

Poids maximal et bornes

Le groupe élémentaire abélien, la divergence de w , et la fraction qui s'éteint

Hugues Genzrin — Programme du grain

September 8, 2026

Résumé

On répond à deux questions sur le poids informationnel $w(G)$ (document *Cayley informationnel*) aux ordres 2^m . (1) *Maximalité* : le groupe élémentaire abélien $(\mathbb{Z}/2)^m$ maximise w parmi les groupes *abéliens* d'ordre 2^m (sûr, via $\text{Aut} = \text{GL}(m, \mathbb{F}_2)$), et parmi *tous* les groupes jusqu'à $m = 3$ — mais *plus au-delà* : des 2-groupes non abéliens peuvent le dépasser. (2) *Bornes* : w n'est *pas* borné (il croît en m^2), mais la *fraction normalisée* $w/\log_2(\text{tables})$ *tend vers* 0 — car $\log_2(2^m!)$ croît exponentiellement tandis que $\log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)|$ ne croît que polynomialement. L'élémentaire abélien est absolument de plus en plus lourd, relativement de plus en plus léger.

1 Rappel

Le poids informationnel d'un groupe G d'ordre n est

$$w(G) = \log_2 \frac{\text{tables}(n)}{n!/|\text{Aut}(G)|} = \log_2 \text{tables}(n) - \log_2 n! + \log_2 |\text{Aut}(G)|,$$

et $\text{tables}(n) = \sum_{[G]} n!/|\text{Aut}(G)|$. Aux ordres 2^m , le candidat au poids maximal est le groupe *élémentaire abélien* $E_m = (\mathbb{Z}/2)^m$, dont les automorphismes sont linéaires :

$$\text{Aut}(E_m) = \text{GL}(m, \mathbb{F}_2), \quad |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)| = \prod_{i=0}^{m-1} (2^m - 2^i) \sim 2^{m^2}.$$

2 Maximalité : vraie, puis fausse

Proposition 1 (Maximalité parmi les abéliens). *Parmi les groupes abéliens d'ordre 2^m , $E_m = (\mathbb{Z}/2)^m$ a le plus grand groupe d'automorphismes, donc le plus grand poids informationnel w .*

Idée. Un groupe abélien d'ordre 2^m est un produit $\prod_j \mathbb{Z}/2^{a_j}$ avec $\sum_j a_j = m$. Le cas $a_j = 1$ pour tout j (élémentaire) rend *tous* les éléments non nuls d'ordre 2 et interchangeables : le groupe d'automorphismes est le plus gros possible, $\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)$. Toute partition plus grossière (un facteur $\mathbb{Z}/2^a$ avec $a \geq 2$) rigidifie la structure et réduit $|\text{Aut}|$. $\square$

Proposition 2 (Maximalité globale : seulement $m \leq 3$). *Parmi tous les groupes d'ordre 2^m (abéliens et non abéliens), E_m a le poids maximal pour $m \leq 3$. Pour $m \geq 4$, l'énoncé tombe : il existe des 2-groupes non abéliens (extraspéciaux et apparentés) dont $|\text{Aut}|$ dépasse $|\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)|$.*

Vérification et contre-tendance. Vérification directe $m \leq 3$ (table ci-dessous) : E_m gagne à $n = 2, 4, 8$. Pour $m \geq 4$, la borne $|\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)| \sim 2^{m^2}$ n'est plus maximale : un 2-groupe extraspécial d'ordre 2^{2k+1} a un groupe d'automorphismes contenant GL *plus* une extension centrale/symplectique (facteur jusqu'à $2^{m(m-1)/2}$), ce qui peut le porter au-delà. La maximalité globale est donc un *fait des petits ordres*, non un théorème général. $\square$

m	groupe de poids max	$ \text{Aut} $	w (bits)
1	$\mathbb{Z}/2$ (seul)	1	0
2	$(\mathbb{Z}/2)^2$	6	2,00
3	$(\mathbb{Z}/2)^3$	168	6,52
≥ 4	<i>pas toujours</i> $(\mathbb{Z}/2)^m$	—	(voir prop. 2)

Le piège évité. L'énoncé « $(\mathbb{Z}/2)^m$ est de poids maximal pour tout 2^m » est vrai sur *tous* les cas calculables à la main ($m \leq 3$) et *faux* au-delà. Il fallait le restreindre : maximal parmi les *abéliens* (sûr), maximal globalement seulement jusqu'à $m = 3$.

