** *À somme fixée, la demi-étendue $\sqrt{|\alpha^2 - \Pi|}$ est une fonction continue de Π, qui décroît de $+\infty$ à 0 quand Π croît de $-\infty$ à α^2, puis croît de 0 à*

$+\infty$. *Seule la direction du grain change de façon discontinue, d'un quart de tour, au passage de la racine double.*

Démonstration. La fonction $\Pi \mapsto \sqrt{|\alpha^2 - \Pi|}$ est continue sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $]-\infty, \alpha^2]$ et croissante sur $[\alpha^2, +\infty[$. La direction est horizontale pour $\Pi < \alpha^2$ et verticale pour $\Pi > \alpha^2$. □

Proposition 14 (Conjugaison)**.** *La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ laisse fixe le grain couché point par point, et échange les deux extrémités du grain debout : c'est la symétrie du grain debout par rapport à son centre, dans la direction imaginaire.*

Démonstration. La conjugaison fixe les réels, et envoie $\alpha + i\beta$ sur $\alpha - i\beta$. □

La conjugaison des racines est ainsi l'expression d'une symétrie des parties partielles : elle ne touche pas la partie propre, et renverse la partie partielle. Les relations de Viète expliquent pourquoi le plan réel ne peut pas distinguer les deux racines conjuguées : dans la somme 2α, les parties partielles se compensent ; dans le produit $\alpha^2 + \beta^2$, elles n'apparaissent que par leur carré.

7 Le grain des racines dans le plan à deux résolutions

Dans le plan complexe ordinaire, α et β sont deux réels de même nature, mesurés dans la même unité. Dans le plan à deux résolutions Γ, les deux axes n'ont pas le même grain, et les deux parties de la racine ne se lisent pas de la même façon.

7.1 Deux principes de lecture

Principe 15 (La partie propre est un grain grossier raffinable)**.** La partie propre α est désignée au niveau grossier, comme mesure inférieure de son grain $g_\nu(\alpha)$, puis précisée au niveau fin, comme mesure inférieure du premier des 2^ν grains fins qui composent $g_\nu(\alpha)$ (proposition 2). Elle s'exprime ainsi dans les deux unités de l'axe réel, le grain grossier $2^{-\nu}$ et le grain fin $2^{-2\nu}$.

Principe 16 (La partie partielle se compte en grains grossiers)**.** La partie partielle β se lit sur l'axe imaginaire de Γ, dont le grain est le grain grossier $2^{-\nu}$: le point $i\beta$ est la mesure inférieure du grain imaginaire $i\, g_\nu(\beta)$.

Le principe 15 reprend la lecture des réels établie pour $\frac{1}{3}$ dans le grain construit [9] : un réel est désigné au niveau ν comme mesure inférieure de son grain, et c'est le niveau 2ν qui permet de le calculer. Le principe 16 exprime que l'axe imaginaire de Γ ne possède que le grain grossier.

7.2 L'unité imaginaire, grain grossier atteint par le quart de tour

Proposition 17 (L'unité imaginaire du plan à deux résolutions)**.** *Le grain grossier $i\,2^{-\nu}$ de l'axe imaginaire est l'image du grain fin $2^{-2\nu}$ de l'axe réel par la similitude $\omega = 2^\nu i$, c'est-à-dire par le quart de tour composé avec le passage du niveau fin au niveau grossier. Appliquée deux fois, cette opération renverse le sens : $\omega^2 = -2^{2\nu}$.*

Démonstration. C'est la proposition 4. □

L'unité imaginaire se lit donc de deux façons à la fois :

— comme une *unité* : c'est le grain grossier, celui dans lequel se compte la partie partielle ;

— comme une *opération* : c'est le quart de tour qui fait passer du grain fin de l'axe réel à ce grain grossier.

Les deux lectures sont nécessaires. Une unité qui ne serait pas atteinte par une rotation n'aurait pas de raison de vérifier $i^2 = -1$; c'est le cas d'une unité physique quelconque, comme le kilogramme. Une rotation qui ne changerait pas de niveau resterait le quart de tour ordinaire, sans lien avec le grain.

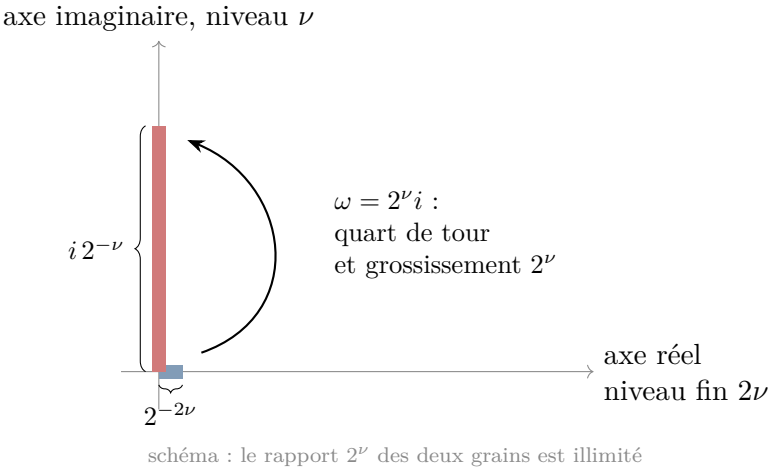


FIGURE 4 – L'unité imaginaire dans le plan à deux résolutions (schéma). La similitude ω fait tourner le grain fin de l'axe réel d'un quart de tour et le grossit d'un facteur 2^ν : elle le transforme en grain grossier de l'axe imaginaire.

