Grains, niveaux et plans imbriqués

Le plan complexe entre l'arithmétique de Skolem
et l'échelle de Planck

Hugues Genvrin

15 Novembre 2026

Résumé

Dans une approche à la Skolem, où le point absolu forme lui aussi un grain, on gradue l'axe réel par les nombres à 2ν décimales et l'axe imaginaire par les nombres à ν décimales. On montre que ce choix est naturel : le grain grossier élevé au carré est exactement le grain fin, si bien que le produit de deux imaginaires tombe juste sur la grille de l'axe réel. Le plan ainsi gradué est stable par addition, mais non par multiplication ; le produit n'y est défini qu'à un grain près. On distingue ensuite deux cadres pour exploiter ces complexes : un cadre mathématique, purement arithmétique, qui relève de l'arithmétique non standard de Skolem et non de l'analyse non standard de Robinson ; et un cadre physique, qui est une hypothèse sur le monde et dont le statut dépend de la nature, finie ou illimitée, du grain physique. En associant à chaque quart de tour une homothétie de rapport illimité, on obtient une tour de plans complexes imbriqués, dont le quotient est un tore. Enfin, on examine l'hypothèse qui prend la longueur de Planck pour grain grossier et un zéro d'équivalence pour grain fin : la tour se réduit alors, en physique, à trois régions, l'infinitésimal, le fini et l'illimité.

1 Cadre

On se place dans un modèle non standard de l'arithmétique de Peano, au sens de Skolem. On note ${}^*\mathbb{Z}$ l'anneau des entiers de ce modèle et $\nu = \#\mathbb{N}$, qui est un entier *illimité*. On emploie le vocabulaire *fini*, *illimité*, *infini*.

Remarque 1.1 (Deux non-standards). On distinguera dans toute la note :

- l'*arithmétique non standard* de Skolem : un modèle non standard des entiers, dans lequel on raisonne par transfert arithmétique ;
- l'*analyse non standard* de Robinson : un corps hyperréel, muni d'une partie standard et d'un principe de transfert pour l'analyse.

La première suffit à tout ce qui suit dans le cadre mathématique.

2 Les deux grilles décimales

Définition 2.1 (Nombres à k décimales)**.** Pour un entier $k \geq 0$ du modèle, on note

$$\mathcal{D}_k \;=\; \left\{ \frac{m}{10^k} \;:\; m \in {}^*\mathbb{Z} \right\}$$

l'ensemble des nombres à k décimales. Son grain, c'est-à-dire l'écart entre deux éléments consécutifs, est 10^{-k}.

Définition 2.2 (Grain fin, grain grossier)**.** On gradue

- l'*axe réel* par $\mathcal{D}_{2\nu}$, de grain fin $g_f = 10^{-2\nu}$;
- l'*axe imaginaire* par $\mathcal{D}_\nu$, de grain grossier $g_g = 10^{-\nu}$.

Proposition 2.3. *Les deux grilles sont liées de trois façons.*

1. $\mathcal{D}_\nu \subset \mathcal{D}_{2\nu}$ *: la grille grossière est contenue dans la grille fine.*
2. $g_g = 10^\nu\, g_f$ *: le grain grossier vaut* 10^ν *grains fins.*
3. $g_g^2 = g_f$ *: le grain grossier élevé au carré est exactement le grain fin.*

Démonstration. Point 1. $m/10^\nu = (10^\nu m)/10^{2\nu}$, et $10^\nu m \in {}^*\mathbb{Z}$. *Point 2.* $10^{-\nu} = 10^\nu \cdot 10^{-2\nu}$. *Point 3.* $(10^{-\nu})^2 = 10^{-2\nu}$. □

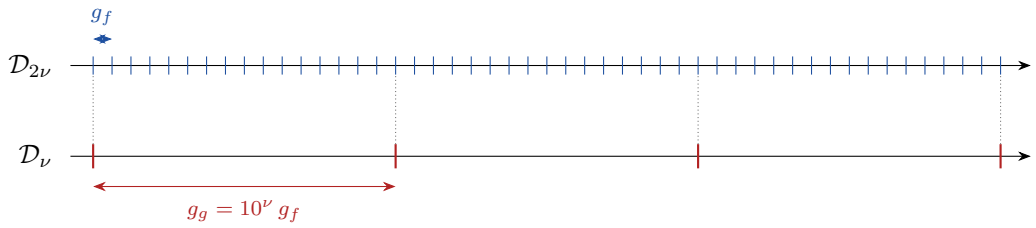


FIGURE 1 – La grille grossière $\mathcal{D}_\nu$ est contenue dans la grille fine $\mathcal{D}_{2\nu}$ (le rapport 10^ν est dessiné égal à 16).

