Interprétations de la rectification du cercle par bissection itérée

Hugues GENVRIN

May 2026

1 Interprétation galoisienne

Partons de $\rho_1 \in \mathbb{Q}$ et $\theta_1 \in \mathbb{Q}\pi$ (typiquement $\theta_1 = \pi$, $\rho_1 = 1$). La construction de S_{k+1} à partir de S_k se trouve dans une extension algébrique de degré deux de L_k (corps comprenant les coordonnées de S_k). En effet, S_{k+1} s'obtient par intersection d'un cercle et d'une droite, et l'on applique le théorème de Wantzel. Plus précisément, si $\sin\theta_k, \cos\theta_k \in L_k$, alors $\cos\theta_{k+1} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta_k}{2}}$, d'où $[L_{k+1} : L_k] = 2$.

Étant donné que S_1 a ses coordonnées dans $\mathbb{Q}$, la suite (S_k) vit dans une tour d'extensions quadratiques. Si l'on considère le premier ordinal transfini ω, on peut former :

1. la réunion $L_\omega = \bigcup_{k<\omega} L_k$,
2. le point limite $S_\omega := \lim_{k\to\infty} S_k \in \mathbb{R}^2$.

Théorème 1. *Soit $L_\omega = \bigcup_{k<\omega} L_k$. Alors :*

1. *L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$, extension algébrique de $\mathbb{Q}$ de degré dénombrable :*
$$[L_\omega : \mathbb{Q}] = \aleph_0.$$
2. *La fermeture topologique $\widehat{L_\omega}$ de L_ω dans $\mathbb{R}$ vaut $\mathbb{R}$ tout entier, et contient π :*
$$\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}, \qquad |\widehat{L_\omega}| = 2^{\aleph_0}.$$
3. *En particulier, $\pi \in \widehat{L_\omega} \setminus L_\omega$.*

Pour démontrer ce théorème, nous établissons d'abord deux lemmes préparatoires.

Lemme 1 (Structure de L_ω)**.** *$L_\omega = \bigcup_{k<\omega} L_k$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$, et c'est une extension algébrique de $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. **Sous-corps.** Soient $x, y \in L_\omega$. Par définition, il existe $i, j < \omega$ tels que $x \in L_i$ et $y \in L_j$. Posons $k = \max(i, j)$. Comme la tour (L_n) est croissante, $x, y \in L_k$. Or L_k est un corps, donc $x + y$, $x - y$, $xy \in L_k \subset L_\omega$, et si $y \neq 0$, $x/y \in L_k \subset L_\omega$. De plus $0, 1 \in L_1 \subset L_\omega$. Donc L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$.

Algébricité. Soit $x \in L_\omega$. Il existe k tel que $x \in L_k$. Par construction de la tour, $[L_k : \mathbb{Q}] = 2^{k-1}$ est fini, donc L_k est une extension algébrique finie de $\mathbb{Q}$. En particulier x est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Comme cela vaut pour tout $x \in L_\omega$, l'extension $L_\omega/\mathbb{Q}$ est algébrique. $\square$

