L'angle d'un trinôme

Forme trigonométrique des racines et moyennes

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On écrit sous forme trigonométrique les racines complexes d'un trinôme réel, à l'aide de ses moyennes. Le module des racines est la moyenne géométrique μ_g, et leur argument φ vérifie $\cos\varphi = \mu_a/\mu_g$, rapport de la moyenne arithmétique à la moyenne géométrique. La moyenne quadratique correspond à l'angle double : $\mu_q^2 = \mu_g^2 \cos 2\varphi$, de sorte que la relation $\mu_a^2 = \frac{\mu_g^2+\mu_q^2}{2}$ entre les trois moyennes n'est autre que la formule $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$. Pour des racines réelles, la même construction donne un angle hyperbolique. On en tire plusieurs conséquences arithmétiques. Si le trinôme est rationnel, $\cos^2\varphi = \Sigma^2/(4\Pi)$ est rationnel, et il ne dépend que de la forme du trinôme, non de sa taille. Le cosinus et le sinus sont tous deux rationnels exactement lorsque les deux moyennes et la partie partielle forment un triplet pythagoricien, ce qui décrit les points rationnels du cercle unité. Le théorème de Niven limite toutefois la portée de ces valeurs : un trinôme rationnel n'a un angle égal à une fraction rationnelle de π que dans quatre cas. L'intérêt principal de la forme trigonométrique apparaît avec les puissances : les sommes $x'^n + x''^n = 2\mu_g^n \cos n\varphi$ suivent une récurrence à coefficients entiers, qui décrit une rotation de l'angle φ à chaque pas. Lorsque l'angle n'est pas une fraction rationnelle de π, ce qui se voit par exemple sur les dénominateurs des cosinus, les directions successives sont denses et équiréparties sur le cercle, et leurs cosinus, rationnels, sont denses dans $[-1, 1]$. Il en résulte une infinité d'angles distincts dont la trisection est constructible à la règle et au compas. On termine par le lien avec la formule trigonométrique du troisième degré.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels **2**

3 La forme trigonométrique par les moyennes **2**
3.1 Le cas réel : un angle hyperbolique 3

4 Un angle qui ne dépend que de la forme **4**

5 Valeurs rationnelles **4**
5.1 Cosinus carré rationnel 4
5.2 Cosinus et sinus rationnels : les triplets pythagoriciens 4

6 La limite de Niven **5**

7 Les puissances : une rotation à chaque pas **6**
7.1 Les directions remplissent le cercle 7
7.2 Une infinité d'angles trisécables 9

8 Le lien avec le troisième degré **11**

9 Lecture dans la théorie du grain **11**

10 Bilan **11**

1 Introduction

Les racines complexes d'un trinôme réel $x^2 - \Sigma x + \Pi$ s'écrivent $\mu_a \pm i\beta$, où $\mu_a = \Sigma/2$ est leur partie propre et β leur partie partielle [1]. Toute racine complexe a aussi une forme trigonométrique, $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. On montre ici que cette forme s'exprime simplement avec les moyennes du trinôme, et l'on examine ce qu'elle apporte : des valeurs explicites, souvent rationnelles, du cosinus et du sinus, une lecture des trois moyennes par l'angle et l'angle double, et une description des puissances des racines par une rotation.

Statut. Les propositions sont démontrées. Le théorème de Niven et la paramétrisation des triplets pythagoriciens sont des résultats classiques, cités [9, 5]. La section 9 relève de l'interprétation.

2 Rappels

Soit $x^2 - \Sigma x + \Pi$ un trinôme à coefficients réels, de racines x' et x''. On note

$$\mu_a = \frac{\Sigma}{2}, \qquad \mu_g^2 = \Pi, \qquad \mu_q^2 = \frac{x'^2 + x''^2}{2} = 2\mu_a^2 - \mu_g^2,$$

la moyenne arithmétique, le carré de la moyenne géométrique et le carré de la moyenne quadratique des racines ; la dernière expression vient de $x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x''$. La *marge* est $D = \mu_a^2 - \mu_g^2$. Entre les trois moyennes, on a toujours

$$\mu_a^2 = \frac{\mu_g^2 + \mu_q^2}{2}.$$

Si $D < 0$, les racines sont $\mu_a \pm i\beta$, avec $\beta^2 = -D = \mu_g^2 - \mu_a^2 > 0$, et l'on a les deux relations

$$\Pi = \mu_g^2 = \mu_a^2 + \beta^2, \qquad \mu_q^2 = \mu_a^2 - \beta^2.$$

La première est *circulaire* : elle donne le produit des racines complexes. La seconde est *hyperbolique* : elle donne le produit des racines réelles $\mu_a \pm \beta$ du trinôme dual, de même somme et de marge opposée [2].

Remarque (Une erreur de signe à éviter). Pour calculer le module des racines complexes, il faut ajouter $\beta^2 = -D$ à μ_a^2, et non D. Ajouter D revient à poser $(i\beta)^2 = +\beta^2$, c'est-à-dire à oublier que $i^2 = -1$; on obtient alors $\mu_a^2 + D = 2\mu_a^2 - \mu_g^2 = \mu_q^2$, la moyenne quadratique, qui n'est pas le module.