Remarque 2.4 (La base). Le choix de la base 10 n'a rien d'essentiel : l'article *Vers le plan complexe* emploie la base 2, avec un rapport 2^{n_∞} entre les deux grains. Ce qui compte est la relation $g_g^2 = g_f$, qui vaut dans toute base dès que l'axe réel a deux fois plus de chiffres que l'axe imaginaire.

3 Le plan à deux grains

Définition 3.1 (Plan décimal à deux grains)**.** On pose

$$\mathcal{P} \;=\; \{\, x + y\,\imath \;:\; x \in \mathcal{D}_{2\nu},\; y \in \mathcal{D}_\nu \,\}.$$

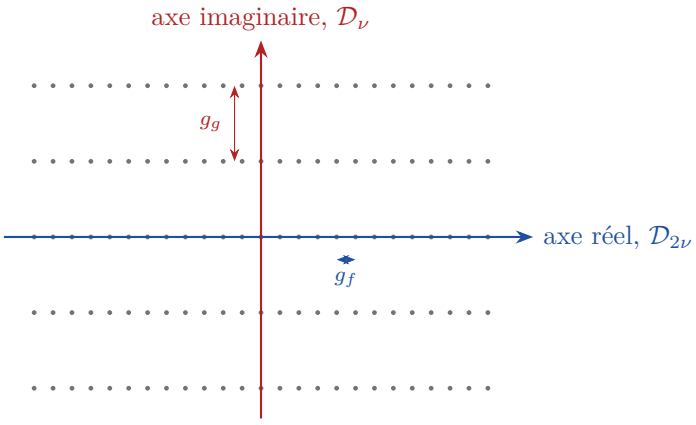


FIGURE 2 – Le plan $\mathcal{P}$: un réseau fin dans la direction réelle, grossier dans la direction imaginaire (rapport dessiné égal à 4).

Proposition 3.2 (Addition)**.** $\mathcal{P}$ *est stable par addition et par passage à l'opposé : c'est un groupe additif.*

Démonstration. $\mathcal{D}_{2\nu}$ et $\mathcal{D}_\nu$ sont stables par addition et par opposé, car ${}^*\mathbb{Z}$ l'est. □

Proposition 3.3 (Le produit de deux imaginaires)**.** *Pour $y, y' \in \mathcal{D}_\nu$,*

$$(y\,\imath)\cdot(y'\,\imath) \;=\; -\,y\,y' \;\in\; \mathcal{D}_{2\nu}.$$

Le produit de deux imaginaires tombe exactement sur la grille de l'axe réel.

Démonstration. Si $y = m\,10^{-\nu}$ et $y' = m'\,10^{-\nu}$, alors $y\,y' = m\,m'\,10^{-2\nu}$, avec $m\,m' \in {}^*\mathbb{Z}$. □

C'est la version décimale du fait, établi dans l'article *Vers le plan complexe*, que le carré du quart de tour envoie le niveau grossier sur le niveau fin. Le quart de tour lui-même reste exact : un cercle portant 10^ν points équirépartis contient le point situé au quart de tour, puisque 10^ν est divisible par 4.

Proposition 3.4 (Le produit général n'est pas stable)**.** *Pour $z = x + y\,\imath$ et $z' = x' + y'\,\imath$ dans $\mathcal{P}$,*

$$z\,z' \;=\; \underbrace{(xx' - yy')}_{\in\,\mathcal{D}_{4\nu}} \;+\; \underbrace{(xy' + x'y)}_{\in\,\mathcal{D}_{3\nu}}\,\imath,$$

et en général $z\,z' \notin \mathcal{P}$.

Démonstration. On a $xx' \in \mathcal{D}_{4\nu}$, $yy' \in \mathcal{D}_{2\nu} \subset \mathcal{D}_{4\nu}$, et $xy', x'y \in \mathcal{D}_{3\nu}$. Pour l'instabilité, prenons $x = x' = g_f$ et $y = y' = 0$: la partie réelle $g_f^2 = 10^{-4\nu}$ n'est pas dans $\mathcal{D}_{2\nu}$. Prenons $x = g_f$, $y = 0$, $x' = 0$, $y' = 1$: la partie imaginaire $g_f = 10^{-2\nu}$ n'est pas dans $\mathcal{D}_\nu$. □