7.3 La cellule d'une racine

Proposition 18 (Cellule d'une racine)**.** *Soit $\alpha + i\beta$ une racine à parties standard. Selon les principes 15 et 16, elle est la mesure inférieure, au sens du coin inférieur gauche, de la cellule*

$$C(\alpha + i\beta) = g_{2\nu}(\alpha) \times i\, g_\nu(\beta),$$

rectangle de largeur $2^{-2\nu}$ et de hauteur $2^{-\nu}$. La racine conjuguée désigne la cellule $g_{2\nu}(\alpha) \times i\, g_\nu(-\beta)$. Les deux cellules ont la même projection $g_{2\nu}(\alpha)$ sur l'axe réel, et se promeuvent en les racines standard $\alpha \pm i\beta$.

Démonstration. Les grains $g_{2\nu}(\alpha)$ et $g_\nu(\beta)$ ont pour mesures inférieures α et β, d'où le coin de la cellule. Leurs épaisseurs $2^{-2\nu}$ et $2^{-\nu}$ sont infinitésimales ; tout point de la cellule est donc infiniment proche de $\alpha + i\beta$, et sa partie standard est $\alpha + i\beta$. De même pour la racine conjuguée. □

7.4 La lecture cartésienne : une ellipse

Si l'on veut dessiner le grain grossier avec la longueur que lui donne le grain fin, il faut multiplier les ordonnées par le rapport des deux grains. Pour un rapport standard $a > 1$, la racine $\alpha + i\beta$ se place au point $(\alpha,\ a\beta)$.

Proposition 19 (Ellipse des racines)**.** *Pour un rapport standard $a > 1$, les racines complexes d'un trinôme de produit Π, placées aux points $(\alpha, \pm a\beta)$, sont sur l'ellipse*

$$x^2 + \frac{y^2}{a^2} = \Pi,$$

qui est l'orbite, dans le plan cartésien, de l'opérateur $J(x, y) = (-\frac{y}{a},\ ax)$, vérifiant $J^2 = -I$.

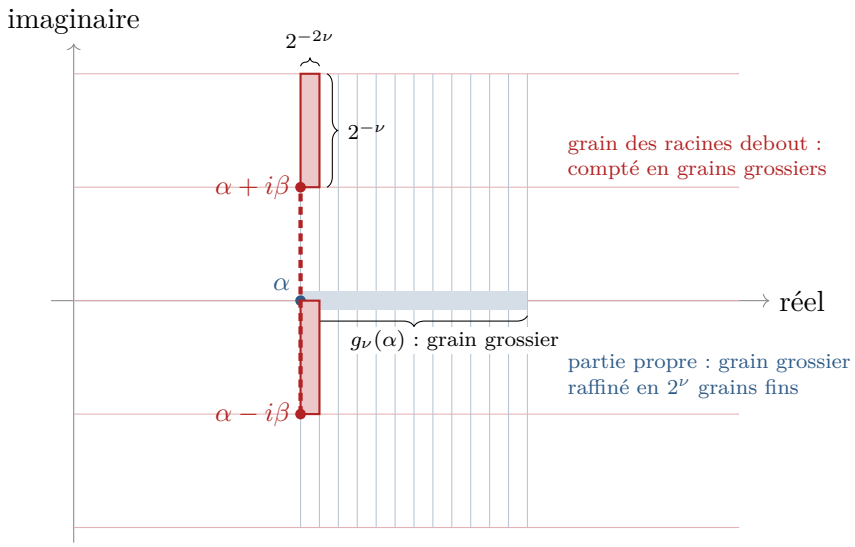


FIGURE 5 – La cellule d'une racine dans le plan à deux résolutions (schéma, les grains infinitésimaux étant très agrandis et leur rapport réduit). La partie propre α est la mesure inférieure de son grain grossier $g_\nu(\alpha)$, qui se raffine en grains fins (traits bleus). La racine $\alpha + i\beta$ est le coin de sa cellule, fine en largeur et grossière en hauteur ; la racine conjuguée désigne la cellule symétrique. Le grain des racines debout (tirets) se compte en grains grossiers.