3 La forme trigonométrique par les moyennes

Proposition 1 (Module et argument)**.** *Si $D < 0$, les racines s'écrivent*

$$x', x'' = \mu_g\,(\cos\varphi \pm i\sin\varphi), \qquad \varphi \in]0, \pi[,$$

avec

$$\cos\varphi = \frac{\mu_a}{\mu_g}, \qquad \sin\varphi = \frac{\beta}{\mu_g} = \frac{\sqrt{\mu_g^2 - \mu_a^2}}{\mu_g}, \qquad \tan\varphi = \frac{\beta}{\mu_a}\ (\mu_a \neq 0).$$

Le module des racines est la moyenne géométrique, et le cosinus de leur argument est le rapport de la moyenne arithmétique à la moyenne géométrique.

Démonstration. Le carré du module est $|x'|^2 = x'\,\overline{x'} = x'x'' = \Pi = \mu_g^2$, puisque les deux racines sont conjuguées. Donc $|x'| = \mu_g$, et $\mu_a + i\beta = \mu_g(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ donne $\cos\varphi = \mu_a/\mu_g$ et $\sin\varphi = \beta/\mu_g$. Comme $\beta > 0$, $\sin\varphi > 0$ et $\varphi \in]0,\pi[$. □

Le signe de $\cos\varphi$ est celui de μ_a : l'angle est aigu si la somme des racines est positive, obtus si elle est négative, droit si elle est nulle.

Proposition 2 (Les trois moyennes et l'angle double)**.** *Si $D < 0$,*

$$\mu_a = \mu_g\cos\varphi, \qquad \mu_q^2 = \mu_g^2\cos 2\varphi, \qquad \textit{et} \qquad \mu_a^2 = \frac{\mu_g^2+\mu_q^2}{2} \iff \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}.$$

La moyenne quadratique est liée à l'angle double : μ_q^2 est la partie réelle de x'^2.

Démonstration. $x'^2 = \mu_g^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$, et $\mu_q^2 = \frac{x'^2+x''^2}{2} = \frac{x'^2+\overline{x'^2}}{2} = \Re(x'^2) = \mu_g^2\cos 2\varphi$. En divisant $\mu_a^2 = \frac{\mu_g^2+\mu_q^2}{2}$ par μ_g^2, on obtient $\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$. □

La relation entre les trois moyennes, que l'on avait obtenue par l'algèbre, est donc la formule de duplication du cosinus. Elle explique aussi pourquoi μ_q^2 peut être négatif : c'est le cas dès que 2φ dépasse $\pi/2$, c'est-à-dire $\varphi > \pi/4$, soit $\mu_g^2 > 2\mu_a^2$.

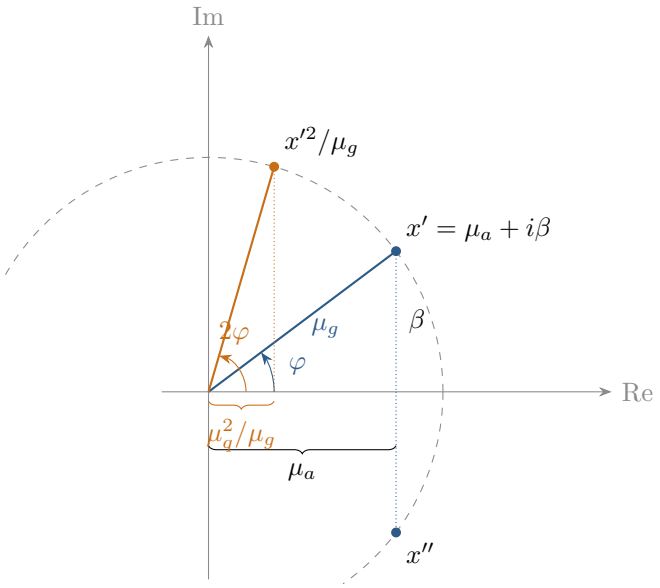


FIGURE 1 – Schéma : pour $x^2 - 8x + 25$, de racines $4 \pm 3i$. Le module est $\mu_g = 5$, le cosinus de l'argument $\mu_a/\mu_g = 4/5$. Le point x'^2/μ_g, d'argument 2φ, a pour abscisse $\mu_q^2/\mu_g = 7/5$: la moyenne quadratique se lit sur l'angle double.

3.1 Le cas réel : un angle hyperbolique

Pour des racines réelles et positives, $D > 0$ et $\Pi > 0$, la même construction donne un angle hyperbolique.

Proposition 3 (Angle hyperbolique)**.** *Si $0 < \mu_g < \mu_a$, les racines s'écrivent $\mu_a \pm \delta = \mu_g\, e^{\pm\psi}$, avec*

$$\cosh\psi = \frac{\mu_a}{\mu_g}, \qquad \sinh\psi = \frac{\delta}{\mu_g}, \qquad \mu_q^2 = \mu_g^2\cosh 2\psi.$$

Démonstration. $\mu_a^2 - \delta^2 = \Pi = \mu_g^2$, donc $(\mu_a/\mu_g)^2 - (\delta/\mu_g)^2 = 1$, et il existe $\psi > 0$ tel que $\mu_a = \mu_g \cosh\psi$ et $\delta = \mu_g \sinh\psi$. Alors $\mu_a \pm \delta = \mu_g(\cosh\psi \pm \sinh\psi) = \mu_g e^{\pm\psi}$, et $\mu_q^2 = \frac{\mu_g^2(e^{2\psi}+e^{-2\psi})}{2} = \mu_g^2 \cosh 2\psi$. □

Les racines réelles sont la moyenne géométrique multipliée et divisée par le même facteur e^{ψ} ; les racines complexes sont la moyenne géométrique tournée d'un angle $\pm\varphi$. Le rapport μ_a/μ_g est un cosinus hyperbolique dans le premier cas, circulaire dans le second : c'est la lecture hyperbolique et la lecture circulaire du grain des racines [1]. La racine double correspond à $\varphi = \psi = 0$.

