La question de Halley à Newton

Hugues GENVRIN

2014

1 Raisonnements énergétiques

L'énergie totale d'un système clos est constante. Avant d'aborder l'énergie sous l'angle physique, introduisons-la par la notion de travail. Le travail et la chaleur ont été définis comme deux vecteurs de transport de l'énergie [?]. Nous nous plaçons dans le cas de systèmes où l'énergie n'est pas qualitativement dégradée : nous excluons donc ceux où l'entropie intervient, autrement dit nous supposons une entropie constante — plus réellement négligeable, ou du moins sans action sur les relations entre éléments du système. C'est le cas du système mécanique étudié, dont les entités sont représentées par les quantités P et S. Ainsi posé, le travail peut servir à mesurer les variations d'énergie.

Définition 1. *Un travail élémentaire W_δ est le produit scalaire d'une force $\boldsymbol{F}$ par un élément de chemin $d\boldsymbol{\ell}$.*

Sur un élément de chemin $d\boldsymbol{\ell}$, le travail est fourni par une unique force résultante $\boldsymbol{F}_r$; à ce travail élémentaire correspond une variation élémentaire de travail δW. On peut donc poser $\delta W = W_\delta$.

Par ailleurs, les domaines de l'action et de la dynamique déterminent une seule et même entité : ils ne constituent pas deux états séparés du système, mais une unique représentation systémique.

En somme, un raisonnement énergétique consiste à attribuer une énergie globale au système, ses variations sur les composantes de la dynamique et de l'action rendant compte de l'évolution de la totalité. Il est naturel de scinder les composantes énergétiques selon leur classe.

Classe du travail dynamique. On associe à cette classe les travaux dépendant de la quantité de mouvement. Avec $\boldsymbol{F} = \dfrac{d\boldsymbol{q}}{dt}$ et $d\boldsymbol{\ell} = \boldsymbol{v}\,dt = \dfrac{\boldsymbol{q}}{m}\,dt$:

$$dW = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d\boldsymbol{q}}{dt}\cdot\frac{\boldsymbol{q}}{m}\,dt = \frac{1}{m}\,\boldsymbol{q}\cdot d\boldsymbol{q} = \frac{1}{2m}\,d\big(q^2\big)\,.$$

En intégrant :

$$W = \frac{q^2}{2m}.$$

On retrouve l'expression bien connue $W = \dfrac{1}{2}\,m\,v^2$. La variation de ce travail entre deux états correspond à un travail fourni par la dynamique : on appelle donc cette classe l'*énergie cinétique* $\mathscr{U}_\xi$.

La classe du potentiel. Elle se détermine par les éléments d'action non engagés dans la dynamique. L'énergie mécanique étant constante, à toute variation positive de l'énergie cinétique correspond une variation négative de l'énergie potentielle. On distingue dans cette classe des sous-groupes : l'énergie potentielle de gravitation, et l'énergie potentielle dérivant d'un autre type de potentiel. Les actions concernées ne relèvent pas de la dynamique — donc pas de la quantité de mouvement ; il reste à prendre en compte l'effet des actions engagées uniquement par l'état de départ et l'état d'arrivée, indépendamment du mouvement.

Définition 2 (Force dérivant d'un potentiel [?])**.** *Une force dérive d'un potentiel si sa dépendance au vecteur position* $\boldsymbol{r}$ *est telle que le travail* W *peut toujours s'exprimer comme la différence des valeurs d'une même quantité* $\mathscr{U}(r)$ *évaluée aux points de départ et d'arrivée.*

Si l'on note $\mathscr{U}_\pi$ l'énergie potentielle de notre système, cette définition s'écrit, sous forme vectorielle et sous forme scalaire :

$$\boldsymbol{F} = -\,\nabla\mathscr{U}_\pi = -\sum_i \frac{\partial\mathscr{U}_\pi}{\partial x_i}\,\widehat{\boldsymbol{e}}_i, \qquad \delta W = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\ell} = -\,d\mathscr{U}_\pi.$$

Le travail d'une telle force ne dépend donc que des états extrêmes : $W_{A\to B} = \mathscr{U}_\pi^A - \mathscr{U}_\pi^B$.