Démonstration. $\alpha^2 + (a\beta)^2/a^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \Pi$ par la proposition 10. J conserve $x^2 + y^2/a^2$, puisque $(y/a)^2 + (ax)^2/a^2 = y^2/a^2 + x^2$, et $J^2(x, y) = J(-\frac{y}{a}, ax) = (-x, -y)$. □

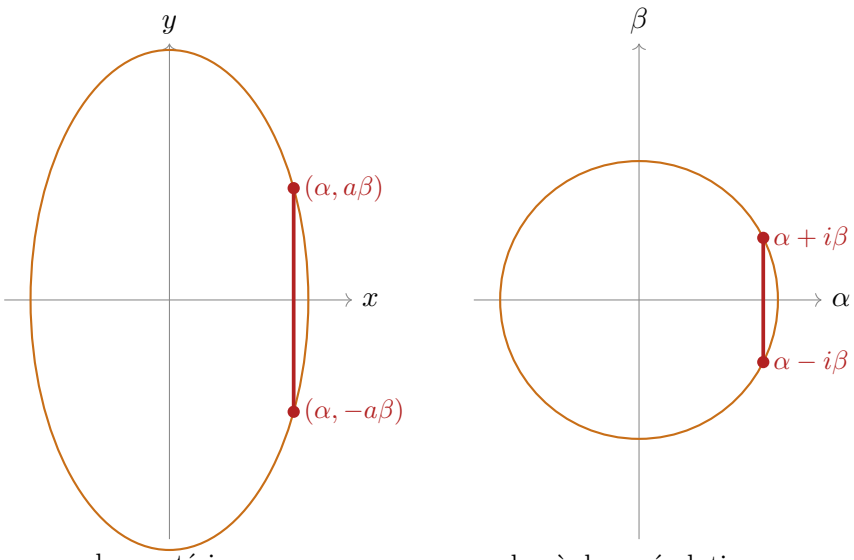
Pour $a = 2^\nu$, l'ellipse est infiniment allongée : l'ordonnée $2^\nu\beta$ est illimitée. C'est pourquoi le plan à deux résolutions garde des coordonnées standard et porte la différence sur les grains plutôt que sur les longueurs.

8 Trois précautions

1. Le rapport des grains ne vient pas du trinôme. Les racines $\alpha \pm i\beta$ et la relation $i^2 = -1$ ne dépendent pas du rapport a entre grain grossier et grain fin. Le choix $a = 2^\nu$ est celui du niveau de lecture, non une propriété de l'équation. La lecture à deux résolutions est donc une lecture des racines, compatible avec l'algèbre, et non une conséquence de celle-ci.

2. L'asymétrie de précision est un fait de lecture. Dans Γ, la partie propre est connue au grain fin et la partie partielle au grain grossier. L'écart entre la racine et le coin de sa cellule est inférieur à $2^{-\nu}$, donc infinitésimal, et disparaît à la promotion (proposition 18). Les racines standard sont les mêmes que dans le plan complexe ordinaire.

3. Le signe vient de la rotation. Si l'on faisait passer du grain fin au grain grossier par une symétrie plutôt que par un quart de tour, on obtiendrait $j^2 = +1$, c'est-à-dire les nombres hyperboliques. Or un trinôme réel de marge négative n'a aucune racine hyperbolique : l'algèbre $\mathbb{R}[j]$ se décompose en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par les idempotents $\frac{1 \pm j}{2}$, et une racine y serait un couple de racines réelles. Le grain debout n'existe que parce que le passage d'un axe à l'autre est une rotation.



plan cartésien :
ellipse $x^2 + y^2/a^2 = \Pi$

plan à deux résolutions :
cercle $\alpha^2 + \beta^2 = \Pi$, grains différents

FIGURE 6 – Deux façons de dessiner les racines $2 \pm i$ de $x^2 - 4x + 5$ (schéma, à l'échelle réduite). À gauche, le grain grossier est dessiné avec sa longueur en grains fins (a standard) : les racines sont sur une ellipse. À droite, chaque axe garde sa propre unité : les racines sont sur le cercle de rayon $\sqrt{\Pi}$, et la différence entre les axes est portée par l'épaisseur des grains.

9 L'analogie avec les instants et les moments

Dans l'étude du temps [11], un moment est un grain de durée non nulle ; il se divise en moments plus fins ; un instant est la promotion d'une famille de moments emboîtés. Le grain des racines se prête à une analogie de même forme.

Le temps	Les racines d'un trinôme
moment : grain de durée non nulle	grain des racines : segment de demi-étendue $\sqrt{\lvert\alpha^2 - \Pi\rvert}$
centre d'un moment	partie propre $\alpha = \Sigma/2$
instant : moment réduit à un point	racine double : grain réduit à son centre
extrémités d'un moment (jonctions)	racines réelles : extrémités du grain couché
—	racines complexes : extrémités du grain debout
division d'un moment en moments plus fins	raffinement de la partie propre, du grain grossier au grain fin
promotion : st ramène le moment à l'instant	promotion : st ramène la cellule à la racine

La ligne vide du tableau marque ce que les racines ajoutent au temps. Un moment ne peut que se raccourcir jusqu'à l'instant ; le grain des racines, lui, peut aller au-delà : une fois réduit à son centre, il se redresse. C'est ce redressement, et lui seul, que mesure la partie imaginaire.