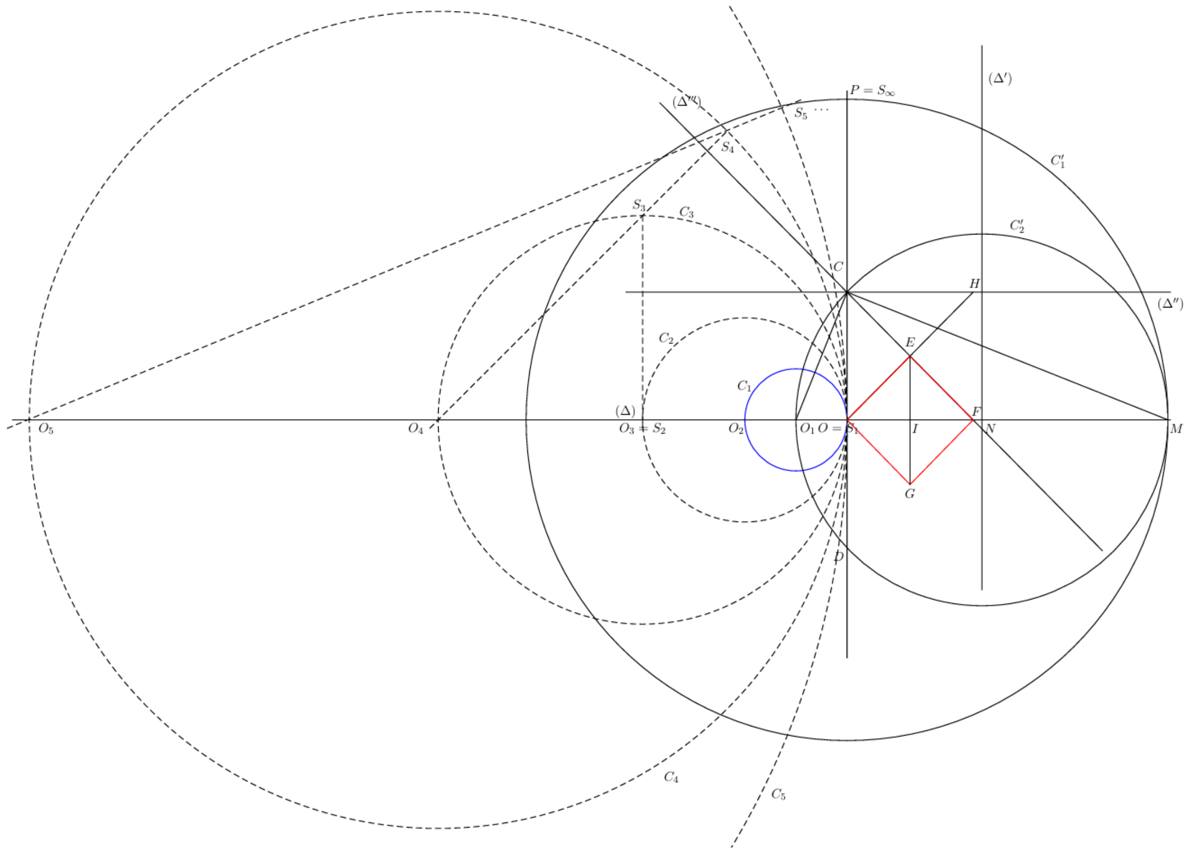

FIGURE 1 – Quadrature du cercle.

Lemme 2 (Bases emboîtées). *Il existe une suite croissante* $(B_k)_{k\geq 1}$ *de parties finies de* L_ω *telle que :*

1. *pour tout* $k \geq 1$, B_k *est une* $\mathbb{Q}$*-base de* L_k*, de cardinal* 2^{k-1} *;*
2. $B_k \subset B_{k+1}$ *pour tout* $k \geq 1$.

Par conséquent, $B_\omega := \bigcup_{k\geq 1} B_k$ *est une* $\mathbb{Q}$*-base de* L_ω.

Démonstration. Construction par récurrence sur k.

Initialisation. On prend $B_1 = \{1\}$, qui est une $\mathbb{Q}$-base de $L_1 = \mathbb{Q}$, de cardinal $2^0 = 1$.

Hérédité. Supposons construite $B_k = \{e_1, \ldots, e_{2^{k-1}}\}$ une $\mathbb{Q}$-base de L_k. Comme $[L_{k+1} : L_k] = 2$, il existe $\alpha_{k+1} \in L_{k+1} \setminus L_k$ tel que $\{1, \alpha_{k+1}\}$ soit une L_k-base de L_{k+1}. Par transitivité des bases dans les tours d'extensions, la famille

$$B_{k+1} := B_k \cup \alpha_{k+1} B_k = \{e_1, \ldots, e_{2^{k-1}}, \alpha_{k+1} e_1, \ldots, \alpha_{k+1} e_{2^{k-1}}\}$$

est une $\mathbb{Q}$-base de L_{k+1}. Elle est de cardinal $2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$, et contient B_k par construction.

Base de L_ω. Posons $B_\omega = \bigcup_{k\geq 1} B_k$. Vérifions que B_ω engendre L_ω sur $\mathbb{Q}$ et est libre.

Engendrement. Soit $x \in L_\omega$. Il existe k tel que $x \in L_k$, donc x s'écrit comme combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire finie d'éléments de $B_k \subset B_\omega$.

