

Jauges et grain

Un pont : la grille comme jauge, l'anomalie comme biais, la promotion comme juge

Hugues Genvrin

2026

Résumé

Nous relierons deux programmes : la théorie des *jauges* (une jauge est un couple ordre/équivalence, une manière élémentaire d'identifier et de hiérarchiser) et la *théorie du grain* (le continu est stratifié en grains de résolution $-kn\infty$, le continu standard étant restitué par promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$). Trois identifications structurent le pont. D'abord, toute grille de grain *est* une jauge, et la tour des résolutions est une chaîne de finesse : la jauge redevient l'instrument gradué d'Archimède. Ensuite, l'anomalie cartésienne — la stratification qu'une fonction dérivable imprime sur son axe d'arrivée — *est* un biais de jauge : une redistribution locale de la finesse à finesse totale constante. Enfin, la promotion tranche : un biais est physique si et seulement si sa partie standard est non nulle, artefact sinon. Ce critère sépare la loi de Weber–Fechner et la dilatation du temps (biais persistants) de l'anisotropie d'une grille d'espace-temps (artefact effacé par promotion). On instancie sur la perception (Weber) et sur l'horloge atomique (temps propre).

Table des matières

1	Les deux programmes	2
2	La grille de grain est une jauge	2
3	Le biais de jauge : l'anomalie cartésienne	3
4	Le critère de promotion	5
5	Instanciations	6
5.1	Perception : la loi de Weber–Fechner	6
5.2	Cinématique : l'horloge atomique et le temps propre	6
5.3	L'artefact : la grille d'espace-temps	7
6	Garde-fous et portée	7

1 Les deux programmes

La théorie des jauges part du plus primitif : sur un ensemble $\mathcal{C}$, une *jauge* $\mathcal{J}(\mathcal{O}, \mathcal{R})$ est un ordre générique $\mathcal{O}$ et une équivalence $\mathcal{R}$ tels que l'inordonnabilité coïncide avec l'équivalence. On la résume par le pré-ordre total $x \preceq y :\Leftrightarrow (x \mathcal{O}_1 y) \vee (x \mathcal{R} y)$; $\mathcal{R}$ dit ce qu'elle *identifie*, $\mathcal{O}$ ce qu'elle *hiérarchise*. Sa *finesse* est $\#(\mathcal{C}/\mathcal{R})$, le nombre de classes distinguées.

La théorie du grain part du continu : le cercle C_1 est stratifié à la résolution $-kn\infty$ en $2^{kn\infty}$ grains d'épaisseur $2^{-kn\infty}$, parcourus par le flot universel. Aucune résolution finie n'atteint le continu ; c'est la *promotion* $st : \tilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}} \rightarrow \mathbb{R}$, quotient par l'idéal $\mathfrak{m}$ des infinitésimaux, qui le restitue. Un point du continu est la partie standard commune d'une tour de grains emboîtés.

Le présent travail montre que ces deux constructions sont deux faces d'un même objet, et que leur mise en regard produit un critère falsifiable sur les biais de mesure.

2 La grille de grain est une jauge

Proposition 1 (Grille = jauge). *Toute grille de grain $G_{-kn\infty}$ porte une jauge canonique $\mathcal{J}_k(\mathcal{O}, \mathcal{R})$: l'équivalence $x \mathcal{R} y$ « x et y sont dans le même grain », et l'ordre $x \mathcal{O}_1 y$ « x précède y selon le flot universel ». Sa finesse est*

$$\#(\mathcal{C}/\mathcal{R}_k) = 2^{kn\infty}.$$

Démonstration. La relation « même grain » est réflexive, symétrique et transitive : c'est une équivalence, dont les classes sont les $2^{kn\infty}$ grains (axiomatique du grain). Le flot universel ordonne totalement les grains ; l'inordonnabilité de deux points d'un même grain coïncide avec leur équivalence, ce qui est la propriété de jauge. Le cardinal du quotient est le nombre de grains. $\square$

Une grille n'est donc pas seulement une partition (une équivalence) : le flot lui adjoint un ordre, et en fait une jauge *au sens plein*, avec ses deux moitiés.