On peut résumer la notion ainsi :

> *Une racine double est un instant. Deux racines forment un grain, de centre la partie propre : couché si elles sont réelles, debout si elles sont complexes. La partie propre est un grain grossier qui se raffine ; la partie partielle se compte en grains grossiers ; et l'unité imaginaire est le grain grossier atteint par le quart de tour.*

10 Les pêcheurs de Dirac devenus flotte

On cherche un problème concret où l'unité imaginaire corresponde à un changement d'unité réel, des poissons individués vers leur équivalent en poids, et où le carré de ce passage ramène à l'unité individuée. Le problème des pêcheurs attribué à Dirac ne convient pas : son équation est du premier degré, et sa solution étrange, -2, est un nombre négatif, non imaginaire. Il lui manque deux choses : un *carré*, c'est-à-dire deux passages successifs d'une unité à l'autre, et un *retour renversé*, sans lequel on obtiendrait $+1$ et non -1. La variante qui suit les fournit toutes deux.

10.1 Le modèle

On suit, de saison en saison, deux grandeurs mesurées dans deux unités différentes :

— S_t, l'écart du stock de poissons à son équilibre, en tonnes : c'est le *poids*, la lecture grossière ;

— F_t, l'écart du nombre de pêcheurs à son équilibre : ce sont des *individus*.

Définition 20 (Flotte de Dirac)**.**

$$S_{t+1} = S_t - h\,F_t, \qquad F_{t+1} = F_t + g\,S_t,$$

où $h > 0$ est la pêche d'un pêcheur par saison (tonnes par pêcheur), et $g > 0$ le nombre de pêcheurs attirés par tonne de stock en excès (pêcheurs par tonne). Le passage d'une saison à la suivante est $X_{t+1} = MX_t$, avec $X = (S, F)$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ g & 1 \end{pmatrix}.$$

Les deux coefficients sont deux conversions d'unité de signes opposés : g convertit des tonnes en individus, avec le signe $+$ (un stock abondant attire des pêcheurs) ; h convertit des individus en tonnes, avec le signe $-$ (les pêcheurs retirent du stock).

Proposition 21 (Le trinôme de la flotte)**.** *Le trinôme caractéristique de M est*

$$\lambda^2 - 2\lambda + (1 + hg), \qquad \Sigma = 2, \quad \alpha = 1, \quad \Pi = 1 + hg.$$

Le produit dépasse le carré maximal $\alpha^2 = 1$: les racines sont complexes,

$$\lambda = 1 \pm i\sqrt{hg},$$

et la partie partielle vérifie $\beta^2 = \Pi - \alpha^2 = hg$.

Démonstration. $\det(\lambda I - M) = (\lambda - 1)^2 + hg$. Le reste est le corollaire 6. □

10.2 Le carré du passage ramène à l'individu

Proposition 22 (L'aller-retour des conversions)**.** *Soit $N = M - I = \begin{pmatrix} 0 & -h \\ g & 0 \end{pmatrix}$, la partie de M qui fait passer d'une unité à l'autre. Alors*

$$N^2 = -hg\,I, \qquad N = \sqrt{hg}\;J_a, \quad J_a = \begin{pmatrix} 0 & -1/a \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \sqrt{g/h}, \quad J_a^2 = -I.$$

Démonstration. $N^2(S, F) = N(-hF,\, gS) = (-hgS,\, -hgF)$. Par ailleurs $\sqrt{hg}/a = \sqrt{hg}\sqrt{h/g} = h$ et $\sqrt{hg}\,a = \sqrt{hg}\sqrt{g/h} = g$, et $J_a^2 = -I$ comme pour l'opérateur de réflexivité. □

C'est la forme exacte de l'idée selon laquelle « le carré de l'unité de poids renvoie à l'unité individuée ».

— Un premier passage convertit des tonnes en individus (facteur g) ; un second reconvertit ces individus en tonnes (facteur $-h$). Deux passages ramènent donc sur l'axe de départ, *renversé* et multiplié par hg.

— Le produit hg a pour unité (tonnes par pêcheur) $\times$ (pêcheurs par tonne) : il est sans dimension. Le « carré de l'unité » n'est pas une unité de mesure, mais la composition de deux conversions.

— La partie partielle des racines est exactement cet aller-retour : $\beta^2 = hg$. L'excédent du produit sur le carré maximal est le produit des deux conversions.

— Le rapport $a = \sqrt{g/h}$ est le taux de conversion entre les deux unités, comme le rapport des grains dans le plan à deux résolutions ; mesurer la flotte en unités a transforme J_a en quart de tour ordinaire.

Proposition 23 (Le signe vient de la pêche)**.** *Si les pêcheurs ajoutaient au stock au lieu de le prélever, soit $S_{t+1} = S_t + hF_t$, on aurait $N^2 = +hg\,I$, et les racines $1 \pm \sqrt{hg}$ seraient réelles : deux modes qui croissent ou décroissent chacun de son côté, sans cycle. C'est le cas hyperbolique $j^2 = +1$.*

Démonstration. $N = \begin{pmatrix} 0 & h \\ g & 0 \end{pmatrix}$ vérifie $N^2 = hg\,I$, et $\det(\lambda I - M) = (\lambda - 1)^2 - hg$. □

10.3 Le sens réel des racines complexes

Écrivons $\lambda = \rho\, e^{\pm i\theta}$, avec $\rho = \sqrt{\Pi} = \sqrt{1 + hg}$ et $\tan\theta = \sqrt{hg}$.

