Origine du plan complexe et interprétation des racines

Partie propre, partie partielle et réflexivité dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

Le paradoxe de la réflexivité met en présence une partie $\mathcal{F}_2^\star$ et un tout $\mathcal{F}_1$ qui la contient, reliés par une bijection qui dilate les grains d'un facteur a. La partie $\mathcal{F}_2^\star$ y est à la fois partie partielle de $\mathcal{F}_1$, par inclusion au grain de base, et partie propre, par cette bijection. On montre que cette dualité se lit comme un plan à deux niveaux d'observation. Dans le plan réel, les deux axes sont rapportés à une même norme, celle de $\mathcal{F}_2$. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées change de tout de référence : il prend $\mathcal{F}_1$ comme partie propre, et $\mathcal{F}_2^\star$ y devient partie partielle. La normalisation correspondante envoie la droite $y = ax$ sur la diagonale $y = x$. On définit ensuite un opérateur de réflexivité J, formé de la bijection partie–tout et de la rotation τ du dispositif, et l'on montre que $J^2 = -I$: le signe vient de ce que τ est une rotation, et non une symétrie. On en déduit une lecture des racines d'un trinôme irréductible : la partie réelle est la composante propre de la solution, mesurée dans l'unité $\mathcal{F}_2$, et la partie imaginaire sa composante partielle, portée par l'axe dont le tout est $\mathcal{F}_1$. La conjugaison des racines exprime une symétrie des parties partielles. Pour une équation différentielle du second ordre, les racines réelles correspondent à une solution qui se propage d'un moment au suivant, et les racines complexes à une propagation qui porte sur deux moments successifs à la fois.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels : le dispositif de la réflexivité **2**

3 Le plan réel : une seule norme **3**

4 Le plan complexe : changer le tout de référence **3**

5 L'opérateur de réflexivité et l'unité imaginaire **5**

6 Interprétation des racines d'un trinôme irréductible **6**
6.1 La décomposition de la matrice compagnon 6
6.2 La lecture en partie propre et partie partielle 7

7 Interprétations **8**
7.1 Racines conjuguées : une symétrie des parties partielles 8
7.2 Équations différentielles : un moment ou deux moments 8

8 Remarque historique **10**

1 Introduction

Galilée remarquait qu'il y a autant de carrés que d'entiers, alors que les carrés ne sont qu'une partie des entiers ; Bolzano exhibait la bijection $y \mapsto ay$ entre $[0,1[$ et $[0,a[$. C'est le *paradoxe de la réflexivité* : une partie est en bijection avec le tout qui la contient. Dans la théorie du grain [5, 6], ce paradoxe se décompose : la bijection existe, mais elle dilate les grains ; à résolution homogène, la partie compte strictement moins de grains que le tout ; et c'est la promotion vers le continu standard, en écrasant les épaisseurs, qui fait réapparaître l'égalité des cardinaux.

Le présent texte part d'une autre observation. Dans ce dispositif, une même partie $\mathcal{F}_2^\star$ est regardée de deux façons : comme *partie partielle* de $\mathcal{F}_1$, incluse au grain de base, et comme *partie propre*, renumérotée comme un tout par la bijection [8]. Ces deux regards ne demandent pas la même norme. On montre qu'en les conservant tous deux, on obtient non plus le plan cartésien, mais le plan complexe, et que l'unité imaginaire y apparaît comme l'opérateur de réflexivité lui-même.

La section 2 rappelle le dispositif. La section 3 décrit le plan réel, où une seule norme est employée. La section 4 construit le plan complexe par changement du tout de référence. La section 5 définit l'opérateur de réflexivité et établit $J^2 = -I$. La section 6 en tire l'interprétation des racines d'un trinôme irréductible. La section 7 interprète la conjugaison des racines et, en s'appuyant sur l'étude du temps dans la théorie du grain, le rôle des racines complexes dans les équations différentielles. La section 8 situe ce point de vue dans l'histoire des nombres complexes.

2 Rappels : le dispositif de la réflexivité

On fixe un entier illimité $\nu = \#\mathbb{N}$, au sens d'un modèle non standard de l'arithmétique de Peano [8], et l'on pose $\varepsilon = 2^{-\nu}$. On fixe aussi un réel standard $a > 1$.

Définition 1 (Le dispositif)**.**
- $\mathcal{F}_2 = [0,1[$, porté par l'axe des abscisses, est muni de ses 2^ν grains $g_k = [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon[$, pour $0 \le k < 2^\nu$.
- τ est la rotation d'un quart de tour, $\tau(x,y) = (-y,x)$. Elle envoie $\mathcal{F}_2$ sur $\mathcal{F}_2^\star = \tau(\mathcal{F}_2)$, le segment $[0,1[$ de l'axe des ordonnées, muni des grains $\tau(g_k)$, d'épaisseur ε.
- $f : x \mapsto ax$ envoie $\mathcal{F}_2$ sur $\mathcal{F}_1 = [0,a[$, porté par l'axe des ordonnées, muni des grains $f(g_k) = [ak\varepsilon, a(k+1)\varepsilon[$, d'épaisseur $a\varepsilon$.
- $h = f \circ \tau^{-1} : \mathcal{F}_2^\star \to \mathcal{F}_1$, $y \mapsto ay$, est la bijection partie–tout.

