L'infini actuel

De la totalité au point limite : compactifier pour rendre l'infini opératoire

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On fait la synthèse des rapports entre infini potentiel et infini actuel, en partant de la théorie des ensembles ZFC. L'axiome de l'infini fait exister la totalité $\mathbb{N}$, mais une totalité sans dernier élément, dont tous les éléments sont finis : il ne fournit aucun terme « à l'infini », et aucune suite n'y arrive. En ce sens, l'infini actuel de ZFC est symbolique. Pour le rendre opératoire, c'est-à-dire pour attribuer une valeur à l'infini (une limite, une somme, l'aboutissement d'un mouvement, un point du continu), il faut adjoindre un point limite : c'est la compactification $\omega + 1 = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$, et plus généralement la complétion. On montre que ce geste ne coûte aucun axiome supplémentaire pour les entiers, et qu'il caractérise la convergence comme une continuité. Mais il ne garantit pas la continuité : compactifier fournit un lieu et, du côté des valeurs, l'existence de valeurs d'adhérence, mais la valeur placée au point limite reste à choisir. L'exemple de l'arbre de séries montre qu'elle peut même n'être aucune valeur d'adhérence : toutes les sommes finies valent $+\infty$, et la valeur au point limite, finie, n'en est qu'un minorant (lemme de Fatou). On examine enfin le cas du continu et de la droite de Hilbert, ainsi que la chute libre, relue dans la théorie du grain : si le point absolu est un grain, le continu se discrétise suivant le grain, et la chute se fait en un nombre illimité d'étapes qui a une dernière étape. Le grain spatial, image du grain du temps, grossit avec le jacobien de la chute selon la loi des nombres impairs de Galilée, et la dichotomie de Zénon s'achève au rang ν. On termine par la lecture non standard de la compactification.

1 Infini potentiel et infini actuel

La distinction remonte à Aristote (*Physique*, livre III). L'*infini potentiel* est celui d'un processus qui peut toujours être poursuivi : on peut toujours ajouter une unité à un nombre, toujours diviser une grandeur. L'*infini actuel*, ou infini en acte, est celui d'une totalité infinie donnée d'un seul bloc. Aristote n'admettait que le premier. Cantor a imposé le second à la fin du XIX$^{\text{e}}$ siècle, et la théorie des ensembles de Zermelo–Fraenkel avec l'axiome du choix (ZFC) l'a pris pour fondement.

Les mathématiques contemporaines ne tranchent pas entre ces deux conceptions par la logique seule. L'intuitionnisme de Brouwer, l'analyse constructive de Bishop ou la conception du continu de Weyl travaillent avec un infini potentiel ; ZFC travaille avec un infini actuel. On se place ici dans ZFC, et l'on cherche à préciser ce que cet infini actuel donne, et ce qu'il ne donne pas.

2 L'infini actuel dans ZFC

2.1 L'axiome de l'infini

L'axiome de l'infini affirme l'existence d'un ensemble I contenant l'ensemble vide et stable par l'opération $x \mapsto x \cup \{x\}$. Dans la construction de von Neumann, chaque entier est l'ensemble

de ses prédécesseurs : $0 = \varnothing$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$, $3 = \{0, 1, 2\}$, etc. Le plus petit ensemble I satisfaisant l'axiome est alors $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$, qui est aussi le premier ordinal infini, noté ω.

Sans cet axiome, la théorie ZF démontre encore l'existence de chaque entier pris isolément, mais non celle de l'ensemble qui les réunit tous. C'est l'infini potentiel, formalisé : on peut toujours aller plus loin, mais la collection n'est jamais un objet. La théorie obtenue en remplaçant l'axiome de l'infini par sa négation est mutuellement interprétable avec l'arithmétique de Peano (Kaye et Wong, 2007).

L'axiome de l'infini est donc exactement le geste qui fait passer du potentiel à l'actuel : il affirme que la collection des entiers est un objet.

2.2 Une totalité sans dernier élément

Ce que l'axiome donne est une totalité ; ce n'est pas un terme infini.

Proposition 1. *Tout élément de $\mathbb{N}$ est un entier fini, et $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément.*

Démonstration. Par définition de $\mathbb{N}$ comme plus petit ensemble contenant 0 et stable par successeur, la propriété « être fini » s'étend de 0 à tous ses éléments par récurrence. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n < n + 1$. □

En particulier, il n'existe pas d'indice $n_\infty \in \mathbb{N}$. Une suite (u_n) est une fonction définie sur $\mathbb{N}$: elle a une valeur en chaque entier fini, et en rien d'autre. L'expression u_{n_∞} n'est pas définie dans ZFC.

Cardinal et type d'ordre. Deux propriétés doivent être distinguées. Être une totalité actuelle, et avoir tel cardinal, sont des propriétés de l'ensemble ; avoir ou non un dernier élément est une propriété de son *ordre*. Ainsi $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ sont tous deux des totalités actuelles de même cardinal $\aleph_0$: l'application $\omega \mapsto 0$, $n \mapsto n + 1$ est une bijection. Mais elles n'ont pas le même type d'ordre : ω n'a pas de dernier élément, $\omega + 1$ en a un, ω, qui n'a pas de prédécesseur. Un ordinal non nul sans prédécesseur est dit *limite*.