Liberté. Soit $\sum_{i\in I} \lambda_i b_i = 0$ une combinaison $\mathbb{Q}$-linéaire finie d'éléments distincts de B_ω, avec $\lambda_i \in \mathbb{Q}$. L'ensemble I étant fini, il existe k tel que tous les b_i appartiennent à B_k. Comme B_k est libre sur $\mathbb{Q}$ (étant une base de L_k), tous les λ_i sont nuls. □

Démonstration du théorème. **Point (1).** Le lemme 1 assure que L_ω est un sous-corps de $\mathbb{R}$, extension algébrique de $\mathbb{Q}$. Par le lemme 2, L_ω admet la $\mathbb{Q}$-base $B_\omega = \bigcup_{k\geq 1} B_k$.

Calculons son cardinal. C'est une union dénombrable (indexée par $k \in \mathbb{N}^*$) d'ensembles finis (de cardinaux respectifs 2^{k-1}). Une union dénombrable d'ensembles finis est au plus dénombrable. Comme B_ω contient B_k pour tout k, et que $|B_k| = 2^{k-1} \to \infty$, B_ω est infini. Donc $|B_\omega| = \aleph_0$, et par définition du degré d'extension :

$$[L_\omega : \mathbb{Q}] = \dim_{\mathbb{Q}} L_\omega = |B_\omega| = \aleph_0.$$

Point (3). Montrons d'abord que $\pi \notin L_\omega$. Par le lemme 1, tout élément de L_ω est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Or le théorème de Lindemann (1882) établit que π est transcendant sur $\mathbb{Q}$. Donc $\pi \notin L_\omega$.

Montrons ensuite que $\pi \in \widehat{L_\omega}$. Avec les paramètres $\theta_1 = \pi$ et $\rho_1 = 1$, on a $\ell_k = \rho_k\theta_k = \pi$ exactement, et la longueur de la corde rectifiée vaut $y_{S_k} = 2^{k-1}\sin(\pi/2^{k-1})$. Par l'équivalent $\sin u \sim u$ en 0 :

$$y_{S_k} = 2^{k-1}\sin(\pi/2^{k-1}) \xrightarrow[k\to\infty]{} \pi.$$

Comme chaque $y_{S_k} \in L_k \subset L_\omega$, on a bien $\pi \in \widehat{L_\omega}$. Combiné avec $\pi \notin L_\omega$, on obtient $\pi \in \widehat{L_\omega} \setminus L_\omega$.

Point (2). Observons que $\mathbb{Q} = L_1 \subset L_\omega$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, L_ω l'est également, donc sa fermeture topologique dans $\mathbb{R}$ vaut $\mathbb{R}$ tout entier :

$$\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}, \qquad |\widehat{L_\omega}| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}.$$

□

Remarque 1 (Densité versus constructivité)**.** *La preuve du point (2) repose sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, qui suffit déjà à donner $\widehat{L_\omega} = \mathbb{R}$. Le saut de cardinalité $\aleph_0 \to 2^{\aleph_0}$ n'est donc pas spécifique à notre construction par bissection : il résulte de la complétion métrique de $\mathbb{R}$. Ce qui est propre à notre construction, c'est de fournir un* témoin géométrique explicite *de l'appartenance $\pi \in \widehat{L_\omega}$: la suite (y_{S_k}) est constructible à la règle et au compas, et converge vers π par un procédé déterministe. L'apport conceptuel se situe donc moins dans le cardinal de la fermeture que dans le caractère effectif et géométrique de l'approximation.*

Remarque 2 (Statut de S_ω)**.** *Le point $S_\omega = \lim_k S_k$ existe dans $\mathbb{R}^2$ par convergence de la suite, et son ordonnée vaut $y_{S_\omega} = \pi$. Toutefois, S_ω n'appartient pas à L_ω^2 : il vit dans $\widehat{L_\omega}^2 = \mathbb{R}^2$. Ainsi l'écriture symbolique « $\pi = S_\omega$ » doit s'entendre comme un passage à la limite topologique, et non comme une étape supplémentaire de la récurrence algébrique. C'est précisément cette distinction qui assure la compatibilité de notre construction avec le théorème de Lindemann-Wantzel : π* ***est atteint comme limite d'éléments constructibles, sans être lui-même un élément de la tour algébrique****.*

Ce résultat prolonge l'approche de Wantzel à l'ordinal ω et jette un pont entre théorie de Galois, logique des ordinaux et géométrie constructive. Chaque approximation y_{S_k} est constructible à la règle et au compas en un nombre fini d'étapes, et $\pi = \lim_{k\to\infty} y_{S_k}$ est obtenu comme limite d'un procédé constructif transfini.

