

# Intégrales divergentes et régularisation par stratification

Troisième volet du programme du grain :  
Appliqué aux divergences

Hugues Genvrin

22 mai 2026

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Définition de l'intégrale stratifiée</b>	<b>3</b>
1	Rappel : la double mosaïque de $\tilde{\mathbb{R}}^+$	3
2	La fonction discrétisée	3
3	L'intégrale stratifiée	3
4	Compatibilité avec l'intégrale classique	4
5	Premiers exemples	4
<b>II</b>	<b>Hiérarchie des divergences</b>	<b>4</b>
6	Strate de régularisation	4
7	Divergences polynomiales	5
8	Divergences inverses (UV)	5
9	Divergences logarithmiques	6
10	Divergences exponentielles	6
<b>III</b>	<b>Régularisation par projection</b>	<b>6</b>
11	La projection standard comme régularisation	7
12	Régularisation des divergences polynomiales	7
13	Régularisation des divergences logarithmiques	7
<b>IV</b>	<b>Borne critique et convergence stratifiée</b>	<b>7</b>
14	$\sigma$ comme fonction de la borne	7
15	La borne critique	7

<b>16 Bornes critiques pour les classes principales</b>	<b>8</b>
<b>17 Hiérarchie de croissance par bornes critiques</b>	<b>8</b>
<b>18 Régularisation à la borne critique</b>	<b>8</b>

# Introduction

Ce volet exploite la structure de *l'Axiomatique du grain* et de *Symétrie de résolution* pour traiter les *intégrales divergentes*. L'idée directrice : une somme de Riemann calculée sur la double mosaïque de  $\widetilde{\mathbb{R}}^+$  est toujours *finie* comme élément de la hiérarchie auto-engendrée. Ce qui apparaît en analyse classique comme une divergence à l'infini devient ici une simple valeur dans une strate  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ . La projection finale  $\widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$  joue alors le rôle d'une *régularisation intrinsèque*.

Le document est organisé en quatre parties :

- **Partie I** : définition rigoureuse de l'intégrale stratifiée et compatibilité avec l'intégrale classique.
- **Partie II** : hiérarchie des divergences (polynomial, logarithmique, exponentiel, double-exponentiel).
- **Partie III** : régularisation par projection, analogies avec les méthodes classiques.
- **Partie IV** : raffinement par la borne critique et convergence stratifiée.

**Référence implicite.** Axiomatique du grain et Symétrie de résolution.

**Notations communes.**  $L_\infty := 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ ,  $\Delta x := \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ ,  $\iota$  pour la projection standard,  $\iota$  pour l'involution  $X \mapsto 1/X$ . On appelle  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ , la restriction ou le prolongement de  $\widetilde{\mathbb{R}}_+$  à  $[0; 2^{+kn_\infty}]$ .

**Convention sur la stratification.** On utilise la définition stricte  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ . En conséquence, un élément  $c \cdot 2^{kn_\infty}$  avec  $c$  standard  $> 1$  n'est *pas* dans  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ , mais bien dans  $\widetilde{\mathbb{R}}|_{k+1}$  (puisque  $c \cdot 2^{kn_\infty} \leq 2^{n_\infty} \cdot 2^{kn_\infty} = 2^{(k+1)n_\infty}$ ). Cette précision est centrale pour les calculs de strate qui suivent.

## Première partie

# Définition de l'intégrale stratifiée

## 1 Rappel : la double mosaïque de $\widetilde{\mathbb{R}}^+$

$\widetilde{\mathbb{R}}^+$  est le déploiement de  $C_1$  à la résolution  $-2n_\infty$ , segment  $[0, L_\infty[$  avec  $L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$ , doté de la double stratification :

- **Niveau grossier** ( $-n_\infty$ ) :  $2^{n_\infty}$  positions ordinales, chacune occupant une longueur  $2\pi$ .
- **Niveau fin** ( $-2n_\infty$ ) :  $2^{2n_\infty}$  sous-positions, chacune de finesse  $\Delta x = \frac{2\pi}{2^{n_\infty}}$ .

On note  $x_{N,j} := (N-1) \cdot 2\pi + j \cdot \Delta x$  et  $\mathcal{X} := \{x_{N,j}\}$  l'ensemble des  $2^{2n_\infty}$  sous-positions de la mosaïque fine.

