

La brachistochrone en couches de grains : la construction de Bernoulli dans la théorie du grain

Hugues Genvrin

Octobre 2026

Résumé

En 1696, Jean Bernoulli résout le problème de la brachistochrone par l'optique : il découpe le milieu en couches horizontales de vitesse constante, applique la loi de réfraction de Snell–Descartes d'une couche à l'autre, puis passe à la limite. Nous reprenons cette construction dans la théorie du grain, en prenant pour couches les grains de l'axe vertical à une résolution illimitée. Nous montrons que, dans chaque grille, la loi de Snell est la condition d'optimalité *exacte* d'un problème de minimisation de dimension hyperfinie, que la ligne brisée optimale se promeut en la cycloïde, et que le temps de parcours se promeut en le temps de la cycloïde. Le passage à la limite de Bernoulli devient une promotion, et un seul niveau illimité suffit. Nous étudions ensuite la cinématique sur la cycloïde : le paramètre angulaire croît uniformément dans le temps, la loi des nombres impairs de Galilée n'y vaut plus qu'à l'échelle infinitésimale, ce qui est le cas de tout mouvement partant du repos, et la propriété tautochrone de Huygens s'exprime par un comptage de grains de temps indépendant du point de départ.

1 Introduction

Le problème de la brachistochrone, posé par Jean Bernoulli en 1696 [4], demande la courbe le long de laquelle un corps pesant, partant du repos, descend d'un point A à un point B en un temps minimal. La réponse est un arc de cycloïde. Parmi les solutions publiées en 1697, celle de Jean Bernoulli lui-même [5] est la plus géométrique. Elle repose sur une analogie optique :

1. la vitesse du corps ne dépend que de la hauteur de chute y , par la conservation de l'énergie : $v = \sqrt{2gy}$;
2. on découpe le milieu en couches horizontales minces, dans chacune desquelles la vitesse est supposée constante ;
3. le trajet le plus rapide est celui d'un rayon lumineux, qui obéit dans chaque changement de couche à la loi de Snell–Descartes, $\sin \varphi / v = \text{constante}$, où φ est l'angle avec la verticale (principe de Fermat) ;
4. on fait tendre l'épaisseur des couches vers zéro, et la ligne brisée tend vers une cycloïde.

Les étapes 2 et 4 sont exactement une stratification suivie d'un passage à la limite. La théorie du grain [1] fournit un cadre naturel pour les rendre précises : les couches sont les grains de l'axe vertical à une résolution illimitée, et le passage à la limite est une promotion.

Nos résultats sont les suivants :

1. dans chaque grille, la loi de Snell est la condition d'optimalité exacte d'un problème convexe de dimension hyperfinie (section 3) ;
2. la ligne brisée optimale se promeut en la cycloïde, et son temps de parcours en le temps de la cycloïde (section 4) ;

3. sur la cycloïde, la loi des nombres impairs ne vaut plus qu'à l'échelle infinitésimale, comme pour tout mouvement partant du repos (section 5) ;
4. la propriété tautochrone s'exprime par un comptage de grains de temps indépendant du point de départ (section 6).

2 Cadre et notations

On oriente l'axe vertical y vers le bas. Le corps part du repos au point $A = (0, 0)$. Par la conservation de l'énergie, sa vitesse à la hauteur de chute y est

$$v(y) = \sqrt{2gy}.$$

On se limite aux trajets qui descendent constamment, décrits par une fonction $x = x(y)$, $y \in [0, Y]$. Le temps de parcours est

$$T[x] = \int_0^Y \frac{\sqrt{1 + x'(y)^2}}{\sqrt{2gy}} dy. \quad (1)$$

Remarque 1. La restriction aux trajets descendants n'est pas anodine : si le point d'arrivée B est très éloigné horizontalement, la brachistochrone descend plus bas que B puis remonte. Nous nous plaçons dans le cas où B est atteint avant le point le plus bas de la cycloïde, ce qui correspond à un paramètre angulaire $\theta_B < \pi$.

La cycloïde de rayon R issue de A est la courbe

$$x = R(\theta - \sin \theta), \quad y = R(1 - \cos \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (2)$$

Pour $\theta \in [0, \pi[$, elle est le graphe d'une fonction $x_R(y)$ qui vérifie

$$\frac{dx_R}{dy} = \tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{y}{2R - y}}. \quad (3)$$

En effet, $dx/dy = (1 - \cos \theta)/\sin \theta = \tan(\theta/2)$ et $(1 - \cos \theta)/(1 + \cos \theta) = \tan^2(\theta/2)$.