La figure 1 représente ce dispositif. On rappelle les deux faits établis dans [6].

Proposition 2 (Bijection hétérogène)**.** *La bijection h envoie grain sur grain, le grain $\tau(g_k)$ sur le grain $f(g_k)$. La partie $\mathcal{F}_2^\star$ et le tout $\mathcal{F}_1$ comptent donc le même nombre de grains, 2^ν, mais leurs grains n'ont pas la même épaisseur : ε pour la partie, $a\varepsilon$ pour le tout.*

Proposition 3 (Comptage homogène)**.** *Comptés en grains d'épaisseur ε, $N(\mathcal{F}_2^\star) = 2^\nu$ et $N(\mathcal{F}_1) = \lfloor a\, 2^\nu \rfloor$. L'écart $N(\mathcal{F}_1) - N(\mathcal{F}_2^\star) \ge (a-1)\, 2^\nu - 1$ est illimité.*

Les deux regards sur $\mathcal{F}_2^\star$. La partie $\mathcal{F}_2^\star$ se présente donc sous deux regards, au sens de [8] :
- comme *partie partielle* de $\mathcal{F}_1$, elle est incluse dans $\mathcal{F}_1$ au grain ε, et en occupe une fraction $1/a$;
- comme *partie propre*, elle est renumérotée comme un tout par h, et ses 2^ν grains correspondent un à un à ceux de $\mathcal{F}_1$.

Ce n'est pas l'ensemble qui change, mais le grain sous lequel on le regarde : ε dans le premier cas, $a\varepsilon$ dans le second. La question est de savoir quel plan permet de conserver les deux regards à la fois.

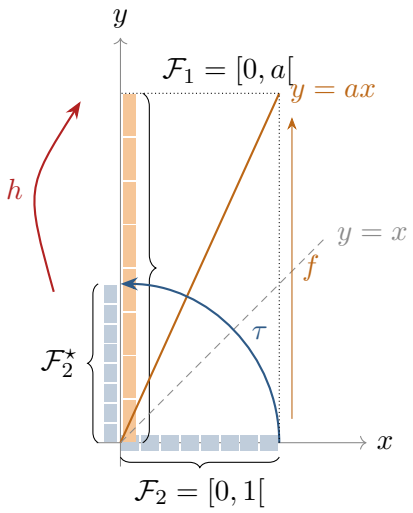


FIGURE 1 – Le dispositif de la réflexivité (schéma, les 2^ν grains étant représentés par quelques-uns). La rotation τ transporte $\mathcal{F}_2$ sur $\mathcal{F}_2^\star$ sans déformer ses grains (bleu) ; l'homothétie f le transporte sur $\mathcal{F}_1$ en dilatant chaque grain d'un facteur a (orange). La bijection partie–tout est $h = f \circ \tau^{-1}$.

3 Le plan réel : une seule norme

Définition 4 (Plan réel)**.** Le *plan réel* $P_{\mathbb{R}}$ est le plan du dispositif, muni d'une seule unité de longueur : $\mathcal{F}_2$ sur l'axe des abscisses, et son image $\mathcal{F}_2^\star = \tau(\mathcal{F}_2)$ sur l'axe des ordonnées.

Dans le plan réel, $\mathcal{F}_2$ sert de partie propre et de norme, sur l'axe des abscisses directement, sur l'axe des ordonnées par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_2^\star$. Sur l'axe des ordonnées, on ne voit donc $\mathcal{F}_2^\star$ que comme *partie partielle* de $\mathcal{F}_1$: c'est un segment de longueur 1 dans un segment de longueur a.

Proposition 5. *Dans le plan réel :*

(i) le graphe de f est la droite $y = ax$, et le dispositif occupe le rectangle $[0, 1] \times [0, a]$;

(ii) les grains de $\mathcal{F}_2$ et de $\mathcal{F}_2^\star$ ont l'épaisseur ε, ceux de $\mathcal{F}_1$ l'épaisseur $a\varepsilon$;

(iii) la bijection h n'est pas une isométrie : elle multiplie les longueurs par a.

Démonstration. Ce sont la définition 1 et la proposition 2, lues avec l'unité $\mathcal{F}_2$ sur les deux axes. □

Le plan réel ne distingue donc pas les deux regards par la norme : il les mesure tous deux avec l'unité de $\mathcal{F}_2$. La partie propre $\mathcal{F}_2^\star$, renumérotée par h, n'y est visible que par l'hétérogénéité de ses grains. C'est en ce sens qu'au niveau calculatoire, le plan réel ne travaille qu'avec la partie partielle.

4 Le plan complexe : changer le tout de référence

Pour conserver la partie propre comme telle, il faut que l'axe des ordonnées soit rapporté à son propre tout.

Définition 6 (Plan complexe)**.** Le *plan complexe* $P_{\mathbb{C}}$ est le plan du dispositif où l'on conserve, sur l'axe réel, $\mathcal{F}_2$ comme partie propre et comme unité, et où l'on prend, sur l'axe des ordonnées, $\mathcal{F}_1$ comme partie propre et comme unité. On passe du plan réel au plan complexe par la normalisation

$$\Phi(x, y) = \Big(x,\ \frac{y}{a}\Big).$$

Proposition 7 (Normalisation)**.** *(i) Φ envoie la droite $y = ax$ sur la diagonale $y = x$, et le rectangle $[0,1] \times [0,a]$ sur le carré $[0,1]^2$.*

(ii) Dans $P_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}_1$ devient le segment unité $[0,1[$ de l'axe des ordonnées, et ses grains ont l'épaisseur ε, comme ceux de $\mathcal{F}_2$.