Proposition 2 (La tour des résolutions est une chaîne de finesse). *Pour tout k , $\mathcal{J}_{k+1}$ est strictement plus fine que $\mathcal{J}_k$ au sens de la relation d'ordre $\mathcal{O}_\delta$ entre jauges :*

$$\mathcal{J}_{k+1} \mathcal{O}_\delta \mathcal{J}_k, \quad \frac{\#(\mathcal{C}/\mathcal{R}_{k+1})}{\#(\mathcal{C}/\mathcal{R}_k)} = 2^{n\infty}.$$

Démonstration. Chaque grain de niveau $-kn\infty$ contient exactement $2^{n\infty}$ sous-grains de niveau $-(k+1)n\infty$ (doublement par raffinement, itéré $n\infty$ fois) : la partition fine raffine la grossière, donc $\mathcal{J}_{k+1}$ ordonne davantage. Le rapport des cardinaux est $2^{(k+1)n\infty}/2^{kn\infty} = 2^{n\infty}$. $\square$

Remarque 1 (La règle graduée d'Archimède retrouvée). *Graduer la grille grossière au moyen de la fine, c'est compter combien de grains fins entrent dans un grain grossier — soit $2^{n\infty}$. La jauge redevient exactement ce qu'elle était chez Archimède : un instrument de mesure gradué, où l'étalon fin jauge l'objet grossier. La boucle se referme sur la définition initiale du programme des jauges.*

Remarque 2 (Raffinement, capacité, universalité : trois rôles distincts). *Fine-sur-grossière est du raffinement (finesse au sein d'un même continu), non de la capacité au sens strict, qui exigeait deux ensembles disjoints. La jauge de grain de C_1 portée sur un autre continuum — ce que la construction pragmatique des réels autorise pour toute structure stratifiable — est, elle, une jauge de capacité ; portée sur toutes, une jauge universelle. Les trois notions coexistent et se nomment distinctement.*

3 Le biais de jauge : l'anomalie cartésienne

Une jauge peut être transportée le long d'une application (tirage en avant). Un difféomorphisme conserve la finesse *totale* mais peut en redistribuer la densité *locale*. C'est le biais.

Proposition 3 (Transport non isométrique et redistribution de finesse). *Soit $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ un difféomorphisme, $\mathcal{C}$ muni de la jauge de grain uniforme d'épaisseur ϵ_0 . Par la stratification fonctionnelle, l'image d'un grain en x a pour épaisseur*

$$\epsilon'(\alpha(x)) = |\alpha'(x)| \epsilon_0.$$

La finesse totale est conservée (mêmes $2^{kn\infty}$ grains, α étant bijective), mais l'épaisseur locale varie avec x dès que α n'est pas affine.

Démonstration. Application directe du théorème de stratification fonctionnelle : la différentielle envoie dx sur $\alpha'(x) dx$, donc multiplie la mesure locale par $|\alpha'(x)|$. La conservation du cardinal est le cas bijectif de l'invariance de jauge (tirage en avant et en arrière coïncidents). $\square$

Définition 1 (Biais de jauge). *Le biais du transport α est le rapport local d'épaisseurs de la jauge transportée à la jauge de référence uniforme :*

$$\rho_\alpha(x) := |\alpha'(x)| = \frac{\text{épaisseur du grain image en } \alpha(x)}{\epsilon_0}.$$

La jauge transportée est uniforme (sans biais) si $\rho_\alpha \equiv 1$; sinon α redistribue la finesse — sur-résolue là où $\rho_\alpha < 1$, sous-résolue là où $\rho_\alpha > 1$.

Remarque 3 (Le biais est le « biais de complexité » nommé). ρ_α est exactement le biais de la couche différentielle du programme des jauges : croire la jauge uniforme quand elle est hétérogène. C’est un rapport brut — un réel positif quelconque en chaque point — et non une relation entre niveaux de résolution : rien n’y présuppose la structure de la tour de grain.