Soient deux états A et B et un état de référence f. Alors :

$$\mathscr{U}_\pi^B - \mathscr{U}_\pi^A = \big(\mathscr{U}_\pi^B - \mathscr{U}_\pi^f\big) - \big(\mathscr{U}_\pi^A - \mathscr{U}_\pi^f\big) = \Delta_{f\to B}\,\mathscr{U}_\pi - \Delta_{f\to A}\,\mathscr{U}_\pi.$$

On convient que $\mathscr{U}_\pi^f = 0$, ce qui donne $\mathscr{U}_\pi^A = -\displaystyle\int_{r(f)}^{r(A)} \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$. Pour fixer cette référence, on prend le point d'application à distance infinie, $r(f) = \infty$: c'est cohérent, puisque l'action d'une force décroissante tend vers zéro à grande distance, et le potentiel avec elle. D'où :

Proposition 1. $\mathscr{U}_\pi^A = -\displaystyle\int_\infty^r \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{\ell}$.

Sur le signe. Le signe « moins » est essentiel et sera repris tel quel à la section 2. Pour une force attractive centrale $\boldsymbol{F} = \dfrac{k\,m}{r^2}\,(-\widehat{\boldsymbol{r}})$, dont la composante radiale vaut $F_r = -\dfrac{k\,m}{r^2}$, on obtient bien une énergie potentielle négative s'annulant à l'infini :

$$\mathscr{U}_\pi^A = -\int_\infty^r F_r\,dr = -\int_\infty^r \left(-\frac{k\,m}{r'^2}\right) dr' = k\,m\left[-\frac{1}{r'}\right]_\infty^r = -\frac{k\,m}{r}.$$

La variation d'énergie potentielle entre deux états s'écrit enfin :

$$d\mathscr{U}_\pi = d\mathscr{U}_\pi^B - d\mathscr{U}_\pi^A.$$

2 Sur une question que soumit Halley à Newton

En août 1684, à Cambridge, Halley interrogea Newton sur la nature de la courbe décrite par une planète si la force d'attraction vers le Soleil était proportionnelle à l'inverse du carré de sa distance. Newton répondit aussitôt que la trajectoire serait elliptique. Halley en demandant la justification, Newton la fournit en deux temps : d'abord dans un manuscrit qu'il lui adressa, puis dans les « Principes mathématiques de la philosophie naturelle », parus en première édition en 1687. Que Newton ait pu répondre si vite ne tient pas à un trait de génie soudain : la question avait déjà été abordée avec Wren et Hooke lors d'une réunion de la Royal Society en 1684.

Ainsi s'amorcèrent les grandes découvertes de Newton en mécanique, qui le conduisirent à une formulation axiomatique d'où surgissent la loi d'inertie, la relation fondamentale de la dynamique, la loi de l'action et de la réaction et la loi de la gravitation universelle.

Nous nous proposons de montrer l'équivalence propositionnelle entre :

1. Pr_1 : une planète décrit une trajectoire elliptique dont le Soleil occupe un foyer ;
2. Pr_2 : elle est soumise à une force centrale en $\frac{1}{r^2}$ dirigée vers le Soleil.

Structure de la démonstration. Une équivalence se prouve en deux implications, qu'il convient de ne pas confondre. La présente section établit le *sens direct* $Pr_2 \Rightarrow Pr_1$: en supposant une force centrale en $\frac{1}{r^2}$ (et une énergie mécanique négative), on montre que la trajectoire est une ellipse de foyer le centre attracteur. La section 3 établira la *réciproque* $Pr_1 \Rightarrow Pr_2$. C'est seulement cette dernière qui autorise à *déduire* la loi de force des orbites elliptiques observées par Kepler ; nous y reviendrons en fin de section.

2.1 Sens direct : une force centrale en $1/r^2$ engendre une ellipse

On appelle P la planète et S le Soleil, rapportés à un plan cartésien centré en S. La distance entre S et P est notée r, et le vecteur position $\boldsymbol{SP} = r\,\widehat{\boldsymbol{r}}$, où $\widehat{\boldsymbol{r}}$ est le vecteur unitaire orienté de S vers P.

Soit $\boldsymbol{F}$ la force d'attraction exercée par le Soleil sur P. On la suppose centrale et d'intensité proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$; pour que la trajectoire soit indépendante de la masse, le théorème fondamental de la dynamique impose que $\boldsymbol{F}$ soit proportionnelle à m. On pose donc :

$$\boldsymbol{F} = \frac{k\,m}{r^2}\,(-\widehat{\boldsymbol{r}}),$$

où k est un paramètre indépendant de r, que nous déterminerons.