(iii) Dans $P_{\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}_2^\star$ devient le segment $[0, \frac{1}{a}[$, et ses grains ont l'épaisseur ε/a : $\mathcal{F}_2^\star$ est une partie partielle de $\mathcal{F}_1$.

Démonstration. (i) $\Phi(x, ax) = (x, x)$, et $\Phi(1, a) = (1, 1)$. (ii) Φ divise les longueurs verticales par a ; les grains $f(g_k)$, d'épaisseur $a\varepsilon$, deviennent d'épaisseur ε. (iii) De même, $\mathcal{F}_2^\star = [0,1[$ devient $[0, \frac{1}{a}[$, et ses grains d'épaisseur ε deviennent d'épaisseur ε/a. □

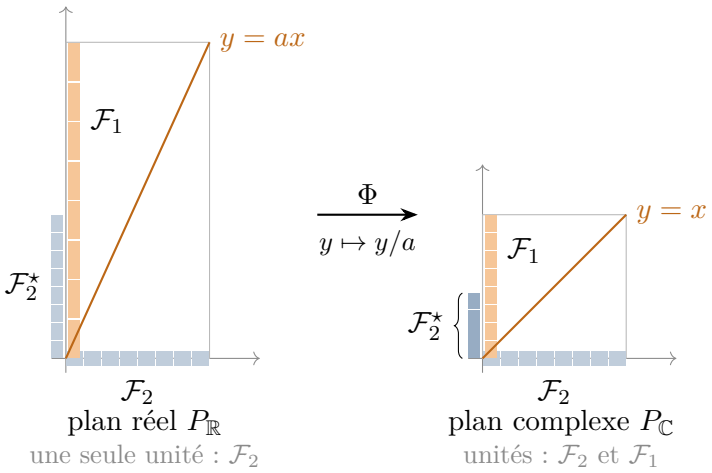


FIGURE 2 – Du plan réel au plan complexe (schéma). À gauche, une seule unité : le dispositif occupe un rectangle et le graphe de f est la droite $y = ax$. À droite, l'axe des ordonnées prend $\mathcal{F}_1$ pour unité : le rectangle devient un carré, le graphe de f devient la diagonale, les grains de $\mathcal{F}_1$ (orange) ont l'épaisseur de ceux de $\mathcal{F}_2$, et $\mathcal{F}_2^\star$ (bleu foncé) devient une partie partielle de $\mathcal{F}_1$, à grains plus fins.

La figure 2 illustre la proposition. Dans le plan complexe, l'axe des ordonnées porte deux niveaux d'observation : le grain ε de $\mathcal{F}_1$, partie propre et unité de l'axe, et le grain ε/a de $\mathcal{F}_2^\star$, partie partielle de $\mathcal{F}_1$. Dans les notations $(g_f, \frac{1}{a}\, g_g)$ du brouillon, g_g est le grain de $\mathcal{F}_2^\star$ dans le plan réel ; la normalisation le ramène à $\frac{1}{a}\, g_g$.

Corollaire 8 (Euclide conservé)**.** *Dans $P_{\mathbb{C}}$, l'homothétie $f : \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_1$ devient une isométrie : son graphe est la diagonale, et elle envoie chaque grain de $\mathcal{F}_2$ sur un grain de $\mathcal{F}_1$ de même épaisseur ε. La bijection partie–tout h, elle, relie désormais deux niveaux d'un même axe : elle envoie les grains de $\mathcal{F}_2^\star$, d'épaisseur ε/a, sur ceux de $\mathcal{F}_1$, d'épaisseur ε. Comptée en grains d'épaisseur ε, la partie $\mathcal{F}_2^\star$ n'en contient que $\lfloor 2^\nu/a \rfloor < 2^\nu$: le tout reste plus grand que la partie.*

Démonstration. La première assertion découle de la proposition 7(i) et (ii), la deuxième de (ii) et (iii). La dernière découle de (iii) : $\mathcal{F}_2^\star$ a pour longueur $1/a$ dans l'unité de $\mathcal{F}_1$. □

Le plan complexe ne supprime donc pas la distinction entre la partie et le tout ; il la déplace. Elle n'est plus portée par l'écart entre les grains des deux axes, qui deviennent homogènes, mais par la présence, sur l'axe des ordonnées, de deux niveaux d'observation.

5 L'opérateur de réflexivité et l'unité imaginaire

Le dispositif contient deux façons de passer d'un axe à l'autre : $h \circ \tau$, qui transporte $\mathcal{F}_2$ sur le tout $\mathcal{F}_1$, et $\tau \circ h^{-1}$, qui ramène $\mathcal{F}_1$ sur l'axe des abscisses en passant par la partie. On étend h à tout l'axe des ordonnées par $h(0, y) = (0, ay)$.