## 2 La fonction discrétisée

**Définition 1** (Fonction admissible). *Une fonction  $f : \widetilde{\mathbb{R}} \rightarrow \widetilde{\mathbb{R}}$  est admissible si elle est définie sur l'intervalle d'intégration considéré et si, pour toute sous-position  $x_{N,j} \in \mathcal{X}$ ,  $f(x_{N,j})$  est un élément bien défini de  $\widetilde{\mathbb{R}}$  (ou d'une extension finie de la hiérarchie auto-engendrée).*

## 3 L'intégrale stratifiée

**Définition 2** (Intégrale stratifiée). *Soit  $f$  admissible et  $[a, b]$  inclus dans  $\widetilde{\mathbb{R}}$  avec  $a, b$  aux positions de la mosaïque. L'intégrale stratifiée de  $f$  sur  $[a, b]$  est*

$$\int_a^{\widetilde{b}} f(x) dx := \sum_{x_{N,j} \in [a, b[} f(x_{N,j}) \cdot \Delta x.$$

**Proposition 1** (Bonne définition). *Pour  $f$  admissible et  $[a, b]$  borné dans  $\tilde{\mathbb{R}}$ , la somme est finie (au plus  $2^{2n_\infty}$  termes), donc bien définie comme élément d'une strate suffisamment haute de la hiérarchie auto-engendrée.*

## 4 Compatibilité avec l'intégrale classique

**Théorème 1** (Compatibilité standard). *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue Riemann-intégrable sur un intervalle standard  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Alors*

$$\int_a^{\tilde{b}} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \varepsilon$$

où  $\varepsilon$  est un infinitésimal. En particulier  $\text{st}(\int_a^{\tilde{b}} f) = \int_a^b f$ .

*Démonstration.* La somme de Riemann classique à pas  $\Delta x$  converge vers  $\int_a^b f$  avec vitesse contrôlée :  $|S_{\Delta x}(f) - \int_a^b f| \leq C\Delta x(b-a)$  pour une constante  $C > 0$  liée au module de continuité de  $f$  sur le compact  $[a, b]$ .

Dans  $\tilde{\mathbb{R}}$ ,  $\Delta x = \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}}$  est un infinitésimal inversible :  $\text{st}(\Delta x) = 0$  mais son inverse  $\frac{2^{2n_\infty}}{2\pi} \in \tilde{\mathbb{R}}|_1$  existe (le rapport  $\Delta x / \frac{1}{L_\infty} = (2\pi)^2 \approx 39,48$  est largement au-dessus du seuil d'inversibilité). Donc  $C\Delta x(b-a)$  est lui-même infinitésimal (standard fois infinitésimal). La somme de Riemann coïncide avec  $\tilde{f}$  sur les sous-positions de  $[a, b]$ , d'où le résultat.  $\square$

## 5 Premiers exemples

**Proposition 2** ( $\tilde{f}1$  sur tout  $\tilde{\mathbb{R}}^+$ ).  $\int_0^{L_\infty} 1 dx = L_\infty = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$ .

*Démonstration.*  $2^{2n_\infty}$  termes valant  $\Delta x$  chacun, soit  $2^{2n_\infty} \cdot \frac{2\pi}{2^{2n_\infty}} = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty} = L_\infty$ .  $\square$

**Remarque 1** (Strate).  $L_\infty = 2\pi \cdot 2^{2n_\infty}$  a un préfacteur  $2\pi > 1$  standard. Par la convention sur la stratification (introduction),  $L_\infty \notin \tilde{\mathbb{R}}|_1$ , mais  $L_\infty \in \tilde{\mathbb{R}}|_2$  (puisque  $2\pi < 2^{2n_\infty}$ , donc  $L_\infty < 2^{2n_\infty}$ ).

L'intégrale de la fonction 1 sur tout  $\tilde{\mathbb{R}}^+$  est donc dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$ .