— **La partie propre** $\alpha = 1$ dit que, d'une saison à l'autre, chaque écart se reconduit lui-même.

— **La partie partielle** $\beta = \sqrt{hg}$ fait tourner l'état d'environ θ radian par saison : le stock et la flotte s'échangent leur écart. Un excès de stock attire des pêcheurs ; l'excès de pêcheurs vide le stock ; le manque de stock fait partir des pêcheurs ; le manque de pêcheurs laisse le stock se reconstituer. La période du cycle est $2\pi/\theta$ saisons.

— **Deux moments à la fois.** Aucune combinaison réelle du stock et de la flotte ne se reconduit seule : la propagation porte sur deux saisons successives, comme pour les équations différentielles à racines complexes [14].

Exemple 24. Avec $h = 0{,}4$ tonne par pêcheur et $g = 0{,}1$ pêcheur par tonne, on a $hg = 0{,}04$, $\lambda = 1 \pm 0{,}2\,i$, $\theta \approx 0{,}197$ radian par saison, et une période d'environ 32 saisons. Le taux de conversion est $a = \sqrt{g/h} = 0{,}5$ pêcheur par tonne.

Remarque (Un modèle trop simple). Ici $|\lambda|^2 = \Pi = 1 + hg > 1$: les cycles s'amplifient de saison en saison. C'est un défaut connu du schéma explicite, qui ajoute à chaque pas un peu d'amplitude. La variante qui suit le corrige par des départs de pêcheurs.

10.4 La flotte amortie

Définition 25 (Flotte amortie)**.** Une fraction $d \in]0, 1[$ des pêcheurs en excès quitte la pêche à chaque saison :

$$S_{t+1} = S_t - h\,F_t, \qquad F_{t+1} = (1 - d)\,F_t + g\,S_t, \qquad M_d = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ g & 1 - d \end{pmatrix}.$$

Proposition 26 (Lecture de Viète de la flotte amortie)**.** *Le trinôme caractéristique est* $\lambda^2 - (2-d)\lambda + (1-d+hg)$*, et*

$$\alpha = 1 - \frac{d}{2}, \qquad \Pi = 1 - d + hg, \qquad \beta^2 = \Pi - \alpha^2 = hg - \frac{d^2}{4}.$$

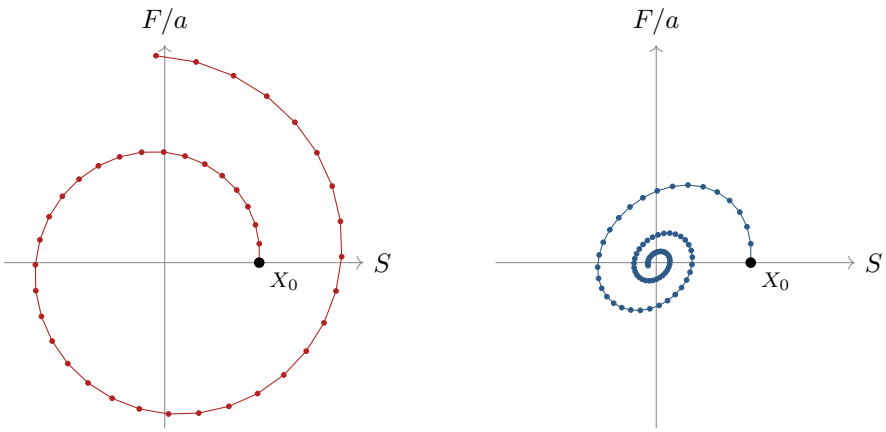
(i) Les racines sont complexes si et seulement si $hg > d^2/4$ *: l'aller-retour des conversions l'emporte sur le carré du demi-amortissement.*

(ii) Les cycles sont amortis si et seulement si $\Pi < 1$*, c'est-à-dire* $hg < d$*.*

Il y a donc des cycles amortis exactement lorsque $\dfrac{d^2}{4} < hg < d$*.*

Démonstration. $\operatorname{tr} M_d = 2 - d$ et $\det M_d = 1 - d + hg$; la demi-trace est α, le déterminant est Π (proposition 32). Puis $\beta^2 = 1 - d + hg - (1 - d + \frac{d^2}{4}) = hg - \frac{d^2}{4}$. Pour des racines complexes, $|\lambda|^2 = \Pi$ (proposition 10), d'où (ii). □

L'amortissement se répartit entre les deux regards : il diminue la partie propre, $\alpha = 1 - \frac{d}{2}$, et retranche $\frac{d^2}{4}$ au carré de la partie partielle. Avec les valeurs de l'exemple 24 et $d = 0{,}1$, on a $\alpha = 0{,}95$, $\beta \approx 0{,}194$, $|\lambda| \approx 0{,}970$, et une période d'environ 31 saisons : les cycles s'éteignent lentement.



sans départs : $|\lambda| > 1$
les cycles s'amplifient

avec départs ($d = 0{,}1$) : $|\lambda| < 1$
les cycles s'amortissent

FIGURE 7 – L'état de la flotte de saison en saison, avec $h = 0{,}4$ et $g = 0{,}1$, en partant d'un excès de stock d'une tonne. La flotte est mesurée dans l'unité $a = \sqrt{g/h}$, qui rend la rotation circulaire. Chaque point est une saison ; l'état tourne d'environ 0,2 radian par saison.