Définition 3.5 (Produit au grain)**.** Pour un nombre a, on note $\tau_k(a)$ sa troncature à k décimales, et l'on pose

$$z \odot z' \;=\; \tau_{2\nu}(\mathrm{Re}(zz')) \;+\; \tau_\nu(\mathrm{Im}(zz'))\,\imath.$$

Proposition 3.6 (Le produit est défini à un grain près)**.** *Pour z, z' et z'' dans $\mathcal{P}$:*

1. *$z \odot z' \in \mathcal{P}$, et*

$$|\mathrm{Re}(zz' - z\odot z')| < g_f, \qquad |\mathrm{Im}(zz' - z\odot z')| < g_g.$$

2. *si z, z', z'' sont limités, les écarts $(z\odot z')\odot z'' - z\odot(z'\odot z'')$ et $z\odot(z'+z'') - (z\odot z' + z\odot z'')$ sont infiniment petits.*

Démonstration. Point 1. Tronquer à k décimales déplace un nombre de moins de 10^{-k}.

Point 2. Écrivons $z \odot z' = zz' + e$, avec $|e| < g_f + g_g < 2g_g$. Alors $(z \odot z') \odot z'' = (zz' + e)\,z'' + e' = zz'z'' + e\,z'' + e'$, avec $|e'| < 2g_g$. De même $z \odot (z' \odot z'') = zz'z'' + z\,e'' + e'''$. L'écart est majoré par $2g_g\,(|z| + |z''| + 2)$, qui est infiniment petit lorsque z et z'' sont limités, puisque $g_g = 10^{-\nu}$ l'est. Le cas de la distributivité est identique. □

Remarque 3.7 (Équivalence et non égalité). Le produit au grain n'est donc ni associatif ni distributif au sens strict, mais il l'est à un infiniment petit près sur les nombres limités : les deux membres sont *équivalents* sans être égaux. C'est exactement le comportement de la *lecture commune* de l'article *Vers le plan complexe*, où les deux axes sont mesurés avec la même unité fine. Pour retrouver un produit exact, il faut passer à la *lecture normée*, où chaque axe est gradué par son propre grain.

4 Les plans imbriqués

On associe maintenant à chaque quart de tour une homothétie, comme dans l'article *Vers le plan complexe*. On note λ le rapport entre deux grains consécutifs : $\lambda = 2^\nu$ en base 2, $\lambda = 10^\nu$ dans le cadre décimal des sections précédentes. Dans les deux cas, λ est illimité.

Définition 4.1 (Tour de niveaux)**.** On part d'un grain g_0 suffisamment fin. Le *niveau* k, pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, est le plan gradué au grain $g_k = \lambda^k g_0$. On pose

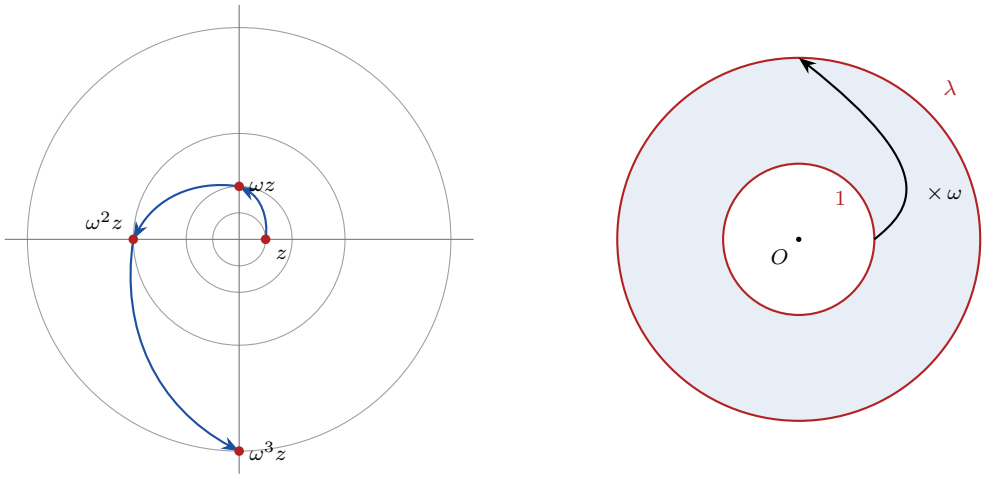
$$\omega \;=\; \lambda\, \imath,$$

la composée du quart de tour et de l'homothétie de rapport λ.