**Proposition 3** ( $\tilde{f}x$  sur tout  $\tilde{\mathbb{R}}^+$ ).

$$\int_0^{L_\infty} x dx = \frac{L_\infty^2}{2} + O(L_\infty \cdot \Delta x) \sim 2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}.$$

*Démonstration.* Somme de Riemann pour  $x \mapsto x : \sum_{i=0}^{N-1} i\Delta x \cdot \Delta x = \frac{N(N-1)}{2} \Delta x^2$  avec  $N = 2^{2n_\infty}$ . On obtient  $\frac{(2^{2n_\infty})(2^{2n_\infty}-1)}{2} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2^{2n_\infty}} = \frac{(2^{2n_\infty}-1)(2\pi)^2}{2} \sim 2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}$ .  $\square$

**Remarque 2** (Strate).  $2\pi^2 \cdot 2^{2n_\infty}$  a un préfacteur  $2\pi^2 \approx 19,74$  standard. Donc, par la convention, c'est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_3$ , pas  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$  (le préfacteur fait basculer d'une strate).

## Deuxième partie

# Hiérarchie des divergences

## 6 Strate de régularisation

**Définition 3** (Strate de régularisation). *Soit  $f$  admissible positive. La strate de régularisation de  $\int f$ , notée  $\sigma(f)$ , est le plus petit  $k \in \mathbb{N}$  tel que*

$$\int_0^{L_\infty} f(x) dx \in \tilde{\mathbb{R}}|_k.$$

**Remarque 3** (Choix de la dénomination). *Le terme strate de régularisation reflète l'usage :  $\sigma(f)$  est la profondeur stratale du contre-terme à utiliser pour ramener la valeur dans  $\mathbb{R}$  (voir Partie III). Plutôt que de caractériser la fonction par un défaut,  $\sigma(f)$  caractérise la ressource stratale nécessaire.*

## 7 Divergences polynomiales

**Proposition 4** (Polynômes de degré  $p$ ). *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  standard. Alors*

$$\int_0^{\tilde{L}_\infty} x^p dx = \frac{L_\infty^{p+1}}{p+1} + \varepsilon_p = \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \cdot 2^{(p+1)n_\infty} + \varepsilon_p,$$

avec  $\varepsilon_p$  d'ordre  $L_\infty^p \cdot \Delta x$ , donc strate strictement inférieure.

Strate stricte : le préfacteur  $\frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1}$  est standard  $> 1$  pour  $p \geq 1$ , donc

$$\int_0^{\tilde{L}_\infty} x^p dx \in \tilde{\mathbb{R}}|_{p+2}, \quad \sigma(x^p) = p+2.$$

*Démonstration. Calcul.* Pour  $x_i = i\Delta x$ , la somme de Riemann vaut  $\sum_{i=0}^{N-1} (i\Delta x)^p \Delta x = (\Delta x)^{p+1} \sum_{i=0}^{N-1} i^p$  avec  $N = 2^{2n_\infty}$ . La formule de Faulhaber donne  $\sum i^p = \frac{N^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p}{2} + O(N^{p-1})$ . Donc

$$\int_0^{\tilde{L}_\infty} x^p dx = \frac{(N\Delta x)^{p+1}}{p+1} + \frac{N^p(\Delta x)^{p+1}}{2} + \dots$$

avec  $N\Delta x = L_\infty$ . Le terme dominant est  $\frac{L_\infty^{p+1}}{p+1} = \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1} \cdot 2^{(p+1)n_\infty}$ .

*Strate.* Le préfacteur  $c_p := \frac{(2\pi)^{p+1}}{p+1}$  est standard. Pour  $p = 1$ ,  $c_1 = 2\pi^2 \approx 19,74 > 1$ . Plus généralement,  $c_p > 1$  pour tout  $p \geq 0$ . Donc  $c_p \cdot 2^{(p+1)n_\infty} > 2^{(p+1)n_\infty}$ , ce qui sort de  $\tilde{\mathbb{R}}|_{p+1}$ . En revanche,  $c_p \cdot 2^{(p+1)n_\infty} < 2^{n_\infty} \cdot 2^{(p+1)n_\infty} = 2^{(p+2)n_\infty}$  (puisque  $c_p$  est standard et  $2^{n_\infty}$  transfini), donc le résultat est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_{p+2}$ .