Remarque (Portée du modèle)*.* Ce modèle est une caricature linéaire, valable pour de petits écarts à l'équilibre. Il retrouve pourtant un phénomène connu des pêcheries en libre accès, étudiées depuis Gordon [5] et Smith [6] : l'entrée et la sortie des pêcheurs, en réponse au stock, produisent des cycles d'abondance et de pénurie. C'est l'équivalent discret, à l'échelle de la saison, des cycles proies–prédateurs de Volterra [7].

Remarque (Retour à Dirac)*.* Le problème de Dirac ne comportait qu'une seule conversion, dans un seul sens, et une seule fois : les pêcheurs prenaient leur part, et rien ne revenait. Il suffit d'ajouter le retour (le stock attire les pêcheurs) et la répétition (saison après saison) pour qu'apparaissent le carré, le signe moins, et des racines complexes qui ont un sens réel : la vitesse de rotation des cycles de la pêche.

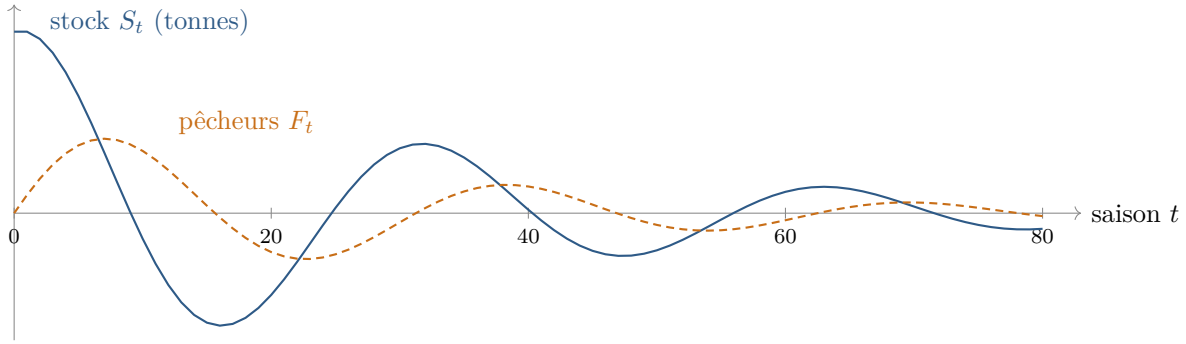


FIGURE 8 – Les mêmes cycles amortis, au fil des saisons. Le maximum des pêcheurs suit celui du stock d'environ un quart de période : c'est le quart de tour de J_a, lu dans le temps.

11 Intérêt calculatoire

La forme de Viète n'est pas seulement une lecture : elle se calcule autrement que la formule du discriminant. On compare ici les deux approches du point de vue d'un ordinateur, qui calcule en virgule flottante, c'est-à-dire avec un nombre fixe de chiffres significatifs, et arrondit le résultat de chaque opération.

11.1 Le décompte des opérations

On compte les opérations sur les nombres flottants. Les multiplications par 2 ou par 4 sont des changements d'exposant, exacts et presque gratuits en binaire ; on ne les compte pas.

Algorithme A (discriminant).

A1. $u = 1/a$ (division), puis $u/2$ (décalage).

A2. $\Delta = b \cdot b - 4\,(a \cdot c)$ (deux multiplications).

A3. $s = \sqrt{\Delta}$ (racine carrée).

A4. $x_\pm = (-b \pm s) \cdot \frac{u}{2}$ (deux multiplications).

Algorithme B (Viète).

B1. $u = 1/a$ (division).

B2. $\alpha = -\frac{b}{2} \cdot u$ et $\Pi = c \cdot u$ (deux multiplications).

B3. $D = \alpha \cdot \alpha - \Pi$ (une multiplication).

B4. $d = \sqrt{|D|}$ (racine carrée), puis $x_\pm = \alpha \pm d$ si $D \geq 0$, ou $x_\pm = \alpha \pm i\,d$ si $D < 0$.

Proposition 27 (Coût)**.**

	Divisions	*Multiplications*	*Racines carrées*
Algorithme A (discriminant)	1	4	1
Algorithme B (Viète)	1	3	1

L'algorithme de Viète économise une multiplication.

Démonstration. C'est le décompte des étapes A1 à A4 et B1 à B4. □

Le gain est réel mais modeste. Sur un processeur actuel, une multiplication flottante coûte quelques cycles, tandis qu'une division ou une racine carrée en coûte plusieurs fois plus. L'économie ne représente donc que quelques pour cent du temps de calcul, et ne compte que pour de très grands nombres de trinômes. L'intérêt principal de la forme de Viète est ailleurs : dans la précision.