Proposition 4.2 (Le quart de tour fait monter d'un niveau)**.** *Le produit par ω a les trois propriétés suivantes.*

1. *Le produit par ω envoie le grain g_k sur un grain de taille g_{k+1}, tourné d'un quart de tour : il fait passer du niveau k au niveau $k+1$.*
2. *$\omega^2 = -\lambda^2$ et $\omega^4 = \lambda^4$: quatre quarts de tour font un tour complet et une montée de quatre niveaux.*
3. *L'orbite d'un point $z \neq O$ est la suite $\omega^k z = \lambda^k\, \imath^k z$: c'est une spirale qui coupe chaque niveau une fois, et non un cercle.*

Démonstration. $|\omega z| = \lambda |z|$ et ωz s'obtient en tournant λz d'un quart de tour. Puis $\omega^2 = \lambda^2 \imath^2 = -\lambda^2$ et $\omega^4 = \lambda^4 \imath^4 = \lambda^4$ (théorème du carré du quart de tour de l'article). Enfin $|\omega^k z| = \lambda^k |z|$ croît strictement avec k. □



orbite de z sous ω — couronne fondamentale, bords recollés

FIGURE 3 – À gauche, l'orbite d'un point est une spirale qui monte d'un niveau à chaque quart de tour (le rapport λ est dessiné égal à 2). À droite, la couronne $1 \leq |z| \leq \lambda$; le produit par ω recolle le cercle intérieur sur le cercle extérieur avec un quart de tour.

Proposition 4.3 (Le quotient est un tore)**.** *Sur le plan privé de O, on identifie chaque point z à ωz.*

1. *Tout point $z \neq O$ est identifié à un unique point de la couronne $A = \{\, 1 \leq |z| < \lambda \,\}$.*
2. *L'ensemble quotient s'obtient à partir de la couronne fermée $1 \leq |z| \leq \lambda$ en recollant chaque point z du cercle intérieur sur le point ωz du cercle extérieur.*

3. Ce quotient est un tore.

Démonstration. Point 1. Puisque $|\omega^{-k}z| = \lambda^{-k}|z|$, il existe un unique entier k tel que $\lambda^k \leq |z| < \lambda^{k+1}$, et $\omega^{-k}z$ est alors l'unique représentant de z dans A.

Point 2. Les seuls points de la couronne fermée identifiés entre eux sont les points z du cercle intérieur et leurs images ωz, de module λ, sur le cercle extérieur.

Point 3. La couronne fermée est un cylindre, dont on recolle les deux cercles du bord par le produit par ω, qui conserve l'orientation. Un cylindre dont on recolle les deux bords en conservant l'orientation est un tore. □

Remarque 4.4 (Le quart de tour fixe la forme du tore)*.* En analyse complexe classique, pour un rapport réel $\lambda > 1$, le quotient du plan privé de O par $z \mapsto \lambda\,\imath\,z$ est le tore complexe $\mathbb{C}/\Lambda$, où le réseau Λ est engendré par $2\pi\imath$ et $\ln\lambda + \imath\,\pi/2$: l'exponentielle transforme le produit par ω en la translation de $\ln\lambda + \imath\,\pi/2$. Le quart de tour ne change pas la topologie (c'est toujours un tore), mais il incline le réseau et fixe ainsi la forme du tore. Transporter cet énoncé à λ illimité demande l'analyse du modèle et non sa seule arithmétique.

Remarque 4.5 (Une tour qui commence)*.* Le quotient suppose que tous les niveaux se ressemblent, ce qui est l'idée du situs auto-similaire. Mais dans la définition 4.1, la tour part d'un grain g_0 : elle a un premier étage. Sans quotient, on obtient un empilement de couronnes qui commence au niveau 0 ; le tore n'apparaît que si l'on identifie les niveaux entre eux. C'est un choix de modélisation, qu'il faut énoncer comme tel.

5 Le cadre mathématique

Proposition 5.1 (Un cadre purement arithmétique)**.** *Tous les objets des sections 2 et 3 sont des fractions $m/10^k$ d'entiers du modèle, avec $k \in \{\nu, 2\nu, 3\nu, 4\nu\}$. Toutes les propriétés énoncées sont des égalités ou des inégalités entre entiers du modèle, obtenues par transfert arithmétique.*

Démonstration. On l'a vérifié énoncé par énoncé : les grilles $\mathcal{D}_k$ sont définies à partir de ${}^*\mathbb{Z}$, la troncature consiste à prendre une partie entière dans ${}^*\mathbb{Z}$, et les majorations de la proposition 3.6 comparent des fractions de même dénominateur. □

Corollaire 5.2. *Le cadre mathématique ne fait appel ni à un corps hyperréel, ni à une partie standard. Il ne relève pas de l'analyse non standard de Robinson, mais de l'arithmétique non standard de Skolem (remarque 1.1).*

Ce n'est donc pas un cadre « hors du non-standard » : le simple fait d'écrire ν décimales, avec ν illimité, suppose déjà le modèle non standard des entiers. C'est au contraire le cadre le plus proche de Skolem, et il a l'avantage que tout s'y ramène à de l'arithmétique.