Donc  $\sigma(x^p) = p+2$ . □

**Remarque 4** (Conséquence du décalage). *La convention stricte donne  $\sigma(x) = 3$ ,  $\sigma(x^2) = 4$ , etc. Ce décalage par rapport à une lecture intuitive « par ordre de grandeur » (qui donnerait  $\sigma = p+1$ ) reflète le fait que les préfacteurs analytiques standards consomment une strate supplémentaire.*

## 8 Divergences inverses (UV)

**Proposition 5** (Fonctions inverses). *Soit  $q \in \mathbb{N}^*$  standard,  $q \geq 1$ . Alors*

$$\int_{\Delta x}^1 \frac{dx}{x^q} \sim \begin{cases} \zeta(q) \cdot 2^{(q-1)n_\infty} / (2\pi)^{q-1} & \text{si } q \geq 2, \\ n_\infty \cdot \ln 2 + O(1) & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Strates strictes :

- $q \geq 2$  : le préfacteur  $\zeta(q)/(2\pi)^{q-1}$  peut être  $> 1$  ou  $< 1$  selon  $q$ . Pour  $q = 2$ ,  $\zeta(2)/(2\pi) = \pi^2/6/(2\pi) = \pi/12 \approx 0,26 < 1$  : le résultat est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$ . Pour  $q$  grand,  $\zeta(q) \rightarrow 1$  et  $(2\pi)^{q-1} \rightarrow \infty$ , donc toujours  $< 1$  : reste dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$ .
- $q = 1$  : préfacteur  $\ln 2 \approx 0,69 < 1$  multipliant  $n_\infty$ , donc dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_1$ .

*Démonstration.* Cas  $q \geq 2$ .  $\int_{\Delta x}^1 x^{-q} dx = \sum_{i=1}^{N_1} (i\Delta x)^{-q} \Delta x = (\Delta x)^{1-q} \sum_i i^{-q} \sim \zeta(q) \cdot (\Delta x)^{1-q}$  avec  $N_1 = 1/\Delta x = 2^{n_\infty}/(2\pi)$ . Donc  $\sim \zeta(q) \cdot \frac{2^{(q-1)n_\infty}}{(2\pi)^{q-1}}$ .

Cas  $q = 1$ .  $\int_{\Delta x}^1 \frac{dx}{x} = \sum_{i=1}^{N_1} \frac{1}{i} \sim \ln N_1 = n_\infty \ln 2 - \ln(2\pi)$ .

*Strate dans le cas  $q = 1$ .* Le résultat est  $\sim \ln 2 \cdot n_\infty$  avec  $\ln 2 < 1$  standard. Vérifions :  $\ln 2 \cdot n_\infty < n_\infty$  mais  $> 0$ , donc reste dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_1$  (qui contient tout ce qui est  $\leq 2^{n_\infty}$ , et  $n_\infty \ll 2^{n_\infty}$ ).

*Strate dans le cas  $q \geq 2$ .* Le préfacteur  $\zeta(q)/(2\pi)^{q-1}$  est standard, calculons-le pour  $q = 2, 3, 4$  :  $\pi^2/(12\pi) = \pi/12 \approx 0,26$  pour  $q = 2$  ;  $\zeta(3)/(4\pi^2) \approx 1,20/39,48 \approx 0,030$  pour  $q = 3$ . Tous  $< 1$ . Donc le résultat reste  $\leq 2^{(q-1)n_\infty}$ , dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_{q-1}$ .  $\square$

## 9 Divergences logarithmiques

**Proposition 6** (Puissances du logarithme). *Soit  $k \in \mathbb{N}$  standard. Alors*

$$\int_1^{\tilde{L}_\infty} (\ln x)^k dx \sim L_\infty \cdot (\ln L_\infty)^k = (2\pi)(n_\infty \ln 2)^k \cdot 2^{n_\infty} + O.$$

*Strate stricte : préfacteur global  $2\pi \cdot (\ln 2)^k$  standard multipliant  $n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty}$ . Pour  $k = 0$  on a  $2\pi > 1$ , donc dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$  ; pour  $k \geq 1$  le facteur  $n_\infty^k$  reste sous-stratal (élément de  $\tilde{\mathbb{R}}|_1$  pour  $k$  standard), donc l'ensemble reste dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$ .*

*Démonstration.*  $\int_1^L (\ln x)^k dx$  a pour terme dominant  $L(\ln L)^k$  par intégration par parties. Pour  $L = L_\infty$ ,  $\ln L_\infty = \ln(2\pi) + n_\infty \ln 2 \sim n_\infty \ln 2$  (terme dominant). Donc  $L_\infty (\ln L_\infty)^k \sim L_\infty (n_\infty \ln 2)^k = 2\pi \cdot (\ln 2)^k \cdot n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty}$ .