11.2 La perte de chiffres

Lorsqu'on soustrait deux nombres flottants presque égaux, les chiffres communs s'annulent et il ne reste que les chiffres de queue, déjà entachés d'arrondi : c'est la *cancellation*. Les deux formules y sont exposées de la même façon.

Proposition 28 (Cancellation)**.** *Si $|\Pi| \ll \alpha^2$, l'une des racines, $\alpha - \operatorname{sgn}(\alpha)\sqrt{\alpha^2 - \Pi}$, est la différence de deux nombres presque égaux, et sa valeur calculée perd d'autant plus de chiffres que le rapport $|\Pi|/\alpha^2$ est petit. Il en est de même, dans la formule classique, pour $-b \pm \sqrt{\Delta}$.*

Démonstration. Pour $|\Pi| \ll \alpha^2$, $\sqrt{\alpha^2 - \Pi} = |\alpha|\sqrt{1 - \Pi/\alpha^2} \simeq |\alpha|(1 - \frac{\Pi}{2\alpha^2})$ est très proche de $|\alpha|$. La différence avec $|\alpha|$ vaut environ $|\Pi|/(2|\alpha|)$, beaucoup plus petite que les deux termes : son erreur relative est celle des termes multipliée par $2\alpha^2/|\Pi|$. Dans la formule classique, $-b \pm \sqrt{\Delta} = 2a(\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Pi})$, et la situation est la même. □

Exemple 29 (Le trinôme $x^2 - 10^8 x + 1$)**.** On a $\alpha = 5 \times 10^7$ et $\Pi = 1$. Les racines exactes sont $x_1 \approx 10^8$ et $x_2 = 1{,}000\,000\,000\,000\,000\,1 \times 10^{-8}$. En double précision (norme IEEE 754, environ seize chiffres significatifs), on obtient :

Méthode	Petite racine calculée	Erreur relative
formule classique $(-b - \sqrt{\Delta})/2a$	$7{,}450\,580\,596\,923\,828 \times 10^{-9}$	25 %
Viète naïve $\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \Pi}$	$7{,}450\,580\,596\,923\,828 \times 10^{-9}$	25 %
Viète par le produit Π/x_1	$1{,}000\,000\,000\,000\,000 \times 10^{-8}$	de l'ordre de 10^{-16}

La petite racine est la différence de 5×10^7 et de $\sqrt{25 \times 10^{14} - 1}$, qui ne diffèrent qu'au seizième chiffre : il ne reste presque rien de juste.

11.3 Pousser Viète jusqu'au bout : l'algorithme stable

La correction, recommandée en analyse numérique [1, 2], consiste à n'utiliser la racine carrée que pour une seule racine, celle pour laquelle aucune soustraction n'a lieu, et à obtenir l'autre par la relation de Viète sur le produit.

Proposition 30 (Algorithme stable)**.** *Pour $D = \alpha^2 - \Pi \geq 0$, on pose*

$$x_1 = \alpha + \operatorname{sgn}(\alpha)\sqrt{D}, \qquad x_2 = \frac{\Pi}{x_1},$$

avec $\operatorname{sgn}(0) = +1$*. Alors x_1 et x_2 sont les deux racines, et aucune des deux n'est calculée par soustraction de deux nombres de même signe.*

Démonstration. α et $\operatorname{sgn}(\alpha)\sqrt{D}$ ont le même signe : x_1 est une somme, sans cancellation, et c'est la racine de plus grand module. La seconde racine vérifie $x_1 x_2 = \Pi$ (proposition 5), donc $x_2 = \Pi/x_1$, qui est un quotient. Si $x_1 = 0$, alors $\alpha = 0$ et $D = 0$, d'où $\Pi = 0$: la racine double est 0, et l'on pose $x_2 = 0$. □

L'algorithme stable a le même coût que l'algorithme B : la seconde racine coûte une division au lieu d'une addition. Il a une lecture naturelle dans le vocabulaire du grain des racines : on calcule directement l'extrémité éloignée du grain couché, et l'on obtient l'extrémité proche par le produit, qui relie les deux extrémités du grain. Pousser les formules de Viète jusqu'au bout, c'est exactement cela : se servir du produit autant que de la somme.

Remarque (Le cas complexe)*.* Pour $D < 0$, il n'y a pas de cancellation : la partie propre α est calculée directement, et la partie partielle $\beta = \sqrt{-D}$ aussi. Le module des racines est donné sans racine carrée supplémentaire par le produit, $|x|^2 = \Pi$ (proposition 10).

11.4 La marge en une seule opération

Les processeurs actuels disposent d'une opération de *multiplication-addition fusionnée*, notée $\mathrm{fma}(x, y, z)$, qui calcule $xy + z$ avec un seul arrondi final ; elle est normalisée depuis la révision de 2008 de la norme IEEE 754 [3].

Proposition 31 (Marge fusionnée)**.** *La marge de la forme de Viète se calcule en une seule opération arrondie une fois :*

$$D = \mathrm{fma}(\alpha, \alpha, -\Pi).$$

Le discriminant classique $b^2 - 4ac$ comporte deux produits, et ne peut pas s'obtenir avec un seul arrondi par une opération fusionnée.