4 Un angle qui ne dépend que de la forme

Proposition 4 (Invariance d'échelle)**.** *L'argument des racines ne dépend que du rapport*

$$\cos^2\varphi = \frac{\mu_a^2}{\mu_g^2} = \frac{\Sigma^2}{4\Pi}.$$

Deux trinômes à racines complexes ont le même angle si et seulement si leurs racines se déduisent les unes des autres par une même homothétie de rapport positif.

Démonstration. Remplacer les racines x', x'' par kx', kx'', avec $k > 0$, multiplie Σ par k et Π par k^2, ce qui ne change pas $\Sigma^2/(4\Pi)$ et conserve le signe de Σ, donc φ. Réciproquement, deux racines de même argument φ et de modules μ_g, μ_g' se déduisent l'une de l'autre par l'homothétie de rapport μ_g'/μ_g. □

Exemple 5. Les racines $50 \pm 25i$ du problème de la crue faible [3] sont $25(2 \pm i)$: elles ont le même angle que celles de $x^2 - 4x + 5$, avec $\cos^2\varphi = 4/5$. La part de l'impôt payée par la terre, $\mu_a^2/\Pi = 4/5$, est une propriété de la forme du problème, non de sa taille.

5 Valeurs rationnelles

5.1 Cosinus carré rationnel

Proposition 6. *Si* Σ *et* Π *sont rationnels et* $D < 0$*, alors* $\cos^2\varphi$*,* $\sin^2\varphi$ *et* $\cos 2\varphi$ *sont rationnels :*

$$\cos^2\varphi = \frac{\Sigma^2}{4\Pi}, \qquad \sin^2\varphi = 1 - \frac{\Sigma^2}{4\Pi}, \qquad \cos 2\varphi = \frac{\Sigma^2}{2\Pi} - 1.$$

Réciproquement, tout rationnel $r \in]0,1[$ *est le carré du cosinus de l'angle des racines du trinôme rationnel* $x^2 - 2x + \frac{1}{r}$.

Démonstration. Les trois expressions viennent de la proposition 4 et de $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$. Pour la réciproque, $\Sigma = 2$ et $\Pi = 1/r > 1$ donnent $D = 1 - 1/r < 0$ et $\cos^2\varphi = 4/(4/r) = r$. □

5.2 Cosinus et sinus rationnels : les triplets pythagoriciens

Le cosinus lui-même, μ_a/μ_g, n'est rationnel que si μ_g l'est, c'est-à-dire si Π est le carré d'un rationnel. Et même alors, le sinus β/μ_g peut ne pas l'être : pour $x^2 - x + 1$, $\cos\varphi = \frac{1}{2}$ mais $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Proposition 7 (Triplets pythagoriciens)**.** *Pour un trinôme rationnel à racines complexes,* $\cos\varphi$ *et* $\sin\varphi$ *sont tous deux rationnels si et seulement si* μ_a*,* β *et* μ_g *sont rationnels ; ils vérifient alors*

$$\mu_a^2 + \beta^2 = \mu_g^2,$$

et, après multiplication par un dénominateur commun, forment un triplet pythagoricien. Les trinômes dont les racines sont $(m \pm in)^2$, avec $m > n > 0$ entiers, donnent

$$\cos\varphi = \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \qquad \sin\varphi = \frac{2mn}{m^2 + n^2},$$

et tout point rationnel du cercle unité dans le demi-plan supérieur s'obtient ainsi, à l'échange près du cosinus et du sinus et au signe du cosinus près.

Démonstration. $\mu_a = \Sigma/2$ est rationnel. Si $\cos\varphi = \mu_a/\mu_g$ est rationnel et non nul, μ_g l'est ; si de plus $\sin\varphi = \beta/\mu_g$ l'est, β l'est. La réciproque est immédiate, et $\mu_a^2 + \beta^2 = \mu_g^2$ est la proposition 1. Pour $(m + in)^2 = (m^2 - n^2) + 2mn\,i$, le module est $m^2 + n^2$, d'où les deux valeurs. Que tout triplet pythagoricien primitif soit, à l'échange des deux premiers termes près, de la forme $(m^2 - n^2,\ 2mn,\ m^2 + n^2)$ est un résultat classique [5]. □

(m, n)	Racines $(m \pm in)^2$	Trinôme	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	φ (degrés)
$(2, 1)$	$3 \pm 4i$	$x^2 - 6x + 25$	$3/5$	$4/5$	53,13
$(3, 2)$	$5 \pm 12i$	$x^2 - 10x + 169$	$5/13$	$12/13$	67,38
$(4, 1)$	$15 \pm 8i$	$x^2 - 30x + 289$	$15/17$	$8/17$	28,07
$(4, 3)$	$7 \pm 24i$	$x^2 - 14x + 625$	$7/25$	$24/25$	73,74
—	$4 \pm 3i$	$x^2 - 8x + 25$	$4/5$	$3/5$	36,87

La dernière ligne montre l'échange du cosinus et du sinus : $4 \pm 3i$ a l'angle complémentaire de celui de $3 \pm 4i$.

