

La relation fondamentale de la dynamique comme brisure de la symétrie d'inertie

Hugues GENVRIN

21 Septembre 2026

Cadre

On travaille dans un cadre informationnel. Soit $I(t)$ l'information symbolique représentant la position $y(t) \in \mathbb{R}^n$ d'un système à la date t . La *trajectoire* est l'application

$$\gamma : t \longmapsto y(t).$$

On note $\dot{y}$ la vitesse, $\ddot{y}$ l'accélération, et l'on prend pour *quantité dynamique* le *moment*

$$\mathbf{p} = m \dot{y},$$

conjugué à la position y . Le lagrangien est $L = T - V$ avec $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ et $V = V(y)$; le hamiltonien est la transformée de Legendre $H = \mathbf{p} \dot{y} - L = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(y)$.

Remarque 1 (Choix de la variable dynamique). On prend $\mathbf{p}$ (et non la vitesse $\dot{y}$) comme quantité dynamique : c'est la grandeur conservée par l'inertie, et celle dont la variation mesure la force. Ce choix rétablit la cohérence avec la forme forte $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ et évite la confusion entre position, vitesse et moment dans le formalisme hamiltonien.

1. Le mouvement inertiel et sa symétrie

Définition 1 (Mouvement inertiel). Un mouvement est *inertiel* si son accélération est nulle :

$$\ddot{y} \equiv 0.$$

Équivalent : le moment est constant, $\dot{\mathbf{p}} \equiv 0$.

Remarque 2 (Accélération, et non courbure). $\ddot{y} = 0$ est *strictement plus fort* que « courbure géométrique nulle ». La courbure du chemin est $\kappa = |\dot{y} \wedge \ddot{y}|/|\dot{y}|^3$; elle s'annule dès que $\ddot{y}$ est parallèle à $\dot{y}$. Une particule qui accélère *en ligne droite* a donc $\kappa = 0$ mais $\ddot{y} \neq 0$: elle n'est pas inertielle. L'inertie demande le chemin droit *et* le parcours à vitesse constante.

Proposition 1 (Interprétation affine). $\ddot{y} = 0$ est l'équation géodésique de la connexion plate (galiléenne) de l'espace-temps, le temps servant de paramètre affine. La ligne d'univers inertielle coïncide avec sa propre tangente, parcourue uniformément.

Proposition 2 (La symétrie d'inertie). Les mouvements inertiels sont les orbites du flot libre, groupe à un paramètre engendré par $H_0 = \mathbf{p}^2/2m$. Leur groupe de symétrie complet est le groupe de Galilée Gal (translations d'espace et de temps, rotations, changements de référentiel $v \mapsto v + \text{cte}$). Le moment $\mathbf{p}$ est la charge de Noether de la translation spatiale : il est conservé si et seulement si V est invariant par translation, c'est-à-dire constant.

La symétrie d'inertie n'est donc pas réduite à l'identité : c'est Gal, et c'est ce qui rend substantielle l'idée « force = brisure de cette symétrie ».

2. Caractérisation hamiltonienne

Proposition 3 (Le crochet mesure la force). Avec $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(y)$, on a

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = -\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial y} = F, \quad \text{tandis que} \quad \{y, H\} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} = \dot{y}.$$

Par conséquent

$$\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = 0 \iff \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \iff \text{le mouvement est inertiel.}$$

Démonstration. Calcul direct des crochets de Poisson $\{f, g\} = \partial_y f \partial_{\mathbf{p}} g - \partial_{\mathbf{p}} f \partial_y g$ sur $f = \mathbf{p}$ puis $f = y$. L'équivalence résulte de $F = -\partial V / \partial y$. $\square$

Remarque 3 (Pourquoi le moment, et non la position). On a $\{y, H\} = \dot{y} \neq 0$ pour un mouvement inertiel : la position *varie* toujours. La grandeur conservée par l'inertie est le *moment* $\mathbf{p}$, et c'est sur lui que porte l'équilibre sémantique $\dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = 0$.

3. La RFD comme brisure de symétrie

Théorème 1 (Forme forte comme loi de brisure). Posons $F_s = \dot{\mathbf{p}}$. Alors

$$F_s = \dot{\mathbf{p}} = \{\mathbf{p}, H\} = F, \quad F_s = 0 \iff \text{mouvement inertiel.}$$

La force est la mesure exacte de l'écart à la symétrie d'inertie : elle est nulle sur les orbites de Gal, non nulle dès qu'une trajectoire les quitte.