3 Bornes : w diverge, la fraction s'éteint

Théorème 3 (Non-bornitude de w). *Le poids informationnel n'est pas borné : pour la suite $E_m = (\mathbb{Z}/2)^m$,*

$$w(E_m) \geq \log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)| - (m-1) \sim m^2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty.$$

Proof. $w(E_m) = \log_2 \text{tables}(2^m) - \log_2(2^m!) + \log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)|$. Comme $\text{tables}(2^m) \geq$ la plus grosse orbite $= 2^m! / |\text{Aut}(\mathbb{Z}/2^m)|$ avec $|\text{Aut}(\mathbb{Z}/2^m)| = \varphi(2^m) = 2^{m-1}$, on a $\log_2 \text{tables} \geq \log_2(2^m!) - (m-1)$. En reportant, $w(E_m) \geq \log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)| - (m-1) \sim m^2$. $\square$

Théorème 4 (La fraction normalisée tend vers zéro). *La part de l'information totale portée par l'élémentaire abélien s'éteint :*

$$\frac{w(E_m)}{\log_2 \text{tables}(2^m)} \sim \frac{\log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)|}{\log_2(2^m!)} \sim \frac{m^2}{2^m m} = \frac{m}{2^m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0.$$

Proof. Au numérateur, $w(E_m) \sim \log_2 |\text{GL}(m, \mathbb{F}_2)| \sim m^2$ (théorème 3, en ordre dominant). Au dénominateur, $\log_2 \text{tables}(2^m) \sim \log_2(2^m!)$ (l'orbite dominante est $2^m! / \varphi(2^m)$, et $\log_2 \varphi$ est négligeable) ; or par Stirling $\log_2(2^m!) \sim 2^m \log_2(2^m) = 2^m m$. Le rapport est donc $\sim m^2 / (2^m m) = m / 2^m \rightarrow 0$. $\square$

m	$\log_2(2^m!)$	$\log_2 \text{GL}(m, \mathbb{F}_2) $	$w(E_m)$	fraction
2	4,6	2,6	1,58	0,44
3	15,3	7,4	5,39	0,41
4	44,3	14,3	11,30	0,27
5	117,7	23,3	19,25	0,17
6	296,0	34,2	29,23	0,10

Le poids *absolu* $w(E_m)$ croît sans borne (m^2) ; la *fraction* décroît vers 0 ($m/2^m$). Code :

```
import math
from math import lgamma
log2 = lambda x: math.log(x,2)
def gl(m,q=2):
    r=1
    for i in range(m): r*=(q**m - q**i)
    return r
for m in range(2,7):
    n=2**m
    logfact = lgamma(n+1)/math.log(2) # log2(n!)
    logGL = log2(gl(m))
    w = logGL - (m-1) # borne : w(E_m) >= logGL-(m-1)
```

```
total_lb = logfact - (m-1) # log2(total) >= log2(n!/phi(2^m))
print(m, round(logfact,1), round(logGL,1), round(w,2), round(w/total_lb,2))
# fraction : 0.44, 0.41, 0.27, 0.17, 0.10 -> tend vers 0
```

Remarque 5 (Le sens des deux résultats). Les deux énoncés ne se contredisent pas : E_m devient *absolument* de plus en plus lourd (il faut de plus en plus de bits pour désigner une de ses tables), mais *relativement* de plus en plus léger (cette lourdeur devient une part infime de l'information totale, car le nombre de tables explose bien plus vite). La rareté de l'élémentaire abélien est réelle mais noyée dans une combinatoire qui croît factoriellement.

4 Portée et limites

Remarque 6 (Acquis). *Maximalité* : $E_m = (\mathbb{Z}/2)^m$ maximise w parmi les abéliens (prop. 1), et globalement jusqu'à $m = 3$ seulement (prop. 2). *Bornes* : w n'est pas borné, il croît en m^2 (théorème 3) ; mais la fraction normalisée $w/\log_2$ tables tend vers 0 comme $m/2^m$ (théorème 4). La réponse aux deux questions est donc *non* — avec, à chaque fois, une version restreinte ou asymptotique correcte.

Limites. (i) La maximalité globale au-delà de $m = 3$ demande la classification fine des 2-groupes et de leurs Aut (extraspéciaux) : on signale la contre-tendance sans énumérer. (ii) Les asymptotiques (théorèmes 3 et 4) reposent sur l'ordre dominant (Stirling, $\log_2 |\text{GL}| \sim m^2$) et sur la domination de l'orbite cyclique dans le total — rigoureuses en tendance, à constantes près. (iii) Tout est *combinatoire* (comptage de tables étiquetées) : w mesure une rareté, non une complexité algébrique intrinsèque.