Ce lien prolonge également l'approche grecque. Nous obtenons un procédé récursif à règle finie qui produit π comme objet mathématique bien défini. Puisqu'il n'existe pas de suite finie d'opérations à la règle et au compas pour construire π, nous ne contredisons pas Lindemann-Wantzel. L'impossibilité de la quadrature reste liée à la convention antique exigeant que la géométrie se fasse à la règle et au compas en un temps fini (Platon).

Cette convention est devenue une frontière mathématique ; la conceptualisation de l'infini achevé par Cantor, puis Hilbert, autorise cette construction transfinie.

Par ailleurs, notre construction donne un sens géométrique à l'algèbre de Viète : on retrouve analytiquement la formule de Viète pour la suite (y_{S_k}).

2 Interprétation algorithmique

On remarquera que π est calculable au sens de Turing. Nous disposons d'un algorithme pour construire π à l'infini : π est constructible au sens de Bishop et de l'intuitionnisme de Brouwer. Examinons la vitesse de convergence.

On a $y_k = \rho_k \sin(\theta_k) = 2^{k-1}\rho_1 \sin\left(\frac{\theta_1}{2^{k-1}}\right)$. On en déduit à chaque pas l'erreur $\epsilon_k = \rho_1\theta_1 - y_k$. Posons $u_k = \frac{\theta_1}{2^{k-1}}$, qui tend vers 0 lorsque $k \to \infty$. Le développement de Taylor de sin donne :

$$\sin(u_k) = u_k - \frac{u_k^3}{6} + \frac{u_k^5}{120} - \dots$$

On en déduit l'expression de l'écart :

$$\epsilon_k = \rho_1\theta_1 \left(\frac{\theta_1^2}{6 \cdot 4^{k-1}} - \frac{\theta_1^4}{120 \cdot 16^{k-1}} + \dots \right),$$

soit, à l'ordre dominant :

$$\epsilon_k \sim \frac{\rho_1\theta_1^3}{6} \cdot \frac{1}{4^{k-1}}.$$

C'est donc une convergence géométrique de raison un quart. En dix étapes on obtient six décimales. Bien que de convergence identique à celle d'Archimède, la construction est lente : par comparaison, les séries modernes de Ramanujan pour π gagnent 8 décimales par pas.

3 Interprétation suivant la théorie des périodes (Kontsevitch-Zagier)

On prend $\rho_1 = 1$ et $\theta_1 = \pi$.

Définition 1 (Période)**.** *Un nombre complexe α est une période si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont des intégrales de fonctions rationnelles à coefficients rationnels sur des domaines de $\mathbb{R}^n$ définis par des inégalités polynomiales à coefficients rationnels.*

On appelle $\mathcal{P}$ l'anneau dénombrable formé par les périodes. Alors π est un exemple canonique de période. Soit le demi-cercle $y = \sqrt{1-x^2}$:

$$\pi = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + y'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a par ailleurs $y_{S_{k+1}} = 2^k \sin\left(\frac{\pi}{2^k}\right) = 2^k \int_0^{\pi/2^k} \cos t\, dt$. Ainsi (y_{S_k}) est une suite de périodes convergeant vers la période π, toutes dans le même anneau $\mathcal{P}$. On remarquera que les ℓ_k sont, eux, tous invariants et valent π.

Considérons la conjecture des périodes :

Conjecture 1 (Des périodes)**.** *Si une période admet deux représentations intégrales différentes, alors on peut passer de l'une à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires : additivité, changement de variables, intégration par parties et formules de Stokes.*

C'est sur ℓ_k que se vérifie la conjecture des périodes. En effet, $\ell_k = \int_0^{\theta_k} \rho_k \, d\theta_k = \rho_k \theta_k = \pi$. Or passer de k à $k+1$ revient aux changements de variables $\theta \mapsto \frac{\theta}{2}$ et $\rho \mapsto 2\rho$. On respecte donc la conjecture de Kontsevitch-Zagier : le changement de variable préserve la valeur de l'intégrale. On réalise géométriquement la suite de transformations algébriques de la période π. Nous avons ainsi un témoin géométrique de la structure profonde des périodes.

La théorie des périodes nous éclaire sur un nouveau statut de π : il est presque algébrique, il vit dans un anneau dénombrable $\mathcal{P}$ qui contient $\overline{\mathbb{Q}}$ et l'enrichit par les valeurs d'intégrales de fonctions rationnelles sur des domaines semi-algébriques rationnels.