Soit n_∞ un hyperentier, $k \geq 1$, $N = kn_\infty$ et $\varepsilon = Y 2^{-N}$. L'axe vertical $[0, Y]$ est découpé en $M = 2^N$ grains $[j\varepsilon, (j+1)\varepsilon]$, $0 \leq j < M$. La promotion $\widetilde{\mathbb{R}}_{\text{fin}}/\mathfrak{m} = \mathbb{R}$ est réalisée par la partie standard st [1]. Nous utilisons le principe de transfert : un énoncé du premier ordre vrai pour tous les entiers M reste vrai pour les hyperentiers.

3 Le milieu en couches de grains

Définition 2 (Milieu stratifié en grains). Dans le grain j , on choisit une hauteur témoin $\eta_j \in [j\varepsilon, (j+1)\varepsilon]$ et l'on attribue au corps la vitesse constante

$$v_j = \sqrt{2g\eta_j} > 0.$$

Sauf mention contraire, on prend le milieu du grain, $\eta_j = (j + \frac{1}{2})\varepsilon$.

Définition 3 (Trajet en grains). Un *trajet en grains* est une ligne brisée formée, dans chaque grain j , d'un segment de pente $u_j = \Delta x/\Delta y = \tan \varphi_j$, où φ_j est l'angle du segment avec la verticale. Son déplacement horizontal total et son temps de parcours sont

$$X(u) = \sum_{j=0}^{M-1} \varepsilon u_j, \quad T(u) = \sum_{j=0}^{M-1} \frac{\varepsilon \sqrt{1 + u_j^2}}{v_j}.$$

En effet, dans le grain j , le segment a une longueur $\varepsilon\sqrt{1+u_j^2}$, parcourue à la vitesse v_j .

Théorème 4 (Loi de Snell en grains). *Soit $X_B \geq 0$. Parmi les trajets en grains de déplacement horizontal $X(u) = X_B$, il en existe un et un seul qui minimise $T(u)$. Il est caractérisé par la loi de Snell en grains :*

$$\frac{\sin \varphi_j}{v_j} = \lambda \quad \text{pour tout } j,$$

où $\lambda \in [0, 1/\max_j v_j]$ est l'unique constante telle que $X(u) = X_B$.

Démonstration. Supposons d'abord M entier standard. La fonction $u \mapsto \sqrt{1+u^2}$ est strictement convexe, donc T est strictement convexe sur $\mathbb{R}^M$, et elle tend vers $+\infty$ à l'infini. Sur l'hyperplan affine $\{X(u) = X_B\}$, elle atteint donc son minimum en un point unique, caractérisé par la condition de Lagrange

$$\frac{\partial T}{\partial u_j} = \frac{\varepsilon u_j}{v_j \sqrt{1+u_j^2}} = \lambda \varepsilon \quad \text{pour tout } j.$$

Comme $u_j/\sqrt{1+u_j^2} = \sin \varphi_j$, c'est la loi $\sin \varphi_j = \lambda v_j$. Elle impose $u_j = \lambda v_j/\sqrt{1-\lambda^2 v_j^2}$, qui n'a de sens que si $\lambda v_j < 1$. L'application $\lambda \mapsto \sum_j \varepsilon \lambda v_j/\sqrt{1-\lambda^2 v_j^2}$ est continue et strictement croissante de $[0, 1/\max_j v_j]$ sur $[0, +\infty[$, d'où l'existence et l'unicité de λ .

L'énoncé est du premier ordre et vaut pour tout entier M ; par transfert, il vaut pour $M = 2^{k n_\infty}$ hyperentier. $\square$

Ainsi, ce que Bernoulli obtenait par analogie avec l'optique est, dans la grille, un théorème exact : la loi de Snell est la condition d'optimalité d'un problème convexe de dimension hyperfinie. Le principe de Fermat n'est pas invoqué ; il est démontré, à chaque résolution.