Définition 9 (Opérateur de réflexivité)**.** L'*opérateur de réflexivité* est l'application linéaire J du plan définie par

$$J(x, 0) = h(\tau(x, 0)) = (0, ax), \qquad J(0, y) = \tau(h^{-1}(0, y)) = \Big(-\frac{y}{a}, 0\Big),$$

c'est-à-dire

$$J(x, y) = \Big(-\frac{y}{a},\ ax\Big), \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1/a \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

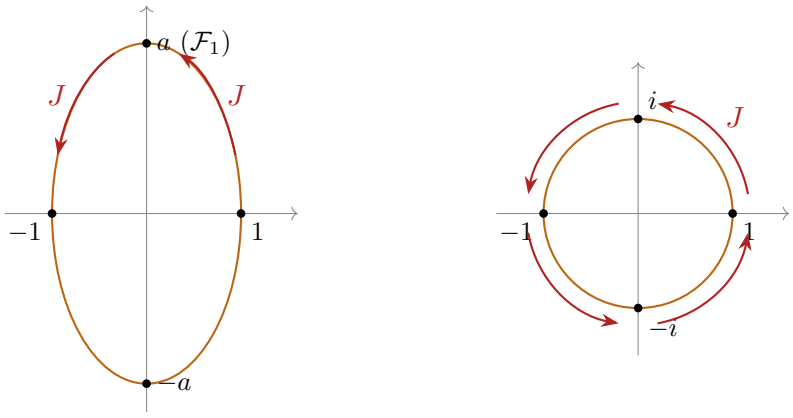
Théorème 10 (L'unité imaginaire)**.** *(i)* $J^2 = -I$.

(ii) Dans le plan complexe, J est le quart de tour : $\Phi \circ J \circ \Phi^{-1}(x, y) = (-y, x)$.

(iii) J envoie l'unité $\mathcal{F}_2$ de l'axe réel sur l'unité $\mathcal{F}_1$ de l'axe des ordonnées, et celle-ci sur $-\mathcal{F}_2$.

Démonstration. (i) Sur l'axe des abscisses, $J^2 = \tau \circ h^{-1} \circ h \circ \tau = \tau^2$; sur l'axe des ordonnées, $J^2 = h \circ \tau \circ \tau \circ h^{-1} = h \circ \tau^2 \circ h^{-1}$. Or $\tau^2 = -I$, qui commute avec h. Donc $J^2 = -I$; on le vérifie aussi sur la matrice. (ii) $\Phi \circ J \circ \Phi^{-1}(x, y) = \Phi \circ J(x, ay) = \Phi(-y, ax) = (-y, x)$. (iii) $J(1, 0) = (0, a)$ et $J(0, a) = (-1, 0)$. □

Le plan complexe est ainsi le plan du dispositif muni de l'opérateur de réflexivité : l'unité imaginaire i *est* J, c'est-à-dire la bijection partie–tout composée avec la rotation. Dans le plan réel, l'orbite de $(1, 0)$ sous J parcourt l'ellipse $x^2 + y^2/a^2 = 1$; dans le plan complexe, elle parcourt le cercle unité (figure 3).



plan réel : ellipse $x^2 + y^2/a^2 = 1$ plan complexe : cercle unité, $J^2 = -1$

FIGURE 3 – L'opérateur de réflexivité J. À gauche, dans le plan réel, il envoie 1 sur l'extrémité a de $\mathcal{F}_1$, puis sur -1 : son orbite est une ellipse. À droite, après normalisation, il devient le quart de tour, et $J^2 = -1$.

Remarque (D'où vient le signe). Dans [6], on observait que τ coïncide, sur le demi-axe positif, avec la symétrie $\sigma(x, y) = (y, x)$ d'axe $y = x$, et que le choix de l'une ou de l'autre était sans incidence sur le comptage. Il est ici décisif. Avec σ au lieu de τ, l'opérateur devient

$$J_\sigma(x, y) = \Big(\frac{y}{a},\ ax\Big), \qquad J_\sigma^2 = +I,$$

et son orbite parcourt l'hyperbole $x^2 - y^2/a^2 = \pm 1$ (figure 4). On obtient alors les nombres *hyperboliques* $u + jv$, $j^2 = +1$, et non les nombres complexes. Le signe de $i^2 = -1$ vient donc de ce que le passage de la partie au tout se fait par une *rotation* : l'aller–retour $h \circ \tau$, puis $\tau \circ h^{-1}$, compose deux quarts de tour, et la dilatation h s'y simplifie.



rotation τ : $J^2 = -I$ nombres complexes

symétrie σ : $J_\sigma^2 = +I$ nombres hyperboliques

FIGURE 4 – Le signe (schéma, dans le plan normalisé). Avec la rotation τ, deux applications de J mènent de 1 à -1. Avec la symétrie σ, deux applications de J_σ ramènent à 1, et l'orbite d'un point quelconque est portée par une hyperbole.

Remarque (Le cas $a = 2^\nu$). Si l'on prend pour a l'entier illimité 2^ν, les deux niveaux d'observation de l'axe des ordonnées du plan complexe sont $\varepsilon = 2^{-\nu}$ et $\varepsilon/a = 2^{-2\nu}$: ce sont les niveaux ν et 2ν. La restriction de J à l'axe réel est alors $x \mapsto 2^\nu i\, x$, c'est-à-dire la similitude $\omega = 2^\nu i$ du plan à deux résolutions [9], qui échange les grilles des deux axes.