2.1.1 Expression de l'énergie mécanique

L'énergie cinétique vaut $\mathscr{U}_\xi = \dfrac{q^2}{2m}$, où q désigne la norme de la quantité de mouvement. L'énergie potentielle s'obtient comme à la section 1 :

$$\mathscr{U}_\pi = \int_\infty^r \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = -\,k\,m \int_\infty^r \frac{1}{r^2}\,dr = -\,\frac{k\,m}{r}.$$

L'énergie mécanique du système, $\mathscr{U}_\kappa = \mathscr{U}_\xi + \mathscr{U}_\pi$, s'écrit donc :

$$\mathscr{U}_\kappa = \frac{q^2}{2m} - \frac{k\,m}{r}.$$

Conservation du moment cinétique. Posons $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{q}$. Comme $\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ et $\dfrac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{F}$, on a :

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\wedge\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}\wedge\frac{d\boldsymbol{q}}{dt} = \boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{F}.$$

Le premier produit vectoriel s'annule car $\boldsymbol{v}$ et $\boldsymbol{q} = m\boldsymbol{v}$ sont colinéaires ; le second car $\boldsymbol{F}$ est centrale, donc colinéaire à $\boldsymbol{r}$. Ainsi $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt} = \boldsymbol{0}$, et $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_0$ est un vecteur constant. Sa norme vaut

$$\|\boldsymbol{L}_0\| = q\, r\, \sin\theta,$$

où θ est l'angle entre $\boldsymbol{r}$ et $\boldsymbol{q}$. On en tire $q = \dfrac{L_0}{r\,\sin\theta}$, que nous reportons dans l'énergie mécanique.

Orbite liée. L'orbite d'une planète est fermée et périodique : c'est une orbite *liée*, ce qui se traduit par une énergie mécanique négative. On écrit donc $\mathscr{U}_\kappa = -\,|\mathscr{U}_\kappa|$. En substituant q :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\cdot\frac{L_0^2}{m\,r^2\sin^2\theta} - \frac{k\,m}{r} = -\,|\mathscr{U}_\kappa| \\ \iff &\frac{L_0^2}{2\,m\,|\mathscr{U}_\kappa|\,r^2\sin^2\theta} - \frac{k\,m}{|\mathscr{U}_\kappa|\,r} = -1. \end{aligned}$$

Posons :

$$\left.\begin{aligned} b^2 &= \frac{L_0^2}{2\,m\,|\mathscr{U}_\kappa|} \\ 2a &= \frac{k\,m}{|\mathscr{U}_\kappa|} \end{aligned}\right\} \quad \text{(ce seront les demi-axes de notre ellipse).}$$

On obtient alors une relation qui traduit une propriété du mouvement sous l'hypothèse d'une force centrale en $\frac{1}{r^2}$:

$$\boxed{\frac{b^2}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2a}{r} = -1} \qquad (\mathscr{G})$$

2.2 Cette relation est l'équation d'une ellipse de foyer S

Considérons une ellipse $\mathscr{E}$ dans le plan $\mathscr{P}$, rapportée à un repère centré en $O = F$, premier foyer. On note $r = d(F;P)$ la distance d'un point P de l'ellipse au premier foyer, et $r' = d(P;F')$ sa distance au second foyer F'. Par définition de l'ellipse, $r + r' = 2a$, où a est le demi-grand axe. La figure 1 illustre l'argumentation.

Soit $\mathscr{T}$ la tangente à $\mathscr{E}$ en P, et ϕ l'angle qu'elle fait avec la droite (PF). Par la propriété de réflexion de l'ellipse, la tangente fait le même angle avec les