L'ordre des quantificateurs. Le fait que tous les entiers soient donnés simultanément rend tentante l'interversion de « pour tout » et « il existe ». Par exemple, pour toute suite d'ensembles décroissante qui finit par isoler chaque entier, l'énoncé « pour tout n, il existe une étape où n est isolé » peut être vrai sans que l'énoncé « il existe une étape où tous les n sont isolés » le soit. L'infini actuel n'autorise pas cette interversion : il faudrait une étape plus grande que tous les entiers, qui n'existe pas dans $\mathbb{N}$.

2.3 La convergence en acte, sans arrivée

Dans ZFC, une suite (u_n) converge vers ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Les quantificateurs portent sur la totalité achevée $\mathbb{N}$: la convergence est un énoncé en acte sur la suite prise comme un tout. Mais aucun terme n'est égal à ℓ en général, et il n'existe pas de terme « à l'infini ». La convergence n'est pas une arrivée, c'est une approche : tout voisinage de ℓ contient tous les termes à partir d'un certain rang.

Le paradoxe d'Achille l'illustre. Aucune somme partielle de $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ ne vaut 1. Pourtant la somme vaut 1, définie en acte comme la borne supérieure des sommes partielles. Pour une série à termes positifs (a_n) et une partie $I \subset \mathbb{N}$, on peut d'ailleurs définir la somme sans aucune idée de processus :

$$\Phi(I) = \sum_{n \in I} a_n = \sup\Big\{ \sum_{n \in F} a_n \ : F \subset I,\ F \text{ fini} \Big\} \in [0, +\infty].$$

Bilan. L'infini actuel de ZFC donne la totalité $\mathbb{N}$, et permet d'énoncer en acte qu'une suite converge. Mais il ne donne aucun lieu où la suite prendrait sa valeur limite. En ce sens, on peut le dire *symbolique* : il garantit l'existence de la totalité, sans fournir de terme à l'infini sur lequel opérer.

3 La compactification : un infini en acte opératoire

3.1 Le point à l'infini

Une fois $\mathbb{N}$ disponible, on peut lui adjoindre un point sans aucun axiome supplémentaire :

$$\mathbb{N} \cup \{\omega\} = \omega \cup \{\omega\} = \omega + 1.$$

Dans la construction de von Neumann, le point ajouté est l'ensemble $\mathbb{N}$ lui-même, pris comme élément. Son existence découle des axiomes de la paire et de la réunion.

Définition 2. On munit $\omega + 1$ de la topologie de l'ordre : les entiers sont des points isolés, et les voisinages de ω sont les ensembles $\{n \geq n_0\} \cup \{\omega\}$. C'est le *compactifié d'Alexandrov* de $\mathbb{N}$ discret. Pour une suite (x_n) et un point x_ω, on appelle *prolongement* de la suite par x_ω la fonction définie sur $\omega + 1$ qui vaut x_n en n et x_ω en ω.

Proposition 3. *L'espace $\omega+1$ est compact, et une suite (x_n) converge vers x_ω si et seulement si son prolongement par x_ω est continu en ω.*

Démonstration. Un recouvrement ouvert de $\omega + 1$ contient un ouvert $U \ni \omega$, qui contient tous les entiers à partir d'un rang n_0 ; il suffit de lui adjoindre un ouvert pour chacun des entiers $< n_0$. Pour la seconde assertion, la continuité en ω s'écrit : pour tout voisinage V de x_ω, il existe n_0 tel que $x_n \in V$ pour tout $n \geq n_0$; c'est la définition de la convergence. □

La compactification change le statut de la limite. Sans elle, ℓ est seulement une valeur dont les termes s'approchent. Avec elle, ℓ devient la valeur d'une fonction en un point, $u_\omega = \ell$, et la convergence devient une propriété de cette fonction, sa continuité. Aucune suite n'« arrive » en ω, qui n'est le successeur de rien ; mais il y a désormais, en ω, une valeur sur laquelle on peut opérer.

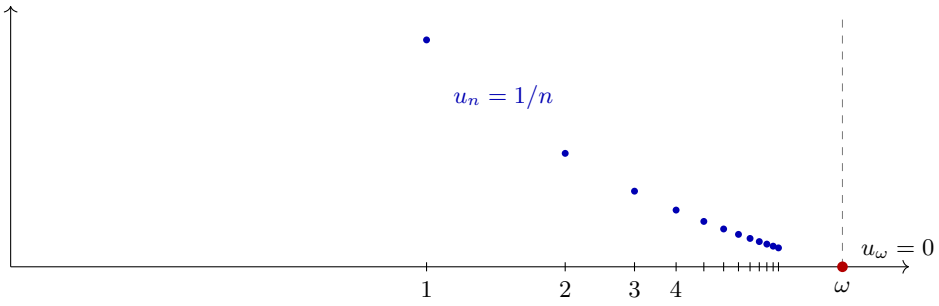


Figure 1: La compactification $\omega + 1$, représentée en plaçant l'entier n à l'abscisse $1 - \frac{1}{n+1}$. Les entiers s'accumulent vers ω ; la suite $u_n = 1/n$ ne prend jamais la valeur 0, mais son prolongement par $u_\omega = 0$ est continu.