Remarque (Ce qui survit à la promotion). Pour a standard, J est une application linéaire à coefficients standard. La promotion écrase les épaisseurs ε et ε/a sur 0 et efface les deux niveaux de l'axe des ordonnées ; elle conserve en revanche la relation algébrique $J^2 = -I$. Le plan complexe standard garde ainsi la trace de la réflexivité, mais non du grain qui la rendait lisible.

6 Interprétation des racines d'un trinôme irréductible

6.1 La décomposition de la matrice compagnon

Soit $x^2 + px + q$ un trinôme à coefficients réels, de discriminant $\Delta = p^2 - 4q < 0$, et

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -q \\ 1 & -p \end{pmatrix}$$

sa matrice compagnon, dont le polynôme caractéristique est le trinôme.

Proposition 11. *On pose $\alpha = -\frac{p}{2}$ et $\beta = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$. Alors :*

(i) $C = \alpha\, I + \beta\, K$, *avec* $K^2 = -I$;

(ii) K *est conjuguée à la rotation* τ *: il existe une base dans laquelle* K *a pour matrice* $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(iii) C *ne laisse invariante aucune droite réelle ;*

(iv) les racines du trinôme sont $\alpha \pm i\beta$.

Démonstration. (i) Par le théorème de Cayley–Hamilton, $C^2 + pC + qI = 0$, soit $\left(C + \frac{p}{2} I\right)^2 = \frac{p^2 - 4q}{4}\, I = -\beta^2 I$. On pose $K = \frac{1}{\beta}(C + \frac{p}{2} I)$. (ii) Soit $v \neq 0$; comme $K^2 v = -v$, les vecteurs v et

Kv sont indépendants (sinon $Kv = \lambda v$ et $\lambda^2 = -1$), et dans la base (v, Kv), K envoie v sur Kv et Kv sur $-v$. (iii) Une droite invariante serait portée par un vecteur propre réel, associé à une racine réelle du trinôme ; il n'y en a pas puisque $\Delta < 0$. (iv) Les valeurs propres de K sont $\pm i$, donc celles de C sont $\alpha \pm i\beta$. □

La proposition 11 et le théorème 10 se répondent : la composante K de C est, à conjugaison près, l'opérateur de réflexivité. Un trinôme irréductible est exactement un trinôme dont la matrice compagnon contient une composante de réflexivité.

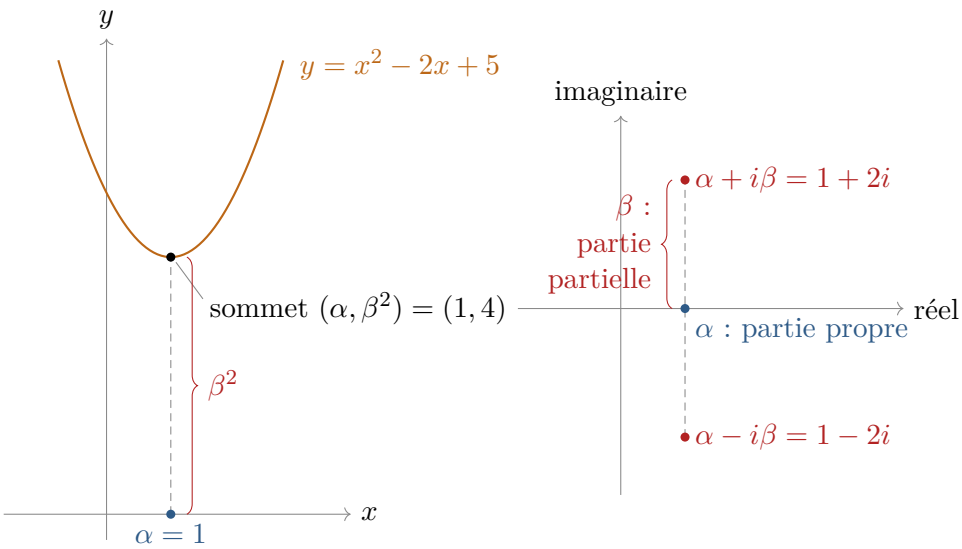
6.2 La lecture en partie propre et partie partielle

On travaille en unité $\mathcal{F}_2$. La décomposition $C = \alpha I + \beta K$ sépare les deux regards.

— La **partie réelle** $\alpha = -\frac{p}{2}$ est la composante homothétique de C : elle préserve chaque axe, et se lit sur l'axe réel, dans l'unité $\mathcal{F}_2$. C'est la solution en tant que *partie propre* : rapportée au tout qui sert de norme.

— La **partie imaginaire** β est le coefficient de K, qui fait passer de l'axe réel à l'axe des ordonnées, où le tout de référence est $\mathcal{F}_1$. Mesurée dans l'unité $\mathcal{F}_2$, c'est-à-dire par l'intermédiaire de $\mathcal{F}_2^\star$, elle se lit sur cet axe comme une *partie partielle* de $\mathcal{F}_1$.