6 Le cadre physique

On peut chercher à interpréter les deux grains comme un grain fin et un grain grossier de l'espace physique. Ce cadre n'a pas le même statut que le précédent : les mathématiques fournissent un modèle cohérent, mais ne démontrent pas que l'espace physique a cette structure. Il s'agit d'une *hypothèse* sur le monde.

6.1 La question décisive : grain illimité ou grain fini

Tout dépend de la nature du grain physique.

— *Si le grain physique est infinitésimal*, avec ν illimité, aucune mesure ne peut le distinguer du continu : toute mesure a une précision finie. Le modèle est cohérent, mais il ne peut pas être testé directement ; c'est un choix de description.

— *Si le grain physique est fini*, le nombre de décimales est fini lui aussi, et l'on n'a plus besoin du non-standard. Par exemple, la longueur de Planck, de l'ordre de $1{,}6\times10^{-35}$ m, est souvent évoquée comme l'échelle en deçà de laquelle la physique actuelle cesse de s'appliquer, sans qu'il soit établi qu'elle constitue un grain. Si c'était le cas, il faudrait environ 35 décimales en mètres : un nombre fini, et non ν.

6.2 Le passage à l'observable

La physique utilise des dérivées, des vitesses, des accélérations, donc un passage de l'infinitésimal à l'observable. Chez Robinson, ce passage est assuré par la partie standard. Dans le cadre de Skolem, il n'est pas donné et doit être construit.

La notion de *niveau d'observation* est le candidat naturel pour jouer ce rôle : à un niveau d'observation donné, le grain de ce niveau est un point, et ce qui est plus fin que lui n'est pas distingué. Le lien entre les deux cadres serait alors le suivant :

— le cadre mathématique fournit les grilles $\mathcal{D}_\nu$ et $\mathcal{D}_{2\nu}$ et leurs propriétés, démontrées ;
— le cadre physique choisit le niveau d'observation, et donc ce qui est traité comme un point ;
— l'hypothèse physique porte uniquement sur la correspondance entre ces niveaux et des échelles de l'espace réel.

6.3 L'hypothèse de Planck

Une manière de sortir de l'alternative précédente est de prendre deux grains de nature différente :

— pour *grain grossier*, la longueur de Planck, $g_g = \ell_P \approx 1{,}6 \times 10^{-35}$ m, qui est finie ;
— pour *grain fin*, $g_f = \ell_P/2^\nu$, qui est infinitésimal.

Au niveau d'observation ℓ_P, le grain fin est un point : c'est un *zéro d'équivalence*, équivalent à zéro sans lui être égal. Le grain observable est fini, comme le veut la physique, et le grain fin assure la continuité du modèle, comme le veut l'analyse. L'hypothèse de Planck combine donc les deux branches de l'alternative.

Trois précisions sont nécessaires pour que cette hypothèse soit énoncée correctement.

Remarque 6.1 (Un grain fin défini à l'équivalence près). Le grain fin n'est pas arbitraire dans le modèle : une fois ν fixé, il vaut $\ell_P/2^\nu$. Ce qui est arbitraire, c'est que tous les choix d'un entier ν illimité donnent les mêmes observations au niveau ℓ_P. Le grain fin est donc défini à l'équivalence près. C'est, dans le cadre de Skolem, l'analogue de la partie standard de Robinson.

Remarque 6.2 (Rapport et non carré). En physique, les grains sont des longueurs. La relation $g_g = 2^\nu g_f$ est un rapport sans dimension, et elle s'applique sans difficulté. En revanche, la relation $g_g^2 = g_f$ de la proposition 2.3, vraie pour des nombres purs, égalerait des mètres carrés et des mètres. Il faut donc soit prendre ℓ_P pour unité de longueur, soit s'en tenir à la relation de rapport.