3.2 Autres compactifications et complétions

Le même geste se retrouve dans de nombreuses constructions classiques.

- *La droite achevée* $[0, +\infty]$: on adjoint à $[0, +\infty[$ le point $+\infty$, ce qui permet d'attribuer une somme $\Phi(I)$ à toute série à termes positifs, convergente ou non.

- *La droite réelle* $\mathbb{R}$, complétion de $\mathbb{Q}$ par coupures de Dedekind ou par suites de Cauchy : on adjoint, en une seule fois, toutes les limites possibles. Ce geste-là exige davantage que l'axiome de l'infini : il utilise l'axiome de l'ensemble des parties, et produit un ensemble non dénombrable.
- *Les points à l'infini* de la géométrie projective, où deux droites parallèles se coupent en un point adjoint.
- *L'axiome de complétude* de Hilbert, étudié à la section 5.3, qui impose à la droite de contenir déjà tous ses points limites.

Hilbert appelait « éléments idéaux » les objets adjoints de cette manière : ils ne sont pas donnés par l'expérience, mais ils simplifient et unifient la théorie.

3.3 La thèse

Thèse 4. L'infini actuel postulé par l'axiome de l'infini est une totalité sans dernier élément : il ne permet d'attribuer de valeur à l'infini à aucune suite. Pour que l'infini actuel soit *opératoire*, au sens où l'on peut y placer une limite, une somme, l'aboutissement d'un mouvement ou un point du continu, et raisonner sur cette valeur comme sur toute autre, il faut le compactifier ou le compléter, c'est-à-dire adjoindre explicitement les points limites. L'axiome de l'infini fait exister la *totalité* ; la compactification lui adjoint le *lieu* de la limite ; il reste à y *placer* une valeur, et ce choix n'est imposé par la continuité que lorsque la suite a une seule valeur d'adhérence.

Deux remarques précisent la portée de cette thèse. D'une part, pour les entiers, la compactification ne demande aucun axiome nouveau : elle est gratuite une fois $\mathbb{N}$ donné, et son point à l'infini est $\mathbb{N}$ lui-même. D'autre part, elle ne rend rien continu : elle fournit un lieu et, si l'on compactifie aussi l'espace des valeurs, des valeurs d'adhérence, mais la continuité dépend de la valeur que l'on place au point limite. La sous-section suivante le précise.

3.4 Compactifier les indices, compactifier les valeurs

Deux compactifications distinctes interviennent. Compactifier les *indices*, en passant de $\mathbb{N}$ à $\omega + 1$, fournit le point ω mais aucune valeur en ce point. Compactifier les *valeurs*, par exemple en passant de $[0, +\infty[$ à $[0, +\infty]$, garantit l'existence de valeurs d'adhérence.

Proposition 5. *Soit K un espace métrique compact, par exemple $[0, +\infty]$, et (x_n) une suite de K. Notons A l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.*

1. *A est non vide.*
2. *Pour $x_\omega \in K$, le prolongement de (x_n) par x_ω est continu en ω si et seulement si $A = \{x_\omega\}$.*

Démonstration. Le premier point est le théorème de Bolzano–Weierstrass dans un compact métrique. Pour le second, si le prolongement est continu, la suite converge vers x_ω, qui est alors son unique valeur d'adhérence. Réciproquement, si $A = \{x_\omega\}$ et si la suite ne convergeait pas vers x_ω, il existerait un voisinage V de x_ω et une sous-suite restant hors de V ; par compacité, celle-ci aurait une valeur d'adhérence dans le fermé $K \setminus V$, distincte de x_ω, ce qui est exclu. □

La compactification ne donne donc pas la continuité, mais seulement des candidats : les valeurs d'adhérence. La suite $(-1)^n$ en a deux, -1 et 1, et aucune valeur placée en ω ne rend son prolongement continu, bien que tout soit compact. Pour qu'un prolongement continu existe, il faut une seule valeur d'adhérence, et il faut la choisir.

4 La valeur au point limite : le saut

4.1 L'arbre de séries

Soit $\sum a_n$ une série divergente à termes positifs décroissants, par exemple la série des inverses des nombres premiers ou la série harmonique. On construit un arbre binaire de séries en séparant, à chaque étage, les termes de rang impair et ceux de rang pair. À l'étage k, une série a pour ensemble d'indices une progression arithmétique $I_{k,q} = \{r,\ r+2^{k-1},\ r+2\cdot 2^{k-1}, \dots\}$. On établit les faits suivants.