L'irréductibilité, c'est-à-dire l'absence de droite invariante, exprime qu'aucun des deux regards ne suffit seul à porter la solution : l'axe réel ne contient pas de racine, et la composante de réflexivité est indispensable.



plan réel : la parabole ne coupe pas l'axe

plan complexe : les racines sur la verticale du sommet

FIGURE 5 – Le trinôme $x^2 - 2x + 5$, de discriminant $\Delta = -16$. Dans le plan réel, la parabole ne coupe pas l'axe ; l'abscisse $\alpha = 1$ de son sommet est visible, mais la solution ne l'est pas. Dans le plan complexe, les racines $1 \pm 2i$ sont sur la verticale du sommet : la partie réelle α est la composante propre, la partie imaginaire $\beta = 2$ la composante partielle. La hauteur du sommet, $q - \frac{p^2}{4} = \beta^2$, relie les deux lectures.

Exemple 12 (Le trinôme $x^2 + 1$)**.** Pour $p = 0$ et $q = 1$, on a $\alpha = 0$, $\beta = 1$ et $C = K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \tau$. La matrice compagnon de $x^2 + 1$ est la rotation du dispositif elle-même : ses racines $\pm i$ n'ont pas de composante propre, et sont entièrement partielles.

Exemple 13 (Le trinôme $x^2 - 2x + 5$)**.** On a $\Delta = -16$, $\alpha = 1$, $\beta = 2$, et les racines sont $1 \pm 2i$ (figure 5). La composante propre $\alpha = 1$ est l'abscisse du sommet de la parabole, déjà visible dans le plan réel. La composante partielle $\beta = 2$ est la racine carrée de la hauteur du sommet, $q - \frac{p^2}{4} = 4$: le plan réel en voit le carré, non la racine.

Remarque (Pas de racine dans le plan hyperbolique). Dans les nombres hyperboliques, où $j^2 = +1$, un trinôme réel de discriminant négatif n'a aucune racine. En effet, l'algèbre $\mathbb{R}[j]$ se décompose en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par les idempotents $\frac{1 \pm j}{2}$, et une racine dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ serait un couple de racines réelles. Le choix de la rotation τ plutôt que de la symétrie σ n'est donc pas une convention : c'est lui qui donne des racines aux trinômes irréductibles.

7 Interprétations

Les interprétations qui suivent s'appuient en partie sur l'étude du temps dans la théorie du grain [7]. À une résolution donnée, le temps y est fait de *moments* $\mu_m = [m\Delta, (m+1)\Delta[$, de durée Δ infinitésimale, séparés par des jonctions ; un *instant* est la promotion d'une famille de moments emboîtés. Une même réalité physique est ainsi portée par un moment, et la suivante par le moment adjacent.

7.1 Racines conjuguées : une symétrie des parties partielles

Proposition 14 (Conjugaison)**.** *Soit $S(x, y) = (x, -y)$ la conjugaison.*

(i) S laisse fixe l'axe réel, renverse l'axe des ordonnées, et échange l'opérateur de réflexivité et son inverse : $S\,J\,S = -J = J^{-1}$.

(ii) Si z est racine d'un trinôme à coefficients réels, $\bar{z}$ l'est aussi.

(iii) Pour les racines $\alpha \pm i\beta$ du trinôme $x^2 + px + q$:

$$(\alpha + i\beta) + (\alpha - i\beta) = 2\alpha = -p, \qquad (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 = q.$$

Démonstration. (i) $SJS(x, y) = SJ(x, -y) = S(\frac{y}{a}, ax) = (\frac{y}{a}, -ax) = -J(x, y)$, et $J^{-1} = -J$ puisque $J^2 = -I$. (ii) La conjugaison est un automorphisme du corps $\mathbb{C}$ qui fixe les réels : de $z^2 + pz + q = 0$ on tire $\bar{z}^2 + p\bar{z} + q = 0$. (iii) Calcul direct. □

La conjugaison est donc l'expression d'une *symétrie des parties partielles*. Les deux sens du passage de la partie au tout, J et J^{-1}, c'est-à-dire τ et τ^{-1}, vérifient tous deux $J^2 = -I$, et un trinôme à coefficients réels ne peut pas les distinguer : ses racines viennent par paires. Les relations de Viète précisent ce que voit le plan réel. Dans la somme des racines, les parties partielles se compensent, et il ne reste que la partie propre. Dans leur produit, elles n'interviennent que par leur carré β^2. Le plan réel ne connaît ni β, ni son signe.

7.2 Équations différentielles : un moment ou deux moments

Soit l'équation $x'' + px' + qx = 0$, de trinôme caractéristique $r^2 + pr + q$. On l'écrit comme un système du premier ordre sur l'état $X = (x, x')$, de matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix},$$

qui a pour polynôme caractéristique le trinôme. Sur la grille des moments, le passage d'un moment au suivant est

$$X_{m+1} = M\,X_m, \qquad M = I + \Delta A.$$

La vitesse x'_m y est le rapport $(x_{m+1} - x_m)/\Delta$, calculé sur un seul moment [7] : l'état X_m est donc déterminé par les valeurs de x sur deux moments adjacents.

Proposition 15 (Propagation)**.** *(i)* ***Racines réelles distinctes*** $r_1 \neq r_2$***.*** *La matrice M a deux directions propres réelles. La solution est la somme de deux modes y_j, dont chacun se propage d'un moment au suivant par un facteur réel :*

$$y_{j,m+1} = (1 + r_j\Delta)\, y_{j,m}.$$

Par promotion, chaque mode vérifie l'équation en instants $y'_j = r_j\, y_j$.