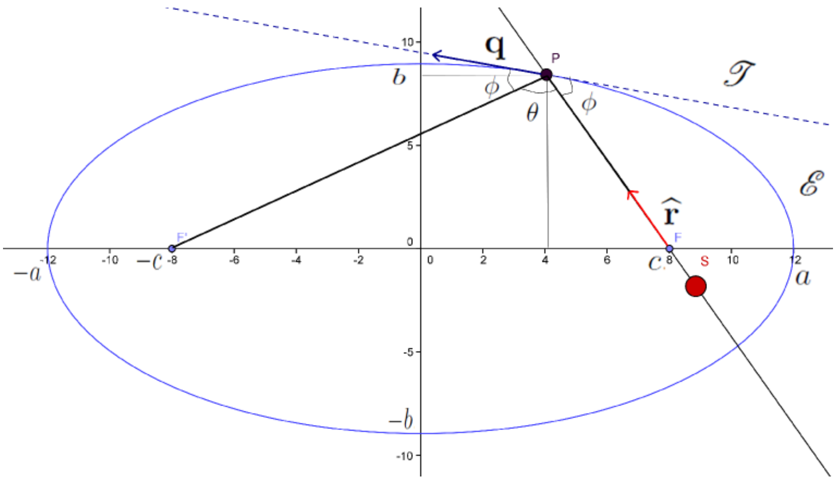

FIGURE 1 – Caractéristiques d'une ellipse : $d(P;F) + d(P;F') = 2a$.

deux rayons focaux : $\phi = \big(\widehat{\mathscr{T};(PF)}\big) = \big(\widehat{\mathscr{T};(PF')}\big)$. Les deux rayons étant situés de part et d'autre de la tangente, l'angle au sommet P du triangle (F,P,F') vaut $\widehat{FPF'} = \pi - 2\phi$.

Dans ce triangle, $d(P;F) = r$, $d(P;F') = r'$ et $d(F;F') = 2c$ (distance inter-foyers). La loi des cosinus donne :

$$(2c)^2 = r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\cos(\pi - 2\phi).$$

Or $\cos(\pi - 2\phi) = -\cos(2\phi) = 2\sin^2\phi - 1$. D'où :

$$\begin{aligned}
4c^2 &= r^2 + r'^2 - 2\,r\,r'\,(2\sin^2\phi - 1)\\
&= r^2 + r'^2 + 2\,r\,r' - 4\,r\,r'\sin^2\phi\\
&= (r + r')^2 - 4\,r\,r'\sin^2\phi\\
&= 4a^2 - 4\,r\,r'\sin^2\phi.
\end{aligned}$$

On en tire $r\,r'\sin^2\phi = a^2 - c^2 = b^2$, puis, avec $r' = 2a - r$:

$$(2a - r)\sin^2\phi = \frac{b^2}{r} \iff \frac{2a}{r} - 1 = \frac{b^2}{r^2\sin^2\phi} \iff \frac{b^2}{r^2\sin^2\phi} - \frac{2a}{r} = -1. \qquad (\mathscr{E})$$

Identification des deux relations. L'angle θ de la mécanique est l'angle entre la position $\boldsymbol{r}$ et la quantité de mouvement $\boldsymbol{q}$. Comme $\boldsymbol{q}$ est colinéaire à la vitesse, donc à la tangente $\mathscr{T}$, et que $\boldsymbol{r}$ est opposé à la direction $(P \to F)$, on a $\theta = \pi - \phi$, d'où $\sin\theta = \sin\phi$. Les relations $(\mathscr{G})$ et $(\mathscr{E})$ sont alors *identiques*.

Cette équation décrit en réalité une conique, dont la nature dépend de l'excentricité $e = \dfrac{c}{a}$: cercle ($e = 0$), ellipse ($0 < e < 1$), parabole ($e = 1$)

ou hyperbole ($e > 1$). L'hypothèse d'une orbite liée ($\mathscr{U}_\kappa < 0$) correspond exactement aux cas $e < 1$, c'est-à-dire à une trajectoire fermée — cercle ou ellipse. Nous avons donc démontré :

Proposition 2 (Sens direct)**.** *Un point matériel soumis à une force centrale en $\dfrac{1}{r^2}$ dirigée vers un centre fixe S, et d'énergie mécanique négative, décrit une ellipse dont S occupe un foyer. Autrement dit, $Pr_2 \Rightarrow Pr_1$.*

Vers la conclusion physique. Les observations de Kepler ont révélé des orbites elliptiques pour les planètes du système solaire. Conclure de ce seul fait que les forces sont en $\frac{1}{r^2}$ relève de la *réciproque* $Pr_1 \Rightarrow Pr_2$, et non du sens direct établi ici : une orbite elliptique, à elle seule, ne fixe pas la loi de force tant qu'on n'a pas précisé que le centre d'attraction occupe un *foyer*. C'est l'objet de la section 3. La proposition de Kepler–Newton ci-dessous n'est donc justifiée qu'une fois cette réciproque démontrée.