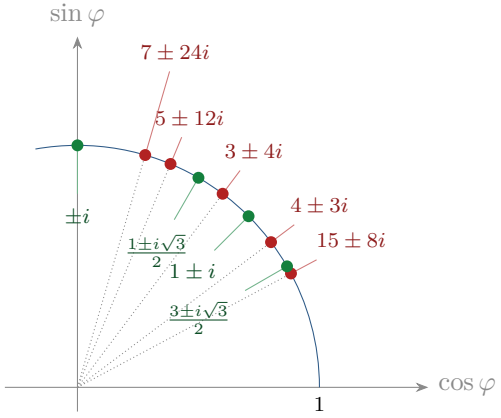


FIGURE 2 – Schéma : les points $(\cos\varphi, \sin\varphi)$ de quelques trinômes rationnels. En rouge, les triplets pythagoriciens : cosinus et sinus rationnels, angle qui n'est pas une fraction rationnelle de π. En vert, les quatre angles de Niven, $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$: angle remarquable, mais sinus ou cosinus irrationnels, sauf pour $\pm i$.

6 La limite de Niven

Un cosinus rationnel ne donne pas, en général, un angle remarquable.

Théorème 8 (Niven [9])**.** *Si φ est une fraction rationnelle de π et si $\cos\varphi$ est rationnel, alors* $\cos\varphi \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$.

Corollaire 9. *Si φ est une fraction rationnelle de π et si $\cos^2\varphi$ est rationnel, alors $\cos^2\varphi \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$. En particulier, l'angle des racines complexes d'un trinôme rationnel n'est une fraction rationnelle de π que si $\Sigma^2/(4\Pi) \in \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}\}$, c'est-à-dire si φ ou $\pi - \varphi$ vaut $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{6}$.*

Démonstration. $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$ est rationnel, et 2φ est une fraction rationnelle de π ; par le théorème, $\cos 2\varphi \in \{0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1\}$, d'où $\cos^2\varphi \in \{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0\}$. La valeur 1 est exclue pour des racines complexes, puisqu'elle donne $\sin\varphi = 0$. □

$\Sigma^2/(4\Pi)$	Exemple	Racines	φ	$\cos\varphi$, $\sin\varphi$
0	$x^2 + 1$	$\pm i$	$\pi/2$	0, 1
1/4	$x^2 - x + 1$	$\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$	$\pi/3$	$\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$
1/2	$x^2 - 2x + 2$	$1 \pm i$	$\pi/4$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$
3/4	$x^2 - 3x + 3$	$\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$	$\pi/6$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$

Les deux familles de la figure 2 sont donc disjointes, sauf pour l'angle droit : les triplets pythagoriciens ont des cosinus et des sinus rationnels, mais des angles qui ne sont pas des fractions rationnelles de π ; les angles de Niven sont remarquables, mais leur sinus ou leur cosinus est irrationnel. Ce que la forme trigonométrique explicite, ce sont des valeurs du cosinus et du sinus, non des angles remarquables.

7 Les puissances : une rotation à chaque pas

Proposition 10 (Puissances et récurrence)**.** *Posons $u_n = x'^n + x''^n$. Alors, si $D < 0$,*

$$u_n = 2\mu_g^n \cos n\varphi, \qquad u_0 = 2, \quad u_1 = \Sigma, \quad u_{n+1} = \Sigma\, u_n - \Pi\, u_{n-1}.$$

Si Σ et Π sont entiers, tous les u_n sont entiers ; donc $2\mu_g^n \cos n\varphi$ est un entier pour tout n. De plus, $\cos n\varphi = T_n(\mu_a/\mu_g)$, où T_n est le n-ième polynôme de Tchebychev.

Démonstration. Par la proposition 1, $x'^n = \mu_g^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ et $x''^n = \overline{x'^n}$, d'où $u_n = 2\mu_g^n \cos n\varphi$. Chaque racine vérifie $x^2 = \Sigma x - \Pi$, donc $x^{n+1} = \Sigma x^n - \Pi x^{n-1}$; en ajoutant pour x' et x'', on obtient la récurrence, et les valeurs initiales sont $u_0 = 2$, $u_1 = x' + x'' = \Sigma$. Par récurrence, les u_n sont entiers si Σ et Π le sont. Enfin $\cos n\varphi = T_n(\cos\varphi)$ est la définition des polynômes de Tchebychev. □

Ces suites sont les suites de Lucas associées au trinôme [6]. Elles donnent une lecture dynamique de l'angle : à chaque pas, l'état tourne de φ et son amplitude est multipliée par μ_g. C'est la lecture des équations à racines complexes, propagées sur deux moments à la fois, et celle de la flotte de Dirac, où l'angle de rotation par saison vérifie de même $\cos\varphi = \mu_a/\mu_g$ [1].

Exemple 11 (Un angle de Niven : $1 \pm i$)**.** Pour $x^2 - 2x + 2$, $\mu_g = \sqrt{2}$ et $\varphi = \pi/4$. La récurrence $u_{n+1} = 2u_n - 2u_{n-1}$ donne

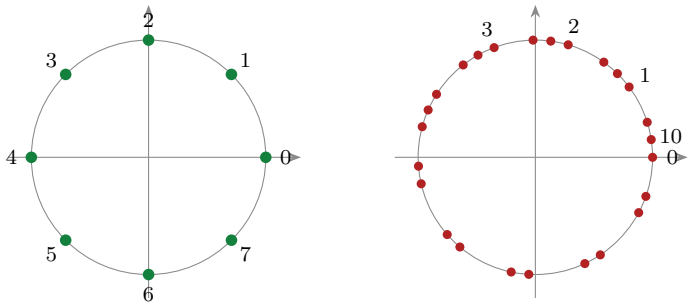
$$2,\ 2,\ 0,\ -4,\ -8,\ -8,\ 0,\ 16,\ 32,\ 32,\ 0,\ \ldots$$

soit $u_n = 2 \cdot 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}$. La direction revient à son point de départ tous les 8 pas.