(ii) ***Racine double*** r***.*** *La matrice M n'a qu'une direction propre. Dans une base adaptée, $M = (1 + r\Delta)\, I + \Delta N$, avec $N \neq 0$ et $N^2 = 0$: le passage d'un moment au suivant est un cisaillement. La seconde solution est $t\, e^{rt}$.*

(iii) ***Racines complexes*** $\alpha \pm i\beta$***.*** *La matrice M n'a aucune direction propre réelle : aucune combinaison réelle de l'état ne se propage seule. Dans une base adaptée,*

$$M = \rho \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \qquad \rho = \sqrt{(1+\alpha\Delta)^2 + \beta^2\Delta^2}, \quad \tan\theta = \frac{\beta\Delta}{1+\alpha\Delta},$$

et la suite des valeurs vérifie la récurrence à deux pas

$$x_{m+2} = 2\rho\cos\theta\; x_{m+1} - \rho^2\, x_m.$$

La propagation porte sur deux moments successifs à la fois ; le couple tourne de l'angle $\theta \simeq \beta\Delta$ d'un pas au suivant.

Démonstration. Les valeurs propres de M sont les $1+r\Delta$, où r parcourt les racines du trinôme. (i) Deux valeurs propres réelles distinctes donnent deux directions propres ; la coordonnée y_j de l'état sur la direction j est multipliée par $1 + r_j\Delta$ à chaque pas, et $(y_{j,m+1} - y_{j,m})/\Delta = r_j\, y_{j,m}$ se promeut en $y'_j = r_j y_j$. (ii) $N = A - rI$ vérifie $N^2 = 0$ par le théorème de Cayley–Hamilton, et $N \neq 0$ puisque A n'est pas une matrice scalaire. (iii) Comme dans la proposition 11, $A = \alpha I + \beta K$ avec $K^2 = -I$, donc $M = (1+\alpha\Delta)I + \beta\Delta K$. Dans une base (v, Kv), on obtient la matrice annoncée, qui n'a pas de valeur propre réelle puisque $\beta\Delta \neq 0$. Toute coordonnée d'une suite $X_{m+1} = MX_m$ vérifie $s_{m+2} = (\operatorname{tr} M)\, s_{m+1} - (\det M)\, s_m$, avec $\operatorname{tr} M = 2\rho\cos\theta$ et $\det M = \rho^2$. Enfin $\theta \simeq \beta\Delta$ puisque Δ est infinitésimal. □

La proposition donne un sens précis aux deux régimes.

— Dans le cas réel, *le moment se propage* : chaque mode est porté d'un moment au suivant par un simple facteur, et l'équation en instants se transporte mode par mode.

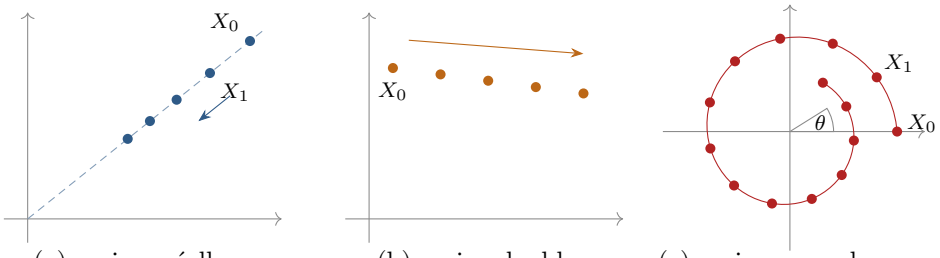
— Dans le cas complexe, *on travaille sur deux moments à la fois, qui se succèdent.* Aucun nombre réel n'est porté seul d'un moment au suivant ; c'est le couple formé de la valeur présente et de l'accroissement vers le moment suivant qui est porté, en tournant. On peut y lire la conjonction de la partie propre d'une réalité, la valeur dans le moment présent, et de la partie partielle de la réalité suivante, l'accroissement qui mène au moment adjacent.

— La racine double est la frontière : deux moments sont encore nécessaires, mais le couple glisse au lieu de tourner.

La partie réelle α mesure la croissance de l'amplitude du couple, à l'intérieur d'un même regard ; la partie imaginaire $\beta \simeq \theta/\Delta$ mesure la vitesse de sa rotation, c'est-à-dire de l'échange entre un moment et le suivant. Sur une durée standard T, le couple fait T/Δ pas, tourne au total de $(T/\Delta)\,\theta \simeq \beta T$, et son amplitude est multipliée par $\rho^{T/\Delta} \simeq e^{\alpha T}$: la promotion redonne la solution classique $e^{\alpha t}(c\cos\beta t + d\sin\beta t)$.

Exemple 16 (L'oscillateur harmonique)**.** Pour $x'' + \omega^2 x = 0$, on a $\alpha = 0$ et $\beta = \omega$. Dans les variables $(x, x'/\omega)$, le passage d'un moment au suivant est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \omega\Delta \\ -\omega\Delta & 1 \end{pmatrix},$$



(a) racines réelles : le moment se propage

(b) racine double : le couple glisse

(c) racines complexes : le couple tourne

FIGURE 6 – Les trois régimes dans le plan de l'état $X_m = (x_m, x'_m)$, déterminé par deux moments adjacents (schéma : l'angle $\theta \simeq \beta\Delta$, infinitésimal, est très exagéré). (a) Racines réelles : l'état reste sur une direction propre et se propage par un facteur à chaque moment. (b) Racine double : une seule direction propre ; le couple glisse. (c) Racines complexes : aucune direction n'est conservée ; le couple tourne de θ à chaque pas, et son amplitude varie selon α.