1. Toutes les séries de tous les étages divergent : $\Phi(I_{k,q}) = +\infty$.
2. Le long d'une branche β, l'intersection $I_\beta = \bigcap_k I_{k,q_k}$ contient au plus un indice r : la série limite a au plus un terme, et converge vers a_r (ou 0).
3. Chaque série se décompose en une partie divergente $A(N)/2^{k-1}$ et une constante finie $c_{k,q}$, et le long d'une branche, $c_{k,q_k} \to a_r$ (ou 0).

Proposition 6 (Le saut en ω)**.** *Le long d'une branche β, notons $v_\beta = \Phi(I_\beta)$.*

1. *Le prolongement de $k \mapsto \mathbf{1}_{I_{k,q_k}}$ par $\mathbf{1}_{I_\beta}$ est continu en ω, pour la convergence terme à terme.*
2. *Le prolongement de $k \mapsto c_{k,q_k}$ par v_β est continu en ω.*
3. *Le prolongement de $k \mapsto \Phi(I_{k,q_k})$ par v_β est discontinu en ω : il vaut $+\infty$ en tout étage fini, et $v_\beta < +\infty$ en ω.*

Les séries de l'arbre, étage par étage, ne présentent aucun saut : leurs sommes valent toutes $+\infty$. Dans $[0, +\infty]$, leur unique valeur d'adhérence est $+\infty$, et le seul prolongement continu est celui qui place $+\infty$ en ω (proposition 5). Or la valeur que l'on place en ω, la somme v_β de la série limite, n'est pas obtenue à partir des sommes : on passe d'abord à la limite des ensembles d'indices, puis l'on somme. Elle n'est même pas une valeur d'adhérence des sommes. Le saut apparaît donc au moment où l'on compactifie la branche, non parce que la compactification le produit d'elle-même, mais parce que la valeur placée au point limite est choisie par un autre chemin que celui des sommes. Elle est en revanche l'unique valeur d'adhérence, donc la limite, des constantes finies.

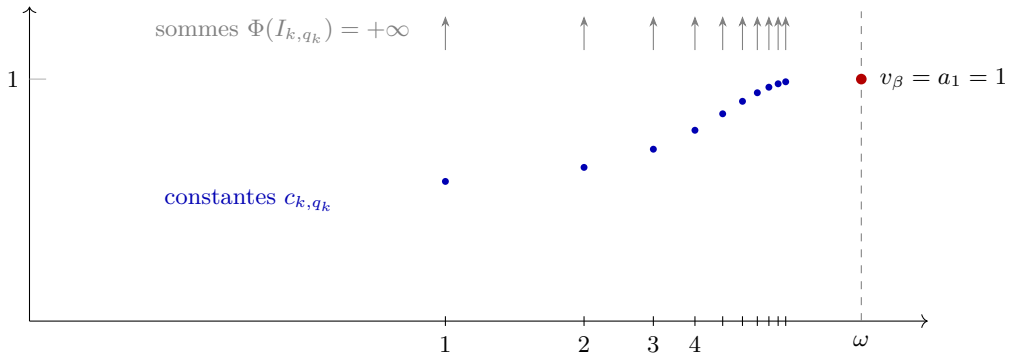


Figure 2: La branche « toujours à gauche » de l'arbre harmonique, portant le terme $a_1 = 1$. Les constantes finies (points bleus) tendent continûment vers 1 ; les sommes (flèches grises) valent $+\infty$ à tout étage fini. Au point ω, la valeur 1 prolonge continûment les constantes, mais pas les sommes : c'est le saut.

4.2 La leçon générale : le lemme de Fatou

La compactification des ensembles d'indices est continue, mais la somme Φ n'est que semi-continue inférieurement pour la convergence terme à terme. C'est le lemme de Fatou, appliqué à la mesure de comptage :

$$\Phi\Big(\lim_k I_k\Big) \leq \liminf_k \Phi(I_k).$$

Le membre de droite est la plus petite valeur d'adhérence des sommes. Le lemme de Fatou situe donc exactement la valeur placée en ω : elle est *inférieure ou égale à la plus petite valeur d'adhérence* des sommes, sans être nécessairement l'une d'elles. L'inégalité peut être stricte : à la limite, la somme peut chuter, la masse s'échappant vers des indices de plus en plus grands ; elle ne peut pas monter. En composant un prolongement continu (celui des ensembles d'indices) avec une application seulement semi-continue (la somme), on obtient une valeur au point limite qui minore les valeurs d'adhérence sans les atteindre : c'est le saut.

La compactification rend donc l'infini opératoire, mais elle ne garantit pas la continuité : elle fournit un lieu et des valeurs d'adhérence, et la continuité n'a lieu que si la valeur placée au point limite est l'unique valeur d'adhérence de la suite. C'est le phénomène général des limites non uniformes, dont l'exemple classique est la suite $x \mapsto x^k$ sur $[0, 1]$, continue pour tout k et de limite discontinue.