Exemple 12 (Un triplet pythagoricien : $4 \pm 3i$)**.** Pour $x^2 - 8x + 25$, $\mu_g = 5$ et $\cos\varphi = 4/5$. La récurrence $u_{n+1} = 8u_n - 25u_{n-1}$ donne

$$2,\ 8,\ 14,\ -88,\ -1054,\ -6232,\ \ldots$$

d'où $\cos n\varphi = u_n/(2 \cdot 5^n)$: $\cos 2\varphi = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$, $\cos 3\varphi = -\frac{88}{250} = -\frac{44}{125}$, et ainsi de suite. Tous ces cosinus sont rationnels, de dénominateur une puissance de 5. Mais, par le théorème de Niven, la direction ne revient jamais à son point de départ : φ n'est pas une fraction rationnelle de π.



$1 \pm i$: $\varphi = \pi/4$
retour après 8 pas

$4 \pm 3i$: $\cos\varphi = 4/5$
pas de retour

FIGURE 3 – Schéma : les directions $x'^n/|x'|^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ À gauche, l'angle de Niven $\pi/4$: huit directions qui se répètent. À droite, l'angle du triplet $(4, 3, 5)$: les 25 premières directions, qui ne se répètent jamais et sont denses dans le cercle (proposition 14) ; la direction 10 est proche, sans lui être égale, de la direction 0.

7.1 Les directions remplissent le cercle

L'exemple du triplet $(4, 3, 5)$ pose deux questions : les angles $n\varphi$ remplissent-ils le cercle, et les cosinus $\cos n\varphi$ l'intervalle $[-1, 1]$? La réponse est oui dans les deux cas. On commence par une preuve élémentaire de l'irrationalité de φ/π, qui ne fait pas appel au théorème de Niven.

Proposition 13 (Dénominateurs exacts)**.** *Pour $x^2 - 8x + 25$, on a, pour tout $n \geq 0$,*

$$\cos n\varphi = \frac{u_n/2}{5^n},$$

où $u_n/2$ est un entier non divisible par 5. La fraction est donc irréductible, de dénominateur exactement 5^n. Par conséquent, les cosinus $\cos n\varphi$ sont deux à deux distincts, et φ/π est irrationnel.

Démonstration. Parité. La récurrence $u_{n+1} = 8u_n - 25u_{n-1}$ donne $u_{n+1} \equiv u_{n-1} \pmod 2$; comme $u_0 = 2$ et $u_1 = 8$ sont pairs, tous les u_n le sont.

Divisibilité par 5. Modulo 5, la récurrence devient $u_{n+1} \equiv 3u_n$, puisque $25 \equiv 0$ et $8 \equiv 3$. Avec $u_1 = 8 \equiv 3 = 3 \cdot u_0/2$, on obtient $u_n \equiv 2 \cdot 3^n \pmod 5$ pour $n \geq 0$, qui n'est jamais nul modulo 5. Donc $u_n/2 \equiv 3^n \not\equiv 0 \pmod 5$.

Conséquences. Par la proposition 10, $\cos n\varphi = u_n/(2 \cdot 5^n)$, fraction irréductible de dénominateur 5^n. Deux indices différents donnent deux dénominateurs différents, donc deux cosinus différents. Si l'on avait $\varphi = 2\pi p/q$ avec p, q entiers, la suite $\cos n\varphi$ serait périodique de période q et ne prendrait qu'un nombre fini de valeurs, ce qui contredit l'existence d'une infinité de cosinus distincts. □

On retrouve ainsi, sur cet exemple, la conclusion du théorème de Niven, par un argument de dénominateurs : la direction ne revient jamais à son point de départ, parce que les dénominateurs des cosinus croissent sans borne.

Proposition 14 (Densité des angles et des cosinus)**.** *Soit φ un angle tel que φ/π soit irrationnel, par exemple celui de $x^2 - 8x + 25$.*

(i) Les angles $n\varphi$, pris modulo 2π, sont deux à deux distincts et denses dans $[0, 2\pi[$: tout arc du cercle, si petit soit-il, contient une infinité de directions $x'^n/|x'|^n$.

(ii) Les cosinus $\cos n\varphi$ sont denses dans $[-1, 1]$. La valeur 1 n'est atteinte que pour $n = 0$, la valeur -1 jamais.

Démonstration. (i) *Les angles sont distincts.* Si $n\varphi \equiv m\varphi \pmod{2\pi}$ avec $n \neq m$, alors $(n-m)\varphi$ est un multiple entier de 2π, et φ/π serait rationnel.

Il existe un pas aussi petit qu'on veut. Soit $N \geq 1$. Découpons le cercle en N arcs de longueur $2\pi/N$. Parmi les $N+1$ directions $0, \varphi, \ldots, N\varphi$, deux tombent dans le même arc : il existe $0 \leq m < n \leq N$ tels que la direction de $(n-m)\varphi$ fasse avec la direction initiale un angle ε, non nul, de valeur absolue inférieure à $2\pi/N$. Posons $k = n - m$.

Ce pas parcourt tout le cercle. Les directions $k\varphi, 2k\varphi, 3k\varphi, \ldots$ avancent sur le cercle par pas égaux à ε, dans un sens fixé. Elles font le tour complet sans sauter d'arc de longueur $|\varepsilon|$, donc sans sauter d'arc de longueur $2\pi/N$: tout arc de longueur $2\pi/N$ contient l'une d'elles. Comme N est arbitraire, tout arc contient une direction $n\varphi$; en recommençant avec un arc plus petit contenu dans le premier et évitant les directions déjà trouvées, on en obtient une infinité.