Démonstration. $\mathrm{fma}(\alpha, \alpha, -\Pi) = \alpha \cdot \alpha - \Pi$, arrondi une fois. Dans $b^2 - 4ac$, au moins l'un des deux produits doit être arrondi avant la soustraction ; pour retrouver une précision comparable, il faut des techniques supplémentaires, comme celle de Kahan [4]. □

Cet avantage est net lorsque le trinôme est donné directement par α et Π. Lorsqu'on part de a, b et c, les divisions qui donnent α et Π introduisent chacune un arrondi avant le calcul de la marge. Près d'une racine double, enfin, aucune formule ne peut tout corriger : une petite erreur η sur la marge déplace les racines d'environ $\sqrt{|\eta|}$, beaucoup plus que η. C'est une propriété du problème lui-même, son *conditionnement*, et non un défaut de l'algorithme.

11.5 Les valeurs propres d'une matrice 2×2

La forme de Viète est celle sous laquelle le trinôme se présente le plus souvent en calcul scientifique.

Proposition 32 (Valeurs propres)**.** *Les valeurs propres d'une matrice réelle M de taille 2×2 sont*

$$\lambda = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \Pi}, \qquad \alpha = \tfrac{1}{2} \operatorname{tr} M, \quad \Pi = \det M.$$

Démonstration. Le polynôme caractéristique de M est $\lambda^2 - (\operatorname{tr} M)\,\lambda + \det M$, dont la demi-somme des racines est α et le produit Π. □

Le trinôme arrive alors sans coefficient dominant à diviser : la demi-trace et le déterminant sont directement la partie propre et le produit. L'algorithme stable et la marge fusionnée s'appliquent tels quels, et c'est ainsi que les bibliothèques de calcul numérique traitent les blocs 2×2. Dans le cas complexe, la demi-trace est la partie propre commune des deux valeurs propres, et $\sqrt{\det M}$ leur module.

Remarque (Lien avec l'origine du plan complexe). C'est ce que l'on a utilisé, sous une autre forme, dans l'étude du plan complexe [14] : la matrice compagnon d'un trinôme s'y décompose en $\alpha I + \beta K$, où α est la demi-trace. La forme de Viète est la lecture de cette décomposition sur les nombres.

Conclusion

Écrire un trinôme par la somme et le produit de ses racines ramène toute la discussion à une comparaison : celle du produit demandé Π avec le carré α^2 de la demi-somme, qui est le plus grand produit possible pour deux réels de même somme. Les racines complexes apparaissent lorsque le produit demandé dépasse ce maximum, et leur partie imaginaire mesure l'excédent. La relation entre le centre et le produit est hyperbolique pour des racines réelles et circulaire pour des racines complexes, selon le signe de i^2.

Le grain des racines rend cette situation visible. Il est couché, ponctuel ou debout, et seule sa direction change au passage de la racine double. Dans le plan à deux résolutions, sa lecture prend la forme cherchée : la partie propre est un grain grossier raffinable, la partie partielle se compte en grains grossiers, et l'unité imaginaire est à la fois l'unité du grain grossier et le quart de tour qui y mène. Cette lecture ne modifie pas les racines, qui sont retrouvées par promotion ; elle en donne une interprétation dans le vocabulaire de la théorie du grain. Elle a enfin un intérêt pratique : en se servant du produit pour obtenir la seconde racine, la forme de Viète donne l'algorithme qui évite la perte de chiffres, et sa marge $\alpha^2 - \Pi$ se calcule en une seule opération fusionnée.

Références

[1] G. E. Forsythe, « Pitfalls in computation, or why a math book isn't enough », *American Mathematical Monthly* 77 (1970), 931–956.

[2] N. J. Higham, *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*, 2e éd., SIAM, 2002.

[3] IEEE, *Standard for Floating-Point Arithmetic* (IEEE 754), révision de 2008.

[4] W. Kahan, *On the Cost of Floating-Point Computation Without Extra-Precise Arithmetic*, notes, Université de Californie à Berkeley, 2004.

[5] H. S. Gordon, « The economic theory of a common-property resource : the fishery », *Journal of Political Economy* 62 (1954), 124–142.

[6] V. L. Smith, « Economics of production from natural resources », *American Economic Review* 58 (1968), 409–431.

[7] V. Volterra, « Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi », *Memorie della R. Accademia dei Lincei*, 1926.

[8] A. Girard, *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam, 1629.

[9] H. Genvrin, *Le grain construit*, 2026.

[10] H. Genvrin, *Partie propre et partie partielle chez les entiers*, 2026.

[11] H. Genvrin, *Instants et moments : le temps dans la théorie du grain*, 2026.

[12] H. Genvrin, *Intégrer et transformer dans le plan à deux résolutions*, 2026.

[13] H. Genvrin, *La réserve de chiffres*, 2026.

[14] H. Genvrin, *Origine du plan complexe et interprétation des racines*, 2026.

[15] F. Viète, *De aequationum recognitione et emendatione*, Paris, 1615 (posthume).