Remarque 6.3 (Que mesure l'axe imaginaire ?). L'espace physique est réel et a trois dimensions. Les nombres complexes apparaissent en physique ailleurs, notamment comme amplitudes en mécanique quantique, qui ne sont pas des positions. Pour que l'égalité « grain grossier $= \ell_P$ » ait un sens, il faut dire quelle grandeur physique est portée par l'axe gradué au grain grossier. C'est la question centrale de cette piste, et elle reste ouverte.

6.4 La tour physique : trois régions

Le diamètre de l'univers observable est d'environ $8{,}8\times10^{26}$ m, soit environ 5×10^{61} longueurs de Planck, c'est-à-dire à peu près 2^{205}. C'est un nombre fini.

Proposition 6.4. *Avec $g_g = \ell_P$ et le rapport $\lambda = 2^\nu$, la tour des niveaux se réduit, dans le cadre physique, à trois régions :*

- *le niveau inférieur, de grain $\ell_P/2^\nu$: l'*infinitésimal*, inobservable ;*
- *le niveau de ℓ_P : le* fini*, qui contient toute la physique observable, de la longueur de Planck au diamètre de l'univers ;*
- *le niveau supérieur, de grain $\ell_P\, 2^\nu$: l'*illimité*, au-delà de toute échelle physique.*

Démonstration. Toute longueur observable est comprise entre ℓ_P et environ $2^{205}\ell_P$, donc s'écrit $n\,\ell_P$ avec n fini. Comme 2^ν est illimité, $n < 2^\nu$: toute longueur observable reste au-dessous du grain du niveau supérieur, et au-dessus de celui du niveau inférieur. □

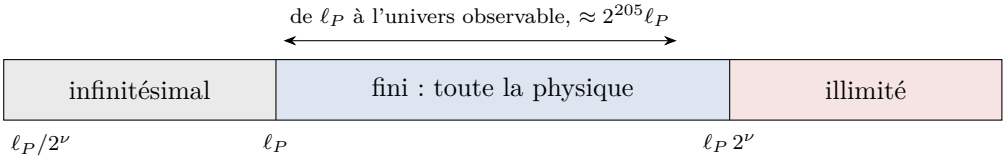


FIGURE 4 – Dans le cadre physique, la tour des niveaux se réduit à trois régions.

Les autres étages de la tour, et le quotient en tore de la proposition 4.3, n'existent que dans le cadre mathématique.

7 Synthèse

	Cadre mathématique	**Cadre physique**
Statut	résultats démontrés	hypothèse sur le monde
Fondement	arithmétique non standard de Skolem	modèle du cadre mathématique, plus une correspondance avec l'espace réel
Grains	$g_f = 10^{-2\nu}$, $g_g = 10^{-\nu}$, avec ν illimité	illimités (non testables) ou finis (alors sans besoin du non-standard)
Produit	exact pour deux imaginaires ; au grain près en général	au grain près, l'écart n'étant pas observable
Passage à l'observable	sans objet	à construire : niveau d'observation
Tour de niveaux	illimitée vers le haut ; quotient en tore si l'on identifie les niveaux	trois régions : infinitésimal, fini, illimité
Grain grossier	$10^{-\nu}$ ou $2^{-\nu}$, nombre pur	hypothèse : ℓ_P, le grain fin étant un zéro d'équivalence

TABLE 1 – Les deux cadres.

Conclusion. Graduer l'axe réel par 2ν décimales et l'axe imaginaire par ν décimales est naturel, parce que le grain grossier élevé au carré est exactement le grain fin : le produit de deux imaginaires tombe juste sur la grille réelle. Le plan obtenu est stable par addition ; son produit n'est défini qu'à un grain près, ce qui en fait un cadre d'équivalence et non d'égalité.

Ce cadre mathématique est purement arithmétique et relève de Skolem, non de Robinson. Le cadre physique en est une interprétation : il demande de dire si le grain physique est fini ou illimité, et de construire le passage à l'observable, rôle que peut jouer le niveau d'observation.

En associant à chaque quart de tour une homothétie de rapport illimité, on obtient une tour de plans complexes imbriqués ; l'orbite d'un point y est une spirale, et le quotient de la tour est un tore, à condition d'identifier les niveaux entre eux. Dans le cadre physique, prendre la longueur de Planck pour grain grossier et un zéro d'équivalence pour grain fin réunit le fini de l'observation et la continuité du modèle. Toute la physique observable tient alors dans un seul niveau, entre l'infinitésimal et l'illimité. Reste à dire quelle grandeur physique porte l'axe gradué au grain grossier : c'est la question ouverte de cette piste.