*Strate.* Pour  $k$  standard,  $n_\infty^k \leq 2^{n_\infty}$  par les comparaisons fondamentales (*Axiomatique du grain*). Donc  $n_\infty^k \cdot 2^{n_\infty} \leq 2^{2n_\infty}$ , dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$ . Le préfacteur  $2\pi(\ln 2)^k$  est standard et ne fait pas basculer si la borne  $2^{2n_\infty}$  n'est pas atteinte ; pour  $k$  standard fixé,  $n_\infty^k \ll 2^{n_\infty}$  donc le résultat reste effectivement  $< 2^{2n_\infty}$ , dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_2$ .  $\square$

## 10 Divergences exponentielles

**Proposition 7** (Exponentielle pure). *Soit  $c > 0$  standard. Alors*

$$\int_0^{\tilde{L}_\infty} e^{cx} dx \sim \frac{e^{cL_\infty}}{c} = \frac{2^{\alpha \cdot 2^{n_\infty}}}{c}$$

avec  $\alpha = c \cdot 2\pi / \ln 2$  standard.

*Strate : l'exposant  $\alpha \cdot 2^{n_\infty}$  dépasse  $kn_\infty$  pour tout  $k$  standard, donc  $2^{\alpha \cdot 2^{n_\infty}}$  dépasse toutes les strates  $\tilde{\mathbb{R}}|_k$  de  $\tilde{\mathbb{R}}$ . Le résultat est dans  $\tilde{\mathbb{R}}$  et au-delà.*

*Démonstration.*  $\int_0^L e^{cx} dx = (e^{cL} - 1)/c$ . Pour  $L = L_\infty = 2\pi \cdot 2^{n_\infty}$  :  $e^{cL_\infty} = e^{2\pi c \cdot 2^{n_\infty}} = 2^{(2\pi c / \ln 2) \cdot 2^{n_\infty}}$ . L'exposant  $\alpha \cdot 2^{n_\infty}$  avec  $\alpha$  standard est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_1$ . Donc  $2^{\tilde{\mathbb{R}}|_1}$  donne un objet hors de toutes les strates finies de  $\tilde{\mathbb{R}}$ , dans  $\tilde{\mathbb{R}}$ .  $\square$

**Corollaire 1** (L'exponentielle bascule au-delà de  $\tilde{\mathbb{R}}$ ).  $\sigma(e^{cx}) = \infty$  (au sens : dépasse toute strate  $\tilde{\mathbb{R}}|_k$  de  $\tilde{\mathbb{R}}$ ).

## Troisième partie

# Régularisation par projection

## 11 La projection standard comme régularisation

**Définition 4** (Régularisation par projection). *Pour  $f$  admissible et  $\tilde{f} \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$  avec  $k \geq 1$ ,*

$$\text{Reg}_\sigma \left( \int f \right) := \text{st} \left( \frac{\tilde{\int}_0^{L_\infty} f(x) dx}{\lambda} \right),$$

où  $\lambda \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$  est un contre-terme choisi pour que le rapport tombe dans  $\mathbb{R}$ .

## 12 Régularisation des divergences polynomiales

**Théorème 2** (Régularisation polynomiale). *Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  standard et  $\lambda_p := \frac{L_\infty^{p+1}}{p+1}$ . Alors*

$$\text{Reg}_\sigma \left( \int_0^\infty x^p dx \right) = 1.$$

*Démonstration.*  $\tilde{\int}_0^{L_\infty} x^p = \lambda_p + \varepsilon_p$  avec  $\varepsilon_p/\lambda_p$  infinitésimal. Donc  $\tilde{f}/\lambda_p = 1 + \varepsilon_p/\lambda_p$ , partie standard = 1.

Note :  $\lambda_p$  comme  $\tilde{\int}_0^{L_\infty} x^p$  sont tous deux dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_{p+2}$  (même strate), donc le quotient est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_0 = \mathbb{R}$ .  $\square$

## 13 Régularisation des divergences logarithmiques

**Théorème 3** (Régularisation logarithmique).  $\text{Reg}_\sigma(\int_0^1 dx/x) = 1$  avec contre-terme  $\lambda = n_\infty \ln 2$ .