(ii) Soit $x \in [-1, 1]$ et $\eta > 0$. Posons $\theta = \arccos x$. Le cosinus est continu : il existe un arc autour de θ sur lequel $|\cos t - x| < \eta$, et cet arc contient un $n\varphi$ par (i). Enfin $\cos n\varphi = \pm 1$ signifierait que $n\varphi$ est un multiple de π, ce qui n'arrive que pour $n = 0$, où le cosinus vaut 1. □

Sur l'exemple, le pas le plus petit parmi les premiers indices est très visible. La direction 10 fait avec la direction initiale un angle d'environ 8,7° (figure 3) ; la direction 39, un angle d'environ 0,036 radian, soit 2,1° ; la direction 166, un angle d'environ 0,0070 radian, soit 0,40°. À chaque fois, les multiples de ce pas parcourent tout le cercle par petits sauts.

On obtient ainsi une suite infinie de rationnels distincts, tous de la forme $a/5^n$, qui approchent d'aussi près que l'on veut tout point de l'intervalle $[-1, 1]$.

Remarque (Équirépartition des angles, loi de l'arc sinus pour les cosinus). Un théorème de Weyl [8] précise la densité : lorsque $\varphi/2\pi$ est irrationnel, la proportion des indices $n \leq N$ pour lesquels $n\varphi$ tombe dans un arc donné tend, quand N croît, vers la longueur de cet arc divisée par 2π. Les angles se répartissent donc *uniformément* sur le cercle.

Les cosinus, eux, ne se répartissent pas uniformément sur $[-1, 1]$: ils suivent la loi de l'arc sinus, de densité

$$\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}},$$

image de la loi uniforme sur le cercle par le cosinus. Ils s'accumulent près de ± 1, où le cosinus varie lentement, et se raréfient près de 0, où il varie vite (figure 4).

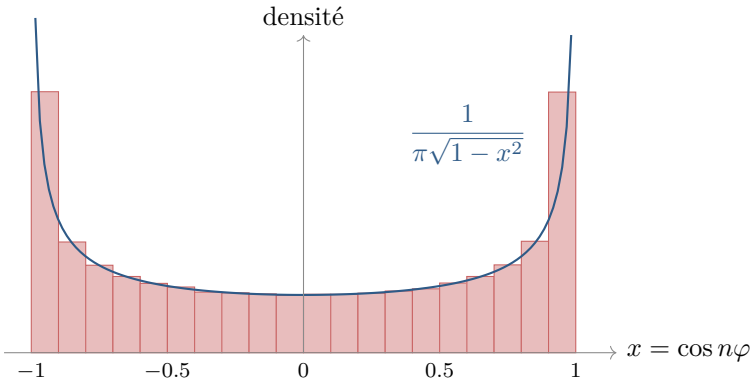


FIGURE 4 – Schéma : la répartition des cosinus $\cos n\varphi$ pour $x^2 - 8x + 25$ et $n = 1, \ldots, 5000$, en 20 classes (histogramme normalisé), comparée à la densité de l'arc sinus. Les cosinus sont denses dans $[-1, 1]$, mais plus nombreux près des bords.

Remarque (Lecture non standard). Dans le cadre non standard, la densité s'énonce ainsi : pour tout angle standard θ, il existe un indice n, en général illimité, tel que $n\varphi$ soit infiniment

proche de θ modulo 2π. Aucun rang limité ne remplit le cercle : les premières directions laissent toujours des arcs vides. C'est en allant jusqu'à des rangs illimités que les directions deviennent infiniment proches de toutes les directions standard. La propriété vaut pour tout rang illimité qui convient ; on n'attribue aucune valeur à ces rangs.

7.2 Une infinité d'angles trisécables

Les cosinus rationnels de la suite $\cos n\varphi$ ont une conséquence pour la trisection des angles. Un rationnel est constructible à la règle et au compas, et sa projection sur le cercle unité redonne l'angle : si $\cos\alpha$ est rationnel, on porte la longueur $\cos\alpha$ sur l'axe, on élève la perpendiculaire, et son intersection avec le cercle donne la direction d'angle α. Tous les angles $n\varphi$ sont donc constructibles.

Lemme 15 (Critère de trisection [7])**.** *Soit θ un angle dont le cosinus est rationnel. On peut construire à la règle et au compas un angle $\theta/3$ si et seulement si l'équation*

$$4x^3 - 3x = \cos\theta$$

a une racine rationnelle.

L'équation est celle de Tchebychev : $\cos\theta = \cos 3\frac{\theta}{3} = 4\cos^3\frac{\theta}{3} - 3\cos\frac{\theta}{3}$. Le critère est celui de Wantzel : une racine d'une équation du troisième degré à coefficients rationnels est constructible si et seulement si l'équation a une racine rationnelle [7].

Proposition 16 (Les angles trisécables de la suite)**.** *Pour $x^2 - 8x + 25$, l'angle $n\varphi$, avec $n \geq 1$, est trisécable à la règle et au compas si et seulement si n est un multiple de 3. Dans ce cas, $n = 3k$, et le tiers de $3k\varphi$ est l'angle $k\varphi$, de cosinus rationnel*

$$\cos k\varphi = \frac{u_k}{2 \cdot 5^k},$$

racine rationnelle de $4x^3 - 3x = \cos 3k\varphi$. En particulier, il existe ***une infinité d'angles deux à deux distincts****, $3\varphi, 6\varphi, 9\varphi, \ldots$,* ***dont la trisection est constructible*** *à la règle et au compas.*

Démonstration. Si $n = 3k$. L'angle $k\varphi$ a pour cosinus $u_k/(2 \cdot 5^k)$, rationnel (proposition 13), donc constructible, et $3 \cdot k\varphi = n\varphi$. Le nombre $\cos k\varphi$ est racine de $4x^3 - 3x = \cos 3k\varphi$ par la formule de Tchebychev.