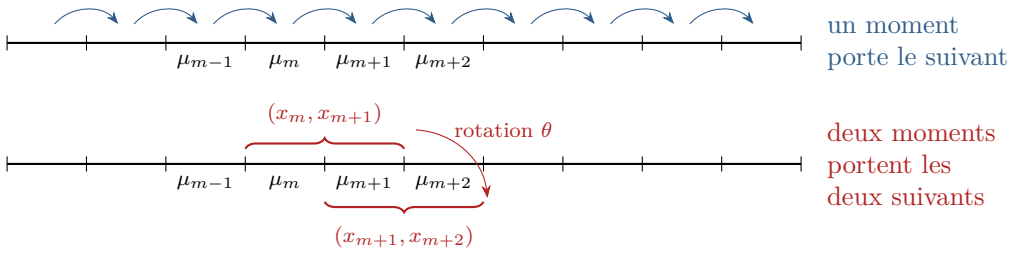


FIGURE 7 – Sur la grille des moments (schéma). En haut, racines réelles : chaque mode est porté d'un moment au suivant. En bas, racines complexes : c'est le couple de deux moments successifs qui est porté, en tournant, sur le couple décalé d'un moment.

une rotation d'angle $\theta \simeq \omega\Delta$ suivie d'une homothétie de rapport $\rho = \sqrt{1+\omega^2\Delta^2}$. Sur une durée standard T, l'amplitude est multipliée par $\rho^{T/\Delta} \simeq e^{\omega^2 T\Delta/2} \simeq 1$: l'écart à la conservation de l'énergie est infinitésimal, et disparaît à la promotion. La position et la vitesse s'échangent d'un moment à l'autre, sans qu'aucune combinaison réelle ne se propage seule.

8 Remarque historique

Historiquement, l'équation du second degré de discriminant négatif était simplement déclarée impossible. Les nombres complexes se sont imposés avec le troisième degré : dans le cas dit irréductible, une équation cubique a trois racines réelles, mais la formule publiée par Cardan [3] oblige à passer par des racines carrées de nombres négatifs. Bombelli [2] fut le premier à calculer régulièrement avec ces quantités. La représentation des complexes comme points d'un plan vient plus tard, avec Wessel [10], Argand [1] et Gauss [4].

Le point de vue développé ici éclaire ce cas. Des solutions entièrement réelles, donc propres, ne se calculent qu'en passant par des composantes partielles qui se compensent. Le cas irréductible du troisième degré serait un bon test de la lecture proposée : il faudrait montrer que la compensation des parties imaginaires correspond au retour de $\mathcal{F}_2^\star$, partie partielle de $\mathcal{F}_1$, à $\mathcal{F}_2$, partie propre, par l'opérateur J.

Conclusion

Le paradoxe de la réflexivité présente une partie $\mathcal{F}_2^\star$ qui est à la fois partie partielle et partie propre du tout $\mathcal{F}_1$. Le plan réel ne retient que la première lecture, parce qu'il mesure les

deux axes avec la même norme, celle de $\mathcal{F}_2$. Le plan complexe retient les deux : il conserve $\mathcal{F}_2$ comme partie propre sur l'axe réel et prend $\mathcal{F}_1$ comme partie propre sur l'axe des ordonnées, où $\mathcal{F}_2^\star$ devient partie partielle. La normalisation qui fait passer de l'un à l'autre envoie la droite $y = ax$ sur la diagonale, et l'opérateur de réflexivité, composé de la bijection partie–tout et de la rotation du dispositif, y devient l'unité imaginaire : $J^2 = -I$, le signe venant de la rotation. Les racines d'un trinôme irréductible se lisent alors dans ces deux regards : la partie réelle est la composante propre de la solution, mesurée dans l'unité $\mathcal{F}_2$, et la partie imaginaire sa composante partielle, portée par l'axe dont le tout est $\mathcal{F}_1$. Leur conjugaison est une symétrie des parties partielles, que le plan réel ne voit qu'au carré. Dans le temps, enfin, la distinction devient celle de la propagation : avec des racines réelles, un moment porte le suivant ; avec des racines complexes, deux moments successifs portent les deux suivants, en tournant.

Références

[1] J.-R. Argand, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*, Paris, 1806.

[2] R. Bombelli, *L'Algebra*, Bologne, 1572.

[3] G. Cardano, *Ars Magna*, Nuremberg, 1545.

[4] C. F. Gauss, « Theoria residuorum biquadraticorum, commentatio secunda », *Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1831.

[5] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.

[6] H. Genvrin, *Le paradoxe de la réflexivité dans la théorie du grain*, manuscrit, 2026.

[7] H. Genvrin, *Instants et moments : le temps dans la théorie du grain*, 2026.

[8] H. Genvrin, *Partie propre et partie partielle chez les entiers*, 2026.

[9] H. Genvrin, *Intégrer et transformer dans le plan à deux résolutions*, 2026.

[10] C. Wessel, « Om Directionens analytiske Betegning », *Mémoires de l'Académie royale de Danemark*, 1799.