Remarque 4 (Le biais comme information : Hartley, Shannon, Kullback—Leibler). L’objet primitif est le rapport ρ_α ; son logarithme n’est pas une commodité algébrique mais un contenu d’information, ce qui en fixe le sens et la base. Un symbole de jauge à la résolution d’épaisseur ϵ sur un domaine de taille L distingue L/ϵ cellules : son information de Hartley est $\log_2(L/\epsilon)$. Sous le transport, $\epsilon' = \rho_\alpha \epsilon_0$, donc la variation locale de Hartley du symbole déformé, relativement à la référence, est le champ

$$b_\alpha(x) := \log_2 \rho_\alpha(x) = \log_2 |\alpha'(x)| \quad (\text{bits par symbole}).$$

Le biais log-jacobien est le contenu de Hartley du symbole de jauge déformé. Moyenné contre la distribution p des symboles, ce champ donne la variation d’entropie de Shannon sous le transport, $\Delta H = \mathbb{E}_p[\log_2 \rho_\alpha]$ (formule de changement de variable de l’entropie différentielle) : l’entropie croît là où $\rho_\alpha > 1$ (grains élargis, désordre introduit), décroît là où $\rho_\alpha < 1$. Comme l’entropie différentielle nue n’a de sens qu’à une référence près, l’objet bien défini est l’entropie relative de la jauge transportée à la référence uniforme,

$$D_{\text{KL}}(\text{jauge transportée} \parallel \text{référence}) = \int \log_2 \rho_\alpha d\mu.$$

La non-invariance de l’entropie différentielle par changement de coordonnée — d’ordinaire un défaut — est ici le terme log-jacobien, donc le biais lui-même : le défaut devient le signal.

Remarque 5 (La composition subsume le cocycle ; l’unité stratale n’est qu’un changement de base). L’additivité des biais le long d’une suite de transports, $b_{\alpha\circ\beta} = b_\alpha + b_\beta$, n’est pas un axiome mais la règle de chaîne de l’entropie : l’information s’ajoute sur des étapes successives. La propriété de cocycle en découle, au lieu d’être posée. La base 2 (bits) est celle de l’information, cohérente avec le comptage en bits de la néguentropie et de Burnside dans le programme du grain. Le choix $\log_{2^{n\infty}}$ n’est qu’un changement de base — exprimer le biais « en niveaux de raffinement » plutôt qu’en bits ; c’est le seul point où la métrique stratale réapparaît, comme unité et non comme définition. Elle compare $\mathcal{G}_{-(k+1)n\infty}$ à $\mathcal{G}_{-kn\infty}$ (comparaison verticale, entre niveaux emboîtés, de rapport fixe $2^{n\infty}$) ; le biais, lui, est une déformation horizontale (même niveau, épaisseur distordue, rapport quelconque). La stratale sert d’échelle, jamais de définition.

Remarque 6 (Hypothèse). Cette lecture suppose que le symbole de jauge se traite comme un symbole informationnel doté d’une distribution — naturel

dans le programme du grain, déjà probabiliste et compté en bits, mais à poser explicitement.

4 Le critère de promotion

Voici le cœur du pont. Deux biais de nature opposée coexistent, et la promotion les sépare.

Définition 2 (Biais physique, biais artefact). *Un biais ρ (rapport local d'épaisseurs, élément de $\widetilde{\mathbb{R}}$) est :*

- physique si $\text{st}(\rho) \not\equiv 1$: le rapport s'écarte de l'unité d'un standard non nul en au moins un point, et subsiste après promotion ;
- artefact si $\rho \not\equiv 1$ mais $\rho - 1 \in \mathfrak{m}$ partout ($\text{st}(\rho) \equiv 1$) : la déviation est infinitésimale et effacée par promotion.

Théorème 1 (Critère de promotion). *Le biais d'un transport survit au niveau des instants (après promotion) si et seulement si le rapport d'épaisseurs s'écarte de l'unité par une part standard :*

$$\text{biais physique} \iff \text{st}(\rho) \not\equiv 1.$$

Un biais physique déforme la jauge promue (elle cesse d'être isométrique à la référence) ; un biais artefact laisse la jauge promue isométrique, la déviation étant enfouie sous le seuil standard.