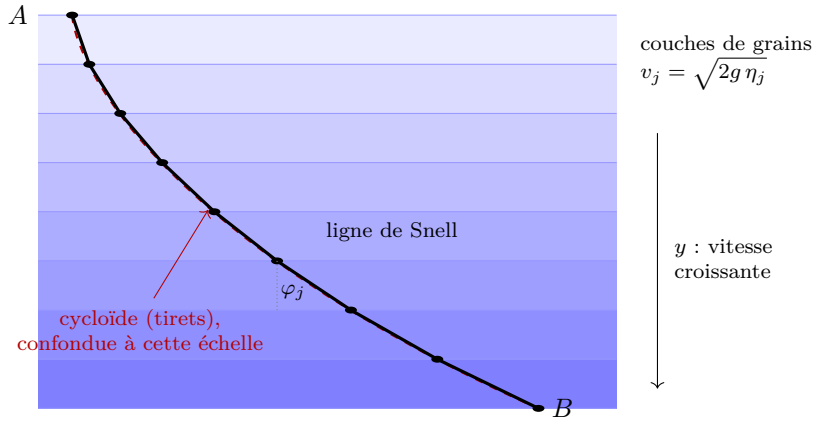


FIGURE 1 – La construction de Bernoulli en couches de grains (ici 8 couches). Dans chaque couche, la vitesse est constante ; la ligne brisée qui minimise le temps obéit à la loi de Snell, et elle est déjà très proche de la cycloïde (en tirets). À une résolution illimitée, la promotion de la ligne brisée est la cycloïde.

4 La promotion : de la ligne de Snell à la cycloïde

Fixons un rayon standard R avec $2R > Y$, et prenons pour λ la valeur standard

$$\lambda_R = \frac{1}{2\sqrt{gR}},$$

de sorte que $\lambda_R v = 1$ exactement à la hauteur $y = 2R$, qui est le point le plus bas de la cycloïde. Soit u le trajet en grains défini par la loi de Snell $\sin \varphi_j = \lambda_R v_j$, et $x_j = \sum_{i < j} \varepsilon u_i$ l'abscisse de son j -ième sommet. Par le théorème 4, c'est le trajet en grains le plus rapide entre A et son point d'arrivée (x_M, Y) .

Lemme 5. Avec $\sin \varphi = \lambda_R \sqrt{2g\eta}$, on a $\tan \varphi = f(\eta)$, où

$$f(\eta) = \sqrt{\frac{\eta}{2R - \eta}}.$$

Démonstration. $\sin^2 \varphi = \lambda_R^2 \cdot 2g\eta = \eta/(2R)$, donc $\tan^2 \varphi = \sin^2 \varphi / (1 - \sin^2 \varphi) = \eta/(2R - \eta)$. $\square$

La fonction f est exactement la pente (3) de la cycloïde de rayon R : la loi de Snell en grains attribue à chaque couche la pente de la cycloïde à la hauteur témoin.

Théorème 6 (Promotion de la ligne de Snell). 1. Pour toute hauteur standard $y \in [0, Y]$, si $j\varepsilon$ est la jonction la plus proche de y , alors $\text{st}(x_j) = x_R(y)$: la promotion de la ligne de Snell est l'arc de cycloïde de rayon R .

2. Le temps de parcours de la ligne de Snell se promeut en le temps de parcours de la cycloïde :

$$\text{st}(T(u)) = \sqrt{\frac{R}{g}} \theta_Y,$$

où θ_Y est le paramètre du point de la cycloïde de hauteur Y .

Démonstration. 1. Par le lemme 5, $x_j = \sum_{i < j} \varepsilon f(\eta_i)$ est une somme de Riemann de la fonction f , continue sur $[0, Y]$ puisque $Y < 2R$, pour une subdivision de pas infinitésimal. Sa partie standard est donc $\int_0^y f(\eta) d\eta = x_R(y)$, par (3).

2. Le temps s'écrit $T(u) = \sum_j \varepsilon h(\eta_j)$ avec

$$h(\eta) = \frac{\sqrt{1 + f(\eta)^2}}{\sqrt{2g\eta}} = \sqrt{\frac{R}{g\eta(2R - \eta)}}.$$

Cette fonction n'est pas bornée près de 0 ; on scinde la somme. Pour $\delta > 0$ standard, la partie de la somme portant sur $\eta_j \geq \delta$ est une somme de Riemann de h , continue sur $[\delta, Y]$, et sa partie standard est $\int_\delta^Y h$. La partie portant sur $\eta_j < \delta$ est majorée par $C \sum_{\eta_j < \delta} \varepsilon / \sqrt{\eta_j} \leq C' \sqrt{\delta}$, avec C, C' standard indépendants de δ , par comparaison avec $\int_0^\delta d\eta / \sqrt{\eta} = 2\sqrt{\delta}$. Donc $|\text{st}(T(u)) - \int_0^Y h| \leq C' \sqrt{\delta}$ pour tout $\delta > 0$ standard, ce qui donne $\text{st}(T(u)) = \int_0^Y h$. Enfin, avec $y = R(1 - \cos \theta)$, on a $dy = R \sin \theta d\theta$ et $\eta(2R - \eta) = R^2 \sin^2 \theta$, d'où $h dy = \sqrt{R/g} d\theta$ et $\int_0^Y h = \sqrt{R/g} \theta_Y$. $\square$