Si n n'est pas un multiple de 3. Notons $v(r)$ l'exposant de 5 dans un rationnel r non nul : $v(r) = a$ si $r = 5^a\, p/q$ avec p et q premiers à 5. Par la proposition 13, $v(\cos n\varphi) = -n < 0$. Soit r une racine rationnelle de $4x^3 - 3x = \cos n\varphi$; elle est non nulle, puisque $\cos n\varphi \neq 0$.

- Si $v(r) = -m < 0$, alors $v(4r^3) = -3m < -m = v(3r)$, donc $v(4r^3 - 3r) = -3m$, et l'égalité impose $3m = n$: n est un multiple de 3.
- Si $v(r) \geq 0$, alors $v(4r^3) \geq 0$ et $v(3r) \geq 0$, donc $v(4r^3 - 3r) \geq 0 > -n$, ce qui est impossible.

Si n n'est pas un multiple de 3, l'équation n'a donc pas de racine rationnelle, et l'angle n'est pas trisécable (lemme 15).

Infinité. Les angles $3k\varphi$, $k \geq 1$, sont deux à deux distincts modulo 2π, puisque leurs cosinus ont des dénominateurs différents (proposition 13) ; chacun est trisécable par ce qui précède. □

Angle	$\cos n\varphi$	Équation $4x^3 - 3x = \cos n\varphi$	Trisection
φ	$\frac{4}{5}$	$20x^3 - 15x - 4 = 0$	impossible
2φ	$\frac{7}{25}$	$100x^3 - 75x - 7 = 0$	impossible
3φ	$-\frac{44}{125}$	racine $\frac{4}{5}$	tiers : φ
6φ	$-\frac{11753}{15625}$	racine $\frac{7}{25}$	tiers : 2φ
9φ	$\frac{1721764}{1953125}$	racine $-\frac{44}{125}$	tiers : 3φ

Le tableau, vérifié par le calcul jusqu'à $n = 12$, montre l'alternance : seuls les multiples de 3 sont trisécables. L'angle φ lui-même ne l'est pas, alors que son cosinus est rationnel et qu'il est constructible.

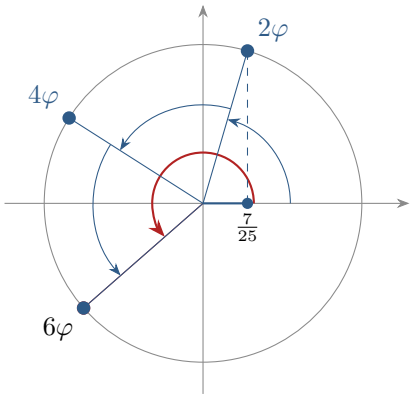


FIGURE 5 – Schéma : la trisection de l'angle 6φ. On porte la longueur rationnelle $\cos 2\varphi = 7/25$ sur l'axe ; la perpendiculaire rencontre le cercle à la direction 2φ, que l'on reporte trois fois pour retrouver 6φ.

Remarque (Ce que la proposition ne contredit pas). Le théorème de Wantzel affirme que certains angles ne sont pas trisécables, non qu'aucun ne l'est : ici, φ et 2φ ne le sont pas. Il existe d'ailleurs toujours une infinité d'angles trisécables : pour tout angle constructible α, l'angle 3α l'est, puisque son tiers est α. Ce qui est propre à la suite $n\varphi$, c'est que tous ses angles ont un cosinus rationnel, que la récurrence de Lucas donne leurs tiers explicitement, et que le critère de trisection, « n multiple de 3 », se lit sur les dénominateurs.

La trisection approchée d'un angle quelconque. Comme $3\varphi/\pi$ est irrationnel, les angles $3k\varphi$ sont denses sur le cercle (proposition 14, appliquée à 3φ). Pour tout angle θ et tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un entier k tel que $3k\varphi$ diffère de θ de moins de ε modulo 2π ; l'angle constructible $k\varphi$ diffère alors de l'un des tiers de θ, $\frac{\theta}{3} + \frac{2j\pi}{3}$ avec $j \in \{0, 1, 2\}$, de moins de $\varepsilon/3$. On obtient ainsi, par des angles à cosinus rationnel, une trisection approchée de n'importe quel angle, à la précision que l'on veut.

Remarque (Portée de la trisection approchée). Ce résultat ne fournit pas une construction de la trisection au sens de Wantzel : pour une précision ε donnée, il faut un indice k d'autant plus grand que ε est petit, et la construction de $k\varphi$ demande un nombre d'étapes qui croît avec k. Une trisection approchée à toute précision était d'ailleurs déjà accessible, par exemple par bissections répétées, puisque $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \cdots$. En non standard, pour tout angle standard θ, il existe un indice k illimité tel que $3k\varphi$ soit infiniment proche de θ : l'angle $k\varphi$ est alors infiniment proche d'un tiers de θ. C'est une trisection exacte à un infinitésimal près, une trisection « au grain près » ; mais elle demande un nombre illimité d'étapes, et n'est donc pas une construction finie.