5 Le continu

5.1 Niveaux d'infini

Niveau	Ce qui le donne	Ce qu'on obtient
Entiers potentiels	ZF sans l'axiome de l'infini	chaque n existe, mais pas $\mathbb{N}$
Entiers actuels	l'axiome de l'infini	$\mathbb{N} = \omega$, puis $\omega + 1$ gratuitement
Continu actuel	l'axiome de l'ensemble des parties	$\mathbb{R}$, de cardinal $2^{\aleph_0}$
Continu granulaire	grain d'un modèle de Skolem	$N + 1$ points, N illimité

Un continu actuel de points exige des entiers actuels : $\mathbb{R}$ contient $\mathbb{N}$. Si l'infini des entiers était seulement potentiel, un continu composé de points le serait aussi. La dernière ligne relève d'un autre cadre, celui de la théorie du grain : le continu y est découpé en un nombre illimité de grains, et cette totalité a un dernier élément (section 5.2).

5.2 La chute libre et Zénon

On peut être tenté de voir dans l'expérience de la chute libre la preuve d'un infini actuel : le corps traverse une infinité d'intervalles, puisqu'il doit parcourir la moitié de la distance, puis la moitié du reste, et ainsi de suite, et pourtant il arrive. C'est le paradoxe de la dichotomie de Zénon.

L'expérience montre que le mouvement s'achève. Elle ne montre pas, à elle seule, qu'il traverse une infinité actuelle de points : toute mesure a une précision finie, et la question de la continuité de l'espace et du temps à très petite échelle reste ouverte en physique. Trois positions sont classiquement possibles.

1. *La position classique* (Cantor, ZFC). Le continu est un ensemble actuel de points. Elle peut se justifier de manière pragmatique par l'argument d'indispensabilité de Quine et Putnam : nos meilleures théories physiques quantifient sur les nombres réels, nous devrions donc admettre leur existence.

2. *La position d'Aristote*, reprise sous d'autres formes par Brouwer et Weyl. Le mouvement est un tout actuel, mais les points n'en sont pas les parties : ils naissent de la division, qui reste potentielle. Le continu n'est pas composé de points.

3. *La position discrète.* L'espace et le temps seraient discrets à une échelle fondamentale, et le continu une idéalisation.

Aucune des trois ne donne à la fois un infini actuel et une dernière étape. La position classique place l'infini dans la totalité des étapes de Zénon, mais cette totalité a le type d'ordre ω : elle n'a pas de dernier élément, et dire que le corps est arrivé, c'est placer une valeur au point adjoint ω, c'est-à-dire compactifier. La position discrète donne une dernière étape, mais au prix de l'infini : le nombre d'étapes est un entier fini. La théorie du grain permet une quatrième position, qui garde les deux.

Le cadre : le point absolu est un grain

Comme dans nos travaux précédents, on se place dans un modèle non standard de l'arithmétique de Peano au sens de Skolem, noté $\mathcal{M}$, et dans le corps $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ de ses rationnels. Un élément de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$ est *limité* s'il est majoré en valeur absolue par un entier standard, *illimité* sinon, et *infinitésimal* s'il est non nul et d'inverse illimité. On note $\nu = H!$, avec H entier illimité. Toutes les grandeurs de cette sous-section sont des éléments de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$: on n'a pas besoin des nombres réels.

Ce que la droite standard voit comme un point est, dans $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$, un grain d'épaisseur infinitésimale : c'est l'énoncé « le point absolu est un grain ». Le continu se discrétise alors suivant le grain. Au *niveau d'observation* k, l'unité est découpée en $2^{k\nu}$ grains d'épaisseur $2^{-k\nu}$; le niveau 1 est le continu de base, en 2^{ν} grains.

Le grain du temps et son image par la chute

Considérons une chute libre sans vitesse initiale, d'accélération g, de durée T et de hauteur $L = \frac{1}{2}gT^2$, où g et T sont des rationnels standard. On prend pour grain absolu celui du *temps* : on découpe la durée en N grains égaux, N illimité,

$$\tau = \frac{T}{N}, \qquad t_j = j\tau, \qquad x_j = \tfrac{1}{2}\, g\, t_j^2 \qquad (0 \le j \le N).$$

Au niveau d'observation 1, $N = 2^{\nu}$. L'espace n'est pas découpé en grains égaux : le grain spatial est l'image du grain temporel par le mouvement, et il grossit au cours de la chute.

Proposition 7 (Le grain spatial)**.** *Pour $0 \le j < N$, posons $\delta_j = x_{j+1} - x_j$, et notons $J(t) = \frac{dx}{dt} = gt$ le jacobien de l'application $t \mapsto x(t)$.*

1. $\delta_j = \frac{1}{2}g\tau^2\,(2j+1) = J\big(t_j + \frac{\tau}{2}\big)\,\tau$.

2. $\sum_{j=0}^{N-1} \delta_j = L$, *exactement.*

3. $\delta_0 = \frac{1}{2}g\tau^2$ *et* $\delta_{N-1} = gT\tau - \frac{1}{2}g\tau^2$ *; le rapport* $\delta_{N-1}/\delta_0 = 2N-1$ *est illimité.*

4. *Tous les* δ_j *sont infinitésimaux, majorés par* $gT\tau$.