Démonstration. La jauge promue est l'image par st de la jauge stratale. Deux jauges stratales dont les épaisseurs locales sont dans un rapport ρ ont même image promue si et seulement si st identifie leurs grains, c'est-à-dire si ce rapport est infinitésimalement proche de 1 en tout point : $\rho - 1 \in \mathfrak{m}$, soit $\text{st}(\rho) \equiv 1$. Réciproquement, si $\text{st}(\rho) \not\equiv 1$, il existe un point où les épaisseurs promues sont dans un rapport standard $\neq 1$: la jauge promue est déformée. La déviation persiste donc exactement quand $\text{st}(\rho) \not\equiv 1$. $\square$

Remarque 7 (Un critère falsifiable). *Le critère tranche net. Il distingue une déformation réelle de la mesure d'un simple artefact d'échantillonnage — en biologie comme en physique — par une question unique et testable : le rapport d'épaisseurs s'écarte-t-il de l'unité par une part standard ? C'est, à notre sens, l'énoncé central que ce pont permet d'écrire proprement — et il ne dépend d'aucun choix de logarithme ni de la métrique stratale : il porte sur le rapport brut.*

Corollaire 1 (Lecture informationnelle du critère). *En termes du contenu de Hartley $b_\alpha = \log_2 \rho_\alpha$ (bits par symbole), le critère se relit :*

$$\begin{aligned} \text{biais physique} &\iff \text{st}(b_\alpha) \not\equiv 0 \quad (\text{information standard}), \\ \text{artefact} &\iff b_\alpha \in \mathfrak{m} \quad (\text{information infinitésimale}). \end{aligned}$$

Un biais est physique s'il porte une information standard non nulle, artefact s'il n'en porte qu'une infinitésimale, effacée par promotion.

Démonstration. $b_\alpha = \log_2 \rho_\alpha$ est une bijection croissante standard sur les réels positifs, avec $b_\alpha = 0 \Leftrightarrow \rho_\alpha = 1$. Donc $\text{st}(\rho_\alpha) \neq 1 \Leftrightarrow \text{st}(b_\alpha) \neq 0$, et $\rho_\alpha - 1 \in \mathfrak{m} \Leftrightarrow b_\alpha \in \mathfrak{m}$ (les infinitésimaux se correspondent par $\log_2(1+u) \sim u/\ln 2$). Le critère sur le rapport et sa lecture en bits sont équivalents. $\square$

5 Instanciations

5.1 Perception : la loi de Weber–Fechner

Corollaire 2 (Weber comme biais physique). *Soit une transduction sensorielle logarithmique $p = \alpha(S) = \ln S$ (stimulus S , perception p). Le biais de la jauge perceptive est*

$$\rho_\alpha(S) = |\alpha'(S)| = \frac{1}{S}, \quad \text{st}(\rho_\alpha) \neq 1,$$

donc physique. Un grain perceptif d'épaisseur constante correspond à un grain de stimulus d'épaisseur $\propto S$: c'est la loi de Weber $\Delta S/S = \text{cte}$.

Démonstration. $\alpha'(S) = 1/S$, d'où $\rho_\alpha = 1/S$, standard et $\neq 1$ hors de $S = 1$. La condition « épaisseur perceptive constante » s'écrit $\epsilon_p = |\alpha'| \Delta S = \Delta S/S$ constante, soit $\Delta S \propto S$. $\square$

L'organisme résout finement près du seuil (petit S , ρ_α grand), grossièrement à saturation. Le biais de jauge *est* la loi de Weber. La fonction qui le produit est le logarithme — mais on notera que c'est la *transduction* $\alpha = \ln$ qui est logarithmique, non la mesure du biais : celle-ci reste le rapport brut $1/S$.

5.2 Cinématique : l'horloge atomique et le temps propre

L'horloge atomique est la jauge de capacité du temps : la seconde y est définie par un nombre fixé de périodes, chaque tic étant une jonction t_m , la période l'épaisseur Δ d'un moment.

Corollaire 3 (La dilatation du temps comme biais physique). *Pour une horloge de vitesse $v(t)$, le temps propre $\tau(t) = \int_0^t ds/\gamma(s)$ est un transport du temps coordonnée, de biais*

$$\rho_\tau(t) = |\tau'(t)| = \frac{1}{\gamma(t)}, \quad \text{st}(\rho_\tau) \neq 1 \text{ (si } v \neq 0),$$

donc physique. Ce qui se dilate, ce sont les moments : un moment propre de durée Δ couvre $\gamma\Delta$ de temps coordonnée.