Proposition 3 (Kepler–Newton)**.** *Les forces d'attraction exercées par le Soleil sur les planètes du système solaire sont proportionnelles à l'inverse du carré de la distance qui les sépare du Soleil.*

3 Implications de la réciproque : expression de la force centrale

Nous établissons à présent l'implication manquante $Pr_1 \Rightarrow Pr_2$: si la trajectoire d'un point matériel P de masse m est une ellipse *dont le centre de force occupe l'un des foyers*, alors la force centrale qui s'exerce sur P est nécessairement proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$.

La condition décisive. Il importe de souligner que l'hypothèse « centre de force au foyer » n'est pas accessoire : c'est elle qui détermine la loi de force. Une même ellipse parcourue sous l'action d'une force centrée en son *centre* (et non en un foyer) conduirait, par le calcul ci-dessous, à une loi en $\boldsymbol{F} \propto r$ (loi de Hooke). C'est donc la position du centre attracteur qui tranche, et c'est précisément le point que la question de Halley mettait en jeu.

3.1 Caractère central et loi des aires

Le mouvement étant plan, on le rapporte aux coordonnées polaires (r, θ) centrées sur le foyer S, de base mobile orthonormée directe $(\widehat{\boldsymbol{r}}, \widehat{\boldsymbol{\theta}})$. Cette base tournant avec le point, ses vecteurs dépendent du temps par l'intermédiaire de θ :

$$\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot\theta\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad \frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\,\dot\theta\,\widehat{\boldsymbol{r}}.$$

Vitesse et accélération. En dérivant la position $\boldsymbol{r} = r\,\widehat{\boldsymbol{r}}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dot r\,\widehat{\boldsymbol{r}} + r\,\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt} = \dot r\,\widehat{\boldsymbol{r}} + r\dot\theta\,\widehat{\boldsymbol{\theta}}.$$

En dérivant une seconde fois, et en regroupant les composantes radiale et orthoradiale :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \ddot r\,\widehat{\boldsymbol{r}} + \dot r\,\frac{d\widehat{\boldsymbol{r}}}{dt} + \big(\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot\theta\,\frac{d\widehat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}\\ &= \big(\ddot r - r\dot\theta^2\big)\widehat{\boldsymbol{r}} + \big(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta\big)\widehat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}$$

Conséquence du caractère central. La force étant dirigée selon $\widehat{\boldsymbol{r}}$, le théorème fondamental de la dynamique annule la composante orthoradiale de l'accélération :

$$r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta = 0 \iff \frac{1}{r}\,\frac{d}{dt}\Big(r^2\dot\theta\Big) = 0 \iff r^2\dot\theta = C \quad \text{(constante)}.$$

Interprétation vectorielle et lien avec le moment cinétique. Le même résultat s'obtient sans coordonnées. Pour une force centrale, $\boldsymbol{a}$ est colinéaire à $\boldsymbol{r}$, donc

$$\frac{d}{dt}\big(\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}\big) = \underbrace{\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{v}}_{=\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0},$$

et $\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}$ est un vecteur constant, de norme $\|\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}\| = r^2\dot\theta = C$. On retrouve ainsi la conservation du moment cinétique introduite à la section 2 : $\boldsymbol{L}_0 = \boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{q} = m\,\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{v}$, soit

$$\|\boldsymbol{L}_0\| = m\,C \qquad \iff \qquad C = \frac{L_0}{m}.$$

Enfin, l'aire balayée par le rayon vecteur pendant dt vaut $d\mathscr{A} = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$, d'où la vitesse aréolaire

$$\boxed{\frac{d\mathscr{A}}{dt} = \frac{1}{2}\,r^2\dot\theta = \frac{C}{2} = \text{constante}}$$

C'est la *loi des aires* (deuxième loi de Kepler) : le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux.