Démonstration. On a $\delta_j = \frac{1}{2}g\tau^2\big((j+1)^2 - j^2\big) = \frac{1}{2}g\tau^2(2j+1)$, et $J(t_j + \frac{\tau}{2})\tau = g\tau^2(j+\frac{1}{2})$, ce qui donne le point 1. La somme est télescopique et vaut $x_N = \frac{1}{2}g(N\tau)^2 = L$. Le point 3 s'obtient en faisant $j = 0$ et $j = N-1$. Enfin $\delta_j \le \delta_{N-1} < gT\tau = gT^2/N$, qui est infinitésimal puisque gT^2 est standard et N illimité. □

Le point 1 est la *loi des nombres impairs* de Galilée : les espaces parcourus en des durées égales successives sont entre eux comme $1, 3, 5, 7, \ldots$ Elle est ici exacte, au grain près, et non asymptotique. Le grain spatial est le grain temporel multiplié par le jacobien, pris au milieu du grain : puisque x est quadratique, la valeur moyenne de J sur $[t_j, t_{j+1}]$ est sa valeur au milieu. Si l'on prenait le jacobien à l'origine du grain, on trouverait un premier grain nul, car $J(0) = 0$: le corps part au repos. Le grain exact évite cette dégénérescence ; il part d'un infinitésimal d'ordre deux, $\frac{1}{2}g\tau^2$, et croît jusqu'à un infinitésimal d'ordre un, voisin de $v_f\tau$, où $v_f = gT$ est la vitesse finale. Le grain grossit d'un facteur illimité, mais il reste un grain du début à la fin.

Remarque. On pourrait inversement prendre pour grain absolu celui de l'espace. Le premier instant serait alors $t_1 = \sqrt{2\delta/g}$, qui en général n'est pas rationnel : on sortirait de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$. Prendre le temps pour grain absolu, c'est garder toute la chute dans les rationnels du modèle.

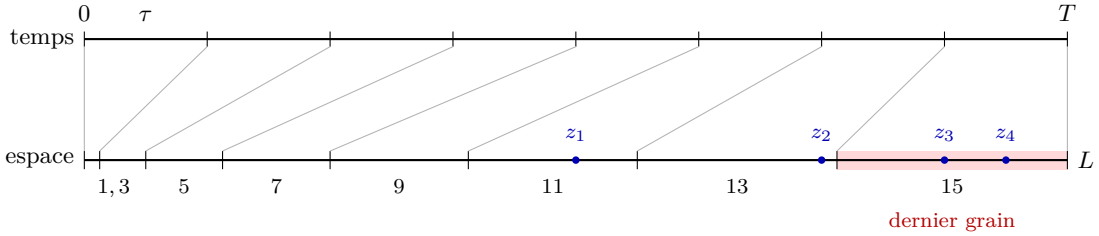


Figure 3: Le grain temporel $\tau = T/N$ et son image dans l'espace, dessinés pour $N = 8$. Les grains spatiaux sont entre eux comme $1, 3, 5, \ldots, 15$: ils grossissent avec le jacobien $J(t) = gt$. Les points de la dichotomie $z_m = L(1 - 2^{-m})$ tombent dans le dernier grain dès que $m \geq m^* = \log_2 8 = 3$.

La dichotomie de Zénon au grain

Les étapes de la dichotomie sont les points $z_m = L(1 - 2^{-m})$, pour $m \geq 0$.

Proposition 8 (La dichotomie s'achève)**.** *Soit m^* le plus petit entier m tel que $L\,2^{-m} \leq \delta_{N-1}$.*

1. *Pour $m < m^*$, $z_m < x_{N-1}$; pour $m \geq m^*$, z_m appartient au dernier grain $[x_{N-1}, x_N]$.*
2. *$\log_2 N - 1 < m^* < \log_2 N + 1$; en particulier m^* est illimité.*
3. *Si $N = 2^p$, alors $m^* = p$. Au niveau d'observation k, où $N = 2^{k\nu}$, on a $m^* = k\nu$; au niveau 1, $m^* = \nu$.*

Démonstration. On a $z_m \geq x_{N-1}$ si et seulement si $L - z_m = L\,2^{-m} \leq L - x_{N-1} = \delta_{N-1}$, et cette condition est croissante en m, d'où le point 1. Par la proposition 7, $\delta_{N-1} = L\,(2N-1)/N^2$, et la condition s'écrit $2^m \geq N^2/(2N-1)$. Or

$$\frac{N^2}{2N-1} = \frac{N}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4(2N-1)} \in \left]\frac{N}{2},\ \frac{N}{2} + 1\right[.$$