Remarque 7 (Un seul niveau suffit). Bernoulli fait tendre l'épaisseur des couches vers zéro. Dans la théorie du grain, une seule résolution illimitée $-kn_\infty$ suffit : la promotion de la ligne de Snell à cette résolution est déjà la cycloïde. C'est le même phénomène que pour les segments emboîtés dans l'article sur les coupures [2], où la limite de Cantor était remplacée par un niveau illimité suivi de la promotion.

Remarque 8 (Indépendance vis-à-vis des hauteurs témoins). Le théorème 6 ne dépend pas du choix des hauteurs témoins η_j dans les grains : toute somme de Riemann a la même partie standard. Qu'on attribue à chaque couche la vitesse de son bord supérieur, de son milieu ou de son bord inférieur, la ligne brisée change, mais sa promotion reste la cycloïde. Seul le bord supérieur de la première couche est exclu, car la vitesse y est nulle.

Remarque 9 (Point d'arrivée imposé). Si l'on impose un point d'arrivée standard $B = (X_B, Y)$, avec $\theta_B < \pi$, la constante λ du théorème 4 dépend de la résolution. Par continuité et monotonie de la relation entre λ et X_B , sa partie standard est la constante λ_R de la cycloïde qui passe par B , et l'on se ramène au théorème 6.

Remarque 10 (Optimum discret et optimum continu). Le théorème 4 établit l'optimalité de la ligne de Snell parmi les trajets en grains ; le théorème 6 montre que sa promotion est la cycloïde, dont l'optimalité parmi les courbes continues est le résultat classique de Bernoulli, établi rigoureusement par le calcul des variations. Démontrer directement, dans la théorie du grain, que la promotion d'un optimum discret est un optimum continu demanderait un argument supplémentaire, du type de la Γ -convergence. En termes de grains, minimiser le temps revient à minimiser, à un grain près, le *nombre de grains de temps* nécessaires au parcours, qui est un hyperentier.

5 La cinématique sur la cycloïde

5.1 Un paramètre uniforme dans le temps

Proposition 11. *Le long de la cycloïde (2), un corps lâché sans vitesse en A vérifie*

$$\theta(t) = \sqrt{\frac{g}{R}} t.$$

Une grille de temps uniforme est donc une grille uniforme sur le paramètre θ .

Démonstration. Le carré de la vitesse vaut $R^2\dot{\theta}^2((1 - \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta) = 2R^2\dot{\theta}^2(1 - \cos \theta)$. La conservation de l'énergie donne $v^2 = 2gy = 2gR(1 - \cos \theta)$. D'où $\dot{\theta}^2 = g/R$. $\square$

C'est aussi ce qu'exprime le théorème 6 : le temps de parcours jusqu'au paramètre θ est $\sqrt{R/g} \theta$.

5.2 La loi des nombres impairs à l'échelle infinitésimale

L'abscisse curviligne mesurée depuis A vaut

$$s(\theta) = \int_0^\theta 2R \sin \frac{\vartheta}{2} d\vartheta = 4R \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right) = 8R \sin^2 \frac{\theta}{4}.$$

Près du départ, $s \approx R\theta^2/2 = \frac{1}{2}gt^2$: c'est la chute libre, ce qui s'explique par le fait que la tangente à la cycloïde est verticale en A . La loi des nombres impairs [3] y vaut donc au voisinage du départ, mais seulement là. C'est en fait le cas de tout mouvement partant du repos.

Théorème 12 (Loi des nombres impairs infinitésimale). *Soit s une fonction standard de classe C^2 au voisinage de 0, avec $s(0) = s'(0) = 0$ et $s''(0) = a_0 \neq 0$: c'est la loi horaire d'un mouvement partant du repos avec une accélération initiale non nulle. Soit Δ un pas de temps infinitésimal, $t_m = m\Delta$ et $s_m = s(t_m)$. Pour tout entier standard m ,*

$$\text{st} \left(\frac{s_{m+1} - s_m}{s_1 - s_0} \right) = 2m + 1.$$

Démonstration. Par la formule de Taylor, $s(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + t^2r(t)$ avec $r(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0$. Pour m standard, t_m est infinitésimal, donc $r(t_m)$ est infinitésimal (par transfert de la définition de la limite). Ainsi $s_m = \Delta^2(\frac{1}{2}a_0m^2 + \iota_m)$ avec ι_m infinitésimal, et

$$\frac{s_{m+1} - s_m}{s_1 - s_0} = \frac{\frac{1}{2}a_0(2m+1) + \iota_{m+1} - \iota_m}{\frac{1}{2}a_0 + \iota_1 - \iota_0},$$

dont la partie standard est $2m + 1$ puisque $a_0 \neq 0$ est standard. $\square$