3.2 La formule de Binet

On cherche à exprimer la force en fonction de la seule géométrie de la trajectoire $r(\theta)$. Le changement de variable adapté est $u = \dfrac{1}{r}$, avec θ pour variable indépendante. La loi des aires $r^2\dot\theta = C$ donne d'abord

$$\dot\theta = \frac{C}{r^2} = C\,u^2.$$

On exprime alors les dérivées temporelles de r au moyen de u. Comme $r = \dfrac{1}{u}$, on a $\dfrac{dr}{d\theta} = -\dfrac{1}{u^2}\dfrac{du}{d\theta}$, puis

$$\dot r = \frac{dr}{d\theta}\,\dot\theta = \left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)\left(Cu^2\right) = -\,C\,\frac{du}{d\theta},$$

$$\ddot r = \frac{d}{dt}\left(-C\,\frac{du}{d\theta}\right) = -C\,\frac{d^2u}{d\theta^2}\,\dot\theta = -C\,\frac{d^2u}{d\theta^2}\left(Cu^2\right) = -\,C^2u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2}.$$

D'autre part, $r\dot\theta^2 = \dfrac{1}{u}\left(Cu^2\right)^2 = C^2u^3$. La composante radiale de l'accélération devient donc

$$a_r = \ddot r - r\dot\theta^2 = -\,C^2u^2\,\frac{d^2u}{d\theta^2} - C^2u^3 = -\,C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right).$$

La composante orthoradiale étant nulle (loi des aires), l'accélération est purement radiale, et en projetant $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ sur $\widehat{\boldsymbol{r}}$ on obtient la **formule de Binet** (relative à la force) :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\,m\,C^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right)\widehat{\boldsymbol{r}} \qquad \text{avec} \quad u = \frac{1}{r}}$$

Remarque (formule de Binet pour la vitesse). Le même changement de variable donne, à titre de contrôle, $v^2 = \dot r^2 + r^2\dot\theta^2 = C^2\left[\left(\dfrac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2\right]$, expression utile pour relier directement la vitesse à la trajectoire, mais dont nous n'aurons pas l'usage dans la suite.

3.3 Équation focale de l'ellipse et conclusion

Une ellipse rapportée à l'un de ses foyers admet pour équation polaire

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = \frac{1}{p}\left(1 + e\cos\theta\right),$$

où $e = \dfrac{c}{a}$ est l'excentricité ($0 \leq e < 1$ pour une ellipse) et $p = \dfrac{b^2}{a}$ le paramètre (demi-latus rectum). On dérive deux fois :

$$\frac{du}{d\theta} = -\,\frac{e}{p}\sin\theta, \qquad \frac{d^2u}{d\theta^2} = -\,\frac{e}{p}\cos\theta,$$

d'où la combinaison qui apparaît dans la formule de Binet :

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{e}{p}\cos\theta + \frac{1}{p}\big(1 + e\cos\theta\big) = \frac{1}{p}.$$

Ce terme est *constant* : c'est là tout le ressort de la démonstration. En le reportant dans la formule de Binet :

$$\boldsymbol{F} = -\,m\,C^2u^2 \cdot \frac{1}{p}\,\widehat{\boldsymbol{r}} = -\,\frac{m\,C^2}{p} \cdot \frac{1}{r^2}\,\widehat{\boldsymbol{r}}.$$

La force est dirigée vers le foyer S (signe négatif, donc attractive) et son intensité varie comme l'inverse du carré de la distance :

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\,\frac{k\,m}{r^2}\,\widehat{\boldsymbol{r}}, \qquad k = \frac{C^2}{p} = \frac{C^2\,a}{b^2} \in \mathbb{R}_*^+}$$

On retrouve exactement la forme postulée au début de la section 2, $\boldsymbol{F} = \dfrac{k\,m}{r^2}(-\widehat{\boldsymbol{r}})$, et la constante k est ici explicitée en fonction des paramètres géométriques de l'orbite et de la constante des aires.

Proposition 4 (Réciproque)**.** *Si un point matériel décrit une ellipse sous l'action d'une force centrale dirigée vers l'un des foyers de cette ellipse, alors cette force est proportionnelle à l'inverse du carré de la distance au foyer.*

Bilan de l'équivalence. La section 2 a établi $Pr_2 \Rightarrow Pr_1$ (une force en $1/r^2$ d'énergie négative engendre une orbite elliptique) ; la présente section établit $Pr_1 \Rightarrow Pr_2$ (une orbite elliptique de force focale impose la loi en $1/r^2$). Les deux implications réunies donnent l'équivalence $Pr_1 \Leftrightarrow Pr_2$ recherchée, et répondent ainsi pleinement à la question soumise par Halley à Newton.