Donc $2^{m^*} > N/2$, et $2^{m^*-1} < N/2 + 1 \leq N$, ce qui donne le point 2. Si $N = 2^p$, la première inégalité donne $m^* \geq p$; la seconde donne $2^{m^*-1} < 2^{p-1} + 1$, donc $2^{m^*-1} \leq 2^{p-1}$ puisque ce sont des entiers, et $m^* \leq p$. □

La traduction en termes de temps est plus parlante encore, puisque le grain temporel est uniforme. La condition $z_m \geq x_{N-1}$ équivaut à $s_m \geq t_{N-1} = T - \tau$, où s_m est l'instant où le corps atteint z_m : à partir de l'étape m^*, la durée qui reste à parcourir tient dans un seul grain de temps. Au niveau d'observation fixé, elle est *ponctuelle*. Les étapes $\nu + 1$, $\nu + 2$, … de la dichotomie existent encore comme rationnels de $\mathbb{Q}_{\mathcal{M}}$, mais elles tombent toutes dans le même grain que l'arrivée : à ce niveau, elles ne se distinguent plus d'elle.

Un infini actuel qui arrive

Thèse 9 (La chute au grain)**.** Au niveau d'observation 1, la chute libre est la famille $(x_j)_{0\leq j\leq 2^\nu}$ de ses positions au grain du temps. C'est une totalité actuelle comptant un nombre illimité d'étapes, et elle a un dernier élément, $x_{2^\nu} = L$, atteint comme un terme et non comme une limite. La dichotomie de Zénon y compte ν étapes discernables, nombre illimité, et elle a une dernière étape, l'étape ν, au-delà de laquelle tout tombe dans le grain de l'arrivée.

C'est exactement ce qui manquait à l'infini de ZFC. L'ordinal ω est une totalité actuelle sans dernier élément ; pour que le corps arrive, il fallait lui adjoindre le point ω, qui n'est le successeur de rien, et y placer une valeur (section 3). Ici, l'entier illimité ν a un prédécesseur, et l'arrivée est une étape. La valeur finale n'a pas à être choisie, elle se calcule : $x_N = L$. Il n'y a donc pas de saut possible, au sens de la section 4.

La position classique n'est pas pour autant réfutée : elle est la lecture standard de la position du grain. Pour j/N infiniment proche d'un rationnel standard $s \in [0, 1]$, la position x_j est infiniment proche de $\frac{1}{2}g(sT)^2$: l'observateur standard voit le mouvement continu de la mécanique classique. Et la suite (z_m), prise aux rangs m standard, converge vers L ; tous les rangs illimités sont vus d'un seul bloc, comme un unique point ω. La compactification $\omega + 1$ est l'ombre standard de la fin de la dichotomie au grain.

Le nombre d'étapes dépend du niveau d'observation. Au niveau k, la dichotomie compte $k\nu$ étapes discernables (proposition 8) : chaque cran ajoute ν étapes. On retrouve les deux lectures du paradoxe d'Achille. Si le niveau d'observation suit Zénon, c'est-à-dire si l'on raffine le grain chaque fois que la dichotomie tombe dans le dernier grain, la course ne s'achève jamais : c'est la partie propre. Si le niveau d'observation est fixé, s'il est pris comme le point matériel, le corps arrive, et il arrive au rang ν : c'est la partie partielle.

Deux précisions délimitent la portée de cette position. D'une part, elle établit qu'un infini actuel *peut être conçu* dans la chute libre de manière cohérente, et qu'il est alors opératoire ; elle ne prétend pas que l'expérience le démontre, pas plus que les trois autres positions. D'autre part, l'infini de ν n'est pas celui de ω. Dans $\mathcal{M}$, ν est un entier comme un autre, qui satisfait les mêmes énoncés arithmétiques du premier ordre ; il est illimité *relativement* aux entiers standard, que $\mathcal{M}$ ne peut pas isoler par une formule. C'est un infini relatif à un niveau d'observation, conformément à la relativité des statuts : ponctuel, limité ou à l'infini ne sont pas des propriétés d'un objet, mais d'un objet à un niveau d'observation. C'est précisément ce qui le rend opératoire : un nombre d'étapes illimité qui a un dernier élément.

La chute libre est donc compatible avec les quatre positions. Dans les trois premières, dire que le corps est arrivé, c'est compactifier, et le prolongement est continu. Dans la quatrième, l'arrivée est un terme de la totalité elle-même.

5.3 La droite de Hilbert

Dans les *Fondements de la géométrie* (1899), Hilbert se donne d'emblée des systèmes de points et de droites, liés par des axiomes. La continuité est assurée par l'axiome d'Archimède et par l'axiome de complétude, ajouté à partir de l'édition de 1900 : on ne peut ajouter de nouveaux points à la droite sans violer les autres axiomes. La droite est *maximale*. Cet axiome présuppose la totalité des points et de leurs extensions possibles : la droite de Hilbert est un continu en acte, isomorphe à $\mathbb{R}$. On peut le lire comme une compactification généralisée, où tous les points limites sont présents d'emblée.