Remarque 4 (Portée : forme reconstruite, contenu présupposé). Ce résultat reconstruit la *forme* $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ sans circularité : la force n'y est pas définie par l'accélération, mais comme écart à une symétrie donnée *séparément* (l'inertie). En revanche il ne produit pas le *contenu dynamique* — quelles forces existent, la loi $F = -\nabla V$ — et il *présuppose* la structure inertielle (la connexion plate, le groupe Gal). C'est donc une dérivation de la deuxième loi à partir de la première loi et de Noether, non une dérivation à partir de rien. Le contenu prédictif reste porté par le générateur H , spécifié indépendamment.

4. Le jacobien de la trajectoire et l'anomalie cartésienne

On relie ici la RFD à la stratification fonctionnelle (cf. chapitre *Anomalie cartésienne*, Prop. 75–76 et Théorème 62). Rappel : une application dérivable f stratifie localement par son jacobien f' (première dérivée) ; l'anomalie de longueur disparaît exactement quand f' est *constant* (isométrie locale, coefficient ± 1).

Définition 2 (Jacobien de la trajectoire). Le jacobien de l'application $\gamma : t \mapsto y(t)$ — l'étirement local du temps en espace — est

$$J(t) = \dot{y}(t).$$

Proposition 4 (Décalage d'une dérivée). *L'accélération n'est pas le jacobien, mais sa variation :*

$$\ddot{y} = \dot{J}.$$

En particulier $J = |\ddot{y}|$ est incorrect : $\ddot{y}$ mesure le taux de changement du jacobien, non le jacobien lui-même.

Théorème 2 (La force est l'anomalie cartésienne de la trajectoire).

$$\begin{aligned} \text{mouvement inertiel} &\iff J = \dot{y} \text{ constant} \iff \dot{J} = \ddot{y} = 0 \\ &\iff \text{stratification temporelle uniforme (anomalie nulle)}. \end{aligned}$$

Réciproquement, une force est présente si et seulement si le jacobien varie ($\dot{J} = \ddot{y} \neq 0$), c'est-à-dire si et seulement si la trajectoire imprime sur elle-même une stratification non uniforme : l'anomalie cartésienne apparaît.

Démonstration. Immédiat par la définition $J = \dot{y}$ et $\dot{J} = \ddot{y}$, appliquée à la caractérisation $\ddot{y} = 0 \iff$ inertie. Le cas J constant est exactement le cas isométrique / coefficient ± 1 de la Proposition 76, où l'anomalie de longueur s'annule. $\square$

Remarque 5 (Jonction avec la chaîne du programme). Ceci branche la RFD sur le bout « déformation » de la chaîne Klein $\rightarrow$ néguentropie $\rightarrow$ Landauer $\rightarrow$ force $\rightarrow$ déformation : la *déformation* est la stratification non uniforme $\dot{J} = \ddot{y}$, et la force $F_s = \dot{\mathbf{p}} = m \ddot{y}$ la généralise (à un facteur de masse près). L'inertie est le cas isométrique où le grain temporel est uniforme et où aucune anomalie n'est produite.

5. La constance du lagrangien

Lemme 1 (Le lagrangien est deux fois la puissance). *En régime conservatif ($H = T + V$ conservé, $V = V(y)$), le long de tout mouvement,*

$$\dot{L} = \dot{T} - \dot{V} = 2\dot{T} = 2F \cdot \dot{y} = 2P,$$

où $P = F \cdot \dot{y}$ est la puissance mécanique.

Démonstration. $L = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - V(y)$, donc $\dot{L} = m\dot{y}\ddot{y} - V'(y)\dot{y}$. La deuxième loi $m\ddot{y} = -V' = F$ donne $\dot{L} = F\dot{y} + F\dot{y} = 2F\dot{y} = 2P$. La conservation de l'énergie $\dot{T} = -\dot{V}$ donne l'écriture $\dot{L} = 2\dot{T}$. $\square$

Corollaire 1 (Interprétation de $dL = 0$).

$$dL = 0 \iff P = 0 \iff \text{aucun travail n'est fourni} \iff T \text{ constant.}$$

Le mouvement inertiel ($F = 0$) en est le cas sans force. Ainsi $dL = 0$ n'est pas une propriété obscure : dL est (deux fois) la puissance, et $dL = 0$ signifie qu'aucun travail n'est échangé entre cinétique et potentiel — une autre face de la symétrie d'inertie, où le contenu cinétique n'est pas converti.

Remarque 6 (Deux garde-fous). 1. Ne pas confondre avec la conservation de l'énergie : $H = T + V$ est toujours conservé (Noether, translation temporelle). La constance de $L = T - V$ est la condition *plus forte* de puissance nulle, et n'est pas une charge de symétrie.

2. $dL = 0$ vaut aussi lorsqu'une force ne travaille pas (perpendiculaire au mouvement : liaison, force magnétique). « $dL = 0$ » signifie donc exactement « puissance nulle », légèrement plus large que « inertie ».