*Démonstration.*  $\tilde{\int}_{\Delta x}^1 dx/x = n_\infty \ln 2 + O(1)$ , donc divisé par  $n_\infty \ln 2 : 1 + O(1)/(n_\infty \ln 2)$ . Le rapport  $O(1)/n_\infty$  est infinitésimal, partie standard = 1.  $\square$

## Quatrième partie

# Borne critique et convergence stratifiée

## 14 $\sigma$ comme fonction de la borne

**Définition 5** (Strate à borne  $B$ ).  $\sigma(f, B) :=$  plus petit  $k$  tel que  $\tilde{\int}_0^B f \in \tilde{\mathbb{R}}|_k$ .

La strate canonique  $\sigma(f) := \sigma(f, L_\infty)$  de la Partie II est le cas particulier de borne maximale.

**Proposition 8** (Croissance). *Pour  $f \geq 0$  et  $B_1 \leq B_2$ ,  $\sigma(f, B_1) \leq \sigma(f, B_2)$ .*

## 15 La borne critique

**Définition 6** (Borne critique). *Pour  $f \geq 0$  admissible et  $k \in \mathbb{N}$ ,*

$$B_k(f) := \sup\{B : \sigma(f, B) \leq k\}.$$

## 16 Bornes critiques pour les classes principales

**Théorème 4** (Bornes exponentielles). *Pour  $f(x) = e^x$ ,*

$$B_k(e^x) = k \cdot n_\infty \ln 2 \quad \text{pour tout } k \geq 1.$$

*Démonstration.*  $\int_0^B e^x dx = e^B - 1$ . À  $B = c \cdot n_\infty \ln 2$  avec  $c$  standard positif,  $e^B = 2^{cn_\infty}$ . Strate stricte :  $2^{cn_\infty}$  est dans  $\tilde{\mathbb{R}}|_k$  ssi  $c \leq k$  (puisque  $\tilde{\mathbb{R}}|_k$  contient tout  $\leq 2^{kn_\infty}$  et  $2^{cn_\infty} \leq 2^{kn_\infty}$  ssi  $c \leq k$ ). Donc  $B_k(e^x) = kn_\infty \ln 2$ .  $\square$

**Corollaire 2** (Convergence exponentielle dans  $\tilde{\mathbb{R}}$ ).  $\int_0^B e^x dx \in \tilde{\mathbb{R}}$  (strate finie de  $\tilde{\mathbb{R}}$ ) ssi  $B \leq n_\infty \ln 2$ . À  $B = n_\infty \ln 2$  exactement,  $\tilde{f} = 2^{n_\infty} - 1$ , à la borne supérieure de  $\tilde{\mathbb{R}}|_1$ .

**Remarque 5** (Le gain conceptuel). *L'analyse classique dit :  $\int_0^\infty e^x = \infty$ . Notre cadre nuance : pour toute borne  $B \leq n_\infty \ln 2$ , l'intégrale est finie dans  $\tilde{\mathbb{R}}$ . Au-delà, elle bascule dans des extensions successives selon  $B/n_\infty \ln 2$ .*

## 17 Hiérarchie de croissance par bornes critiques

**Théorème 5** (Classification fine). 1. *Polynomial, logarithmique :  $B_k$  sature à  $L_\infty$  dès une strate finie (dépend du préfacteur standard, voir Partie II).*

2. *Exponentiel :  $B_k(e^{cx}) = kn_\infty \ln 2/c$ , linéaire en  $k$ .*

3. *Double-exponentiel :  $B_k(e^{e^x}) \sim \ln(kn_\infty)$ , logarithmique en  $k$ .*

*Démonstration.* (2) Direct par théorème 4 avec  $cB$  remplaçant  $B$ .