Mais Hilbert donnait à cet infini un statut d'idée. Dans sa conférence « Sur l'infini » (1925), il soutient que l'infini actuel ne se trouve réalisé ni dans la nature, ni comme fondement admissible de la pensée, et qu'il ne lui reste que le rôle d'une idée, au sens de Kant. Sa légitimité devait venir de la cohérence de la théorie, démontrée par des moyens finis. Les théorèmes d'incomplétude de Gödel (1931) ont montré qu'une telle démonstration est impossible sous la forme envisagée : la justification de l'infini actuel reste une question ouverte.

Enfin, l'axiome de complétude est un énoncé du second ordre. Si on le remplace par sa version du premier ordre, comme Tarski pour la géométrie élémentaire, on obtient une théorie complète et décidable, qui admet des modèles dénombrables, par exemple la droite des nombres réels algébriques. Le continu actuel maximal relève donc d'un choix axiomatique, et non d'une nécessité géométrique.

6 La lecture non standard

L'analyse non standard de Robinson fournit des entiers infiniment grands : un hyperentier N plus grand que tout entier standard. On peut alors écrire u_N. Mais en général u_N n'est pas égal à la limite ℓ : il en est *infiniment proche*. Par exemple, $1/N$ n'est pas 0, c'est un infinitésimal. La convergence s'énonce : $u_N \approx \ell$ pour tout N infini.

La compactification $\omega + 1$ apparaît alors comme l'ombre de cette situation : l'application qui envoie chaque entier standard sur lui-même et tous les hyperentiers infinis sur le seul point ω réalise $\omega + 1$ comme le quotient des hyperentiers où l'on identifie tous les infinis. Le prolongement d'une suite est continu en ω si et seulement si $u_N \approx u_\omega$ pour tout N infini. Dans l'arbre de séries, une série d'un étage k_∞ infiniment grand diverge encore, mais elle n'a qu'un terme d'indice standard : sa partie visible est la série limite.

Conclusion

L'axiome de l'infini fait de la collection des entiers un objet : c'est le passage de l'infini potentiel à l'infini actuel. Mais cet objet est une totalité sans dernier élément, dont tous les éléments sont finis ; il ne fournit aucun terme à l'infini, et aucune suite n'y arrive. Pour rendre l'infini actuel opératoire, il faut adjoindre explicitement les points limites : compactification $\omega + 1$ pour les entiers, complétion $\mathbb{R}$ pour le continu, axiome de complétude chez Hilbert. Pour les entiers, ce geste est gratuit, et le point à l'infini est $\mathbb{N}$ lui-même. Il caractérise la convergence comme une continuité en ce point.

Ce geste ne garantit pas la continuité. Compactifier fournit un lieu et, du côté des valeurs, l'existence de valeurs d'adhérence ; la continuité n'a lieu que si la valeur placée au point limite est l'unique valeur d'adhérence de la suite. L'arbre de séries en donne un exemple extrême : toutes les sommes finies valent $+\infty$, leur seule valeur d'adhérence est $+\infty$, et la valeur placée en ω, la somme de la série limite, est finie. Le lemme de Fatou la situe sous la plus petite valeur d'adhérence des sommes : c'est le saut. L'infini actuel opératoire n'est donc pas une propriété des suites, mais un lieu ajouté, où l'on place une valeur que chaque suite prolonge continûment ou non.

La théorie du grain ouvre une autre voie. Si le point absolu est un grain, le continu se discrétise suivant le grain, et la chute libre devient une totalité d'un nombre illimité d'étapes qui a une dernière étape : l'arrivée est un terme, non une limite, et sa valeur se calcule au lieu d'être choisie. Le grain spatial grossit avec le jacobien de la chute, d'un facteur illimité, mais il reste un grain, et la dichotomie de Zénon s'achève au rang ν au niveau d'observation 1. La compactification $\omega + 1$ apparaît alors comme l'ombre standard de cette arrivée.

Références

- Aristote, *Physique*, livre III.
- G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, 1883.
- D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 1899 (axiome de complétude à partir de l'édition de 1900).

- D. Hilbert, « Über das Unendliche », *Mathematische Annalen*, 1926 (conférence de 1925).
- K. Gödel, « Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I », 1931.
- H. Weyl, *Das Kontinuum*, 1918.
- A. Tarski, « What is elementary geometry? », 1959.
- G. Galilée, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze*, 1638 (loi des nombres impairs).
- Th. Skolem, « Über die Nicht-charakterisierbarkeit der Zahlenreihe mittels endlich oder abzählbar unendlich vieler Aussagen mit ausschließlich Zahlenvariablen », *Fundamenta Mathematicae*, 1934.
- A. Robinson, *Non-standard Analysis*, 1966.
- H. Putnam, *Philosophy of Logic*, 1971 (argument d'indispensabilité).
- H. Genvrin, « Que le point absolu est un grain » ; « Partie propre et partie partielle chez les entiers », 2026 ; « Achille, la tortue et le grain », 2026.
- R. Kaye, T. L. Wong, « On interpretations of arithmetic and set theory », *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 2007.