Démonstration. $\tau' = 1/\gamma$ (stratification par $1/\gamma$), d'où $\rho_\tau = 1/\gamma$, standard et $\neq 1$ dès que $\gamma > 1$ sur un intervalle, c'est-à-dire dès que $v \neq 0$. $\square$

La dilatation du temps est donc *le mécanisme de Weber transposé de la perception à la cinématique* : même structure de biais, rapport d'épaisseurs standard, partie standard $\neq 1$. Le décalage vers le rouge gravitationnel en est la version générale, avec $\rho = \sqrt{1 - 2GM/rc^2}$, également physique.

5.3 L'artefact : la grille d'espace-temps

Corollaire 4 (L'anisotropie de grille comme artefact). *Une grille d'espace-temps alignée sur un référentiel S n'est pas invariante de Lorentz : la grille d'un référentiel S' y apparaît en losanges. Mais l'écart entre un événement standard et la jonction la plus proche est d'ordre Δ , infinitésimal : le rapport d'épaisseurs correspondant vérifie $\rho = 1 + O(\Delta)$, donc $\rho - 1 \in \mathfrak{m}$ et $\text{st}(\rho) \equiv 1$. C'est un artefact : après promotion, le groupe de Lorentz agit exactement sur les instants.*

Démonstration. La transformation de Lorentz est linéaire à coefficients standard ; l'écart introduit par la grille est borné par la taille d'un grain $\sim \Delta$, infinitésimal. Sa partie standard est nulle, et la jauge promue est la jauge de Lorentz exacte (invariance cinématique au niveau des instants). $\square$

Remarque 8 (Deux biais, un juge). *La dilatation ($\text{st}(\rho) \neq 1$) et l'anisotropie de grille ($\text{st}(\rho) = 1$) ont l'apparence commune d'une non-uniformité stratale, mais des statuts opposés que seule la promotion révèle. Le premier est une déformation réelle de la mesure ; le second, un artefact du choix de grille. Le critère de promotion est ce qui les distingue — et il vaut identiquement en biologie, où il sépare une vraie compression perceptive d'un simple artefact d'échantillonnage.*

Jauge uniforme (sans biais)



Jauge biaisée $p = \ln S$: grains $\propto S$



6 Garde-fous et portée

Les identifications mathématiques du pont sont solides : grille = jauge (ordre du flot + équivalence de grain), tour = chaîne de finesse (comptage

$2^{n\infty}$), anomalie cartésienne = tirage en avant non isométrique (redistribution à finesse totale constante), et le critère de promotion $\text{st}(\rho) \neq 1$, qui est un énoncé propre et démontrable, indépendant de tout choix de logarithme.

Les lectures physiques — Weber comme jauge, dilatation comme biais, horloge atomique comme étalon — sont, elles, des *interprétations* fécondes, non des théorèmes de physique : elles proposent une grille de lecture unifiée, à valider domaine par domaine. Le seul énoncé qui traverse les deux programmes sans reste est le critère de promotion : c’est lui le vrai pont.

Trois directions restent ouvertes. La dynamique : une loi physique écrite sur une grille comporte des termes qui violent l’invariance de Lorentz ; montrer qu’ils sont artefacts (partie standard nulle) demande une étude au cas par cas. La biologie : quantifier, sur un système sensoriel donné, la part physique et la part artefact d’un biais mesuré. Et la réciproque : existe-t-il des biais dont la partie standard est nulle mais qui laissent une trace dans les sous-dominants strataux — un biais « invisible aux instants, visible aux moments » ?

Références

- [1] H. Genvrin, *Les jauges*.
- [2] H. Genvrin, *Théorie du grain*.
- [3] H. Genvrin, *Instants et moments : le temps dans la théorie du grain*.
- [4] E. H. Weber ; G. T. Fechner, *Elemente der Psychophysik* (1860).
- [5] Archimède, *De la mesure du cercle*.