(3) Pour  $f = e^{e^x}$ , on veut  $e^{e^B} \leq 2^{kn_\infty}$ , soit  $e^B \leq kn_\infty \ln 2$ , soit  $B \leq \ln(kn_\infty \ln 2)$ . Le terme dominant pour  $n_\infty$  grand est  $\ln n_\infty$ , qui reste sous  $n_\infty$  mais croît bien plus lentement.  $\square$

## 18 Régularisation à la borne critique

La régularisation  $\text{Reg}_\sigma$  introduite plus haut requiert le choix d'un contre-terme  $\lambda$  de strate adéquate, qui peut ne pas être défini canoniquement (notamment pour les divergences exponentielles qui dépassent toutes les strates de  $\tilde{\mathbb{R}}$ ). La notion de borne critique  $B_k(f)$  (Partie IV) permet une régularisation alternative, plus uniforme, qui exploite directement la structure stratifiée.

**Définition 7** (Régularisation à la borne critique). *Pour  $f$  admissible positive et  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $B_k(f) > 0$ ,*

$$\text{Reg}_k(f) := \text{st} \left( \frac{1}{2^{kn_\infty}} \int_0^{\tilde{B}_k(f)} f(x) dx \right).$$

**Remarque 6** (Choix universel du contre-terme). *Le contre-terme est ici  $2^{kn_\infty}$ , la borne supérieure exacte de  $\tilde{\mathbb{R}}|_k$ . C'est un choix universel, indépendant de  $f$ , ce qui distingue cette régularisation de  $\text{Reg}_\sigma$  où le contre-terme était adapté à chaque fonction. L'adaptation à  $f$  se fait ici via la borne critique  $B_k(f)$  elle-même.*

**Théorème 6** (Théorème de régularisation universelle). *Pour toute fonction  $f$  admissible positive et tout  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $B_k(f)$  est non triviale,  $\text{Reg}_k(f) = 1$ .*

*Démonstration.* Par définition de la borne critique,  $\int_0^{\tilde{B}_k(f)} f \leq 2^{kn_\infty}$  avec égalité (ou quasi-égalité, à un infinitésimal près) à la borne. Plus précisément, en supposant que  $f$  est suffisamment régulière pour que l'intégrale atteigne la borne stratale au point critique :

$$\int_0^{\tilde{B}_k(f)} f(x) dx = 2^{kn_\infty} - \varepsilon_k$$

où  $\varepsilon_k$  est un élément dans une strate strictement inférieure à  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$  (terme sous-dominant de l'intégrale ou correction à la borne).

Donc

$$\frac{\int_0^{\widetilde{B}_k(f)} f}{2^{kn_\infty}} = 1 - \frac{\varepsilon_k}{2^{kn_\infty}}.$$

Le rapport  $\varepsilon_k/2^{kn_\infty}$  est infinitésimal (numérateur de strate inférieure, dénominateur à la borne de  $\widetilde{\mathbb{R}}|_k$ ). Sa partie standard est 0, et  $\text{Reg}_k(f) = \text{st}(1 - \text{inf}) = 1$ .  $\square$

**Remarque 7** (Universalité et information dans les sous-dominants). *Le théorème 6 dit que  $\text{Reg}_k$  est trivialement universelle : elle vaut 1 pour toutes les fonctions admissibles. L'information spécifique à chaque fonction n'est pas dans  $\text{Reg}_k(f)$  lui-même, mais dans les corrections sous-dominantes au 1, c'est-à-dire dans  $\frac{\varepsilon_k}{2^{kn_\infty}}$  vu comme infinitésimal de  $\widetilde{\mathbb{R}}$ .*

*Par analogie avec la régularisation dimensionnelle, où  $1/\varepsilon$  est trivialement universel mais les coefficients en facteur portent l'information physique, ce sont ici les sous-dominants qui distinguent les fonctions. Le développement systématique de ces sous-dominants serait l'analogue stratifié des développements en  $\varepsilon$ .*

**Corollaire 3** (Dans  $\mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_0^{B_k(f)} f(x) dx}{2^{kn}} = 1$$

Qui est valable en particulier pour  $k = 1$ .

**Corollaire 4** (Régularisation exponentielle). *Pour  $f(x) = e^x$  avec  $B_1(e^x) = n_\infty \ln 2$  :*

$$\int_0^{\widetilde{n}_\infty \ln 2} \frac{e^x}{2^{n_\infty}} dx = \frac{2^{n_\infty} - 1}{2^{n_\infty}} = 1 - \frac{1}{2^{n_\infty}},$$

donc  $\text{Reg}_1(e^x) = 1$ , avec sous-dominant  $-1/2^{n_\infty}$ .