8 Le lien avec le troisième degré

La formule trigonométrique du troisième degré emploie le même rapport. Pour X^3+pX+q à trois racines réelles, le trinôme résolvant $Z^2+qZ-p^3/27$ a des racines complexes, de moyennes $\mu_a=-q/2$ et $\mu_g^2=-p^3/27$, et les racines du cubique sont

$$X_k=2\sqrt{-p/3}\,\cos\Big(\theta+\frac{2k\pi}{3}\Big),\qquad \cos 3\theta=\frac{\mu_a}{\mu_g},$$

c'est-à-dire que 3θ est l'angle φ des racines du résolvant [4].

Proposition 17. *Pour un cubique rationnel à trois racines réelles,* $\cos^2 3\theta=-\dfrac{27q^2}{4p^3}$ *est rationnel. L'angle* 3θ *est une fraction rationnelle de* π *seulement si cette valeur appartient à* $\{0,\frac14,\frac12,\frac34\}$.

Démonstration. $\cos^2 3\theta=\mu_a^2/\mu_g^2=\frac{q^2/4}{-p^3/27}$, puis le corollaire 9. □

Pour X^3-3X+1, $\cos^2 3\theta=\frac14$ et $\cos 3\theta=-\frac12$: c'est un angle de Niven, $3\theta=\frac{2\pi}{3}$, d'où les racines $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$, $2\cos\frac{14\pi}{9}$. Pour X^3-7X+6, au contraire, $\cos^2 3\theta=\frac{243}{343}$ n'est pas une valeur de Niven : l'angle θ n'est pas une fraction rationnelle de π, alors même que les racines, 1, 2 et -3, sont entières.

9 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle ne contient pas d'énoncé nouveau.

L'angle φ mesure l'inclinaison des racines par rapport à l'axe réel, vues depuis l'origine. Son cosinus carré, μ_a^2/μ_g^2, est la part du produit que réalise la partie propre ; son sinus carré, β^2/μ_g^2, la part qui revient à la partie partielle. Dans les problèmes de partage [3], ce sont exactement la part de la demande que satisfait la ressource fine et la part qui se règle en unités grossières.

Le grain des racines, vu depuis son centre, est couché, ponctuel ou debout ; vu depuis l'origine, il est décrit par un angle hyperbolique ψ quand il est couché, nul quand il est ponctuel, et par un angle circulaire φ quand il est debout. Le quart de tour pur, $\varphi=\pi/2$, correspond à une partie propre nulle : les racines $\pm i\beta$ sont entièrement partielles.

10 Bilan

1. Le module des racines complexes est la moyenne géométrique, et $\cos\varphi=\mu_a/\mu_g$, $\sin\varphi=\sqrt{\mu_g^2-\mu_a^2}/\mu_g$ (proposition 1).
2. La moyenne quadratique correspond à l'angle double, $\mu_q^2=\mu_g^2\cos 2\varphi$; la relation $\mu_a^2=\frac{\mu_g^2+\mu_q^2}{2}$ est la formule de duplication (proposition 2). Pour des racines réelles, l'angle est hyperbolique (proposition 3).
3. Pour un trinôme rationnel, $\cos^2\varphi=\Sigma^2/(4\Pi)$ est rationnel et ne dépend que de la forme (propositions 4 et 6).
4. Le cosinus et le sinus sont tous deux rationnels exactement pour les triplets pythagoriciens (proposition 7) ; l'angle n'est une fraction rationnelle de π que pour $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$, $\pi/6$ et leurs suppléments (corollaire 9).
5. Les sommes de puissances $2\mu_g^n\cos n\varphi$ suivent une récurrence à coefficients entiers : l'angle est une rotation par pas (proposition 10).

6. Pour $x^2-8x+25$, les cosinus $\cos n\varphi$ ont pour dénominateurs exacts 5^n, ce qui prouve que φ/π est irrationnel ; les angles $n\varphi$ sont alors denses, et même équirépartis, sur le cercle, et les cosinus denses dans $[-1,1]$, selon la loi de l'arc sinus (propositions 13 et 14).
7. Il existe une infinité d'angles constructibles dont la trisection est constructible : pour $x^2-8x+25$, l'angle $n\varphi$ est trisécable si et seulement si 3 divise n, et le tiers de $3k\varphi$ est $k\varphi$, de cosinus rationnel $u_k/(2\cdot 5^k)$; par densité, on en tire une trisection approchée de tout angle, qui n'est pas une construction finie (proposition 16).
8. Le même rapport μ_a/μ_g donne l'angle 3θ de la formule trigonométrique du troisième degré (proposition 17).

Références

[1] H. Genvrin, *Le grain des racines. Pousser les formules de Viète jusqu'au bout : partie propre, partie partielle et unité imaginaire*, octobre 2026.

[2] H. Genvrin, *Le groupe de rotation sous-jacent à un trinôme*, octobre 2026.

[3] H. Genvrin, *Les crues du Nil et l'impôt*, octobre 2026.

[4] H. Genvrin, *Le cubique par les moyennes*, octobre 2026.

[5] G. H. Hardy et E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press (1^{re} éd. 1938).

[6] É. Lucas, « Théorie des fonctions numériques simplement périodiques », *American Journal of Mathematics* 1 (1878).

[7] P. L. Wantzel, « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 2 (1837), 366–372.

[8] H. Weyl, « Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins », *Mathematische Annalen* 77 (1916), 313–352.

[9] I. Niven, *Irrational Numbers*, Carus Mathematical Monographs 11, Mathematical Association of America, 1956.