Remarque 13. Pour la chute libre et le plan incliné [3], la loi des nombres impairs est *exacte* à toutes les échelles et pour tous les rangs m . Pour la cycloïde, elle ne vaut qu'aux rangs standard, c'est-à-dire pendant une durée infinitésimale, et à un infinitésimal près. Aux instants standard, les grains d'espace sont stratifiés par la vitesse $v = 2\sqrt{gR} \sin(\theta/2)$, qui n'est plus proportionnelle au temps. Le théorème 12 montre que la loi de Galilée est une loi *universelle à l'échelle infinitésimale* : à l'échelle des grains, tout départ du repos est galiléen. Les extrémités des grains d'espace, qui font intervenir des cosinus, ne sont plus des jonctions d'une grille homogène : l'exactitude combinatoire est perdue.

points à instants égaux : $\theta_m = m \pi/8$

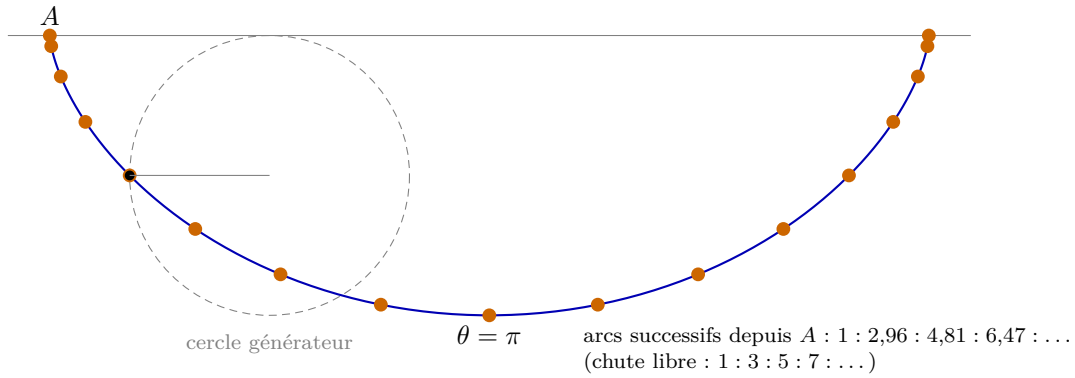


FIGURE 2 – La cycloïde parcourue depuis le repos, avec des points à instants égaux. Les premiers arcs sont presque dans le rapport des nombres impairs, puis s'en écartent : la loi de Galilée ne vaut qu'au voisinage du départ, et exactement seulement à l'échelle infinitésimale.

6 La tautochrone : un comptage invariant

Huygens a montré en 1673 [6] que la cycloïde est *tautochrone* : le temps mis pour atteindre le point le plus bas ne dépend pas du point de départ.

Proposition 14 (Huygens). *Un corps lâché sans vitesse au point de paramètre $\theta_0 \in [0, \pi[$ de la cycloïde (2) atteint le point le plus bas ($\theta = \pi$) au bout du temps*

$$T_* = \pi \sqrt{\frac{R}{g}},$$

indépendant de θ_0 .

Démonstration. L'élément d'arc est $ds = 2R \sin(\theta/2) d\theta$. En posant $c = \cos(\theta/2)$ et $c_0 = \cos(\theta_0/2)$, la hauteur de chute depuis le départ est $y - y_0 = R(\cos \theta_0 - \cos \theta) = 2R(c_0^2 - c^2)$, donc $v = 2\sqrt{gR} \sqrt{c_0^2 - c^2}$. Comme $\sin(\theta/2) d\theta = -2 dc$,

$$T_* = \int \frac{ds}{v} = \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{c_0} \frac{2 dc}{\sqrt{c_0^2 - c^2}} = 2\sqrt{\frac{R}{g}} \cdot \frac{\pi}{2} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad \square$$

Corollaire 15 (Comptage invariant). *Soit Δ la durée d'un grain de temps. Le nombre de grains de temps nécessaires pour atteindre le point le plus bas,*

$$N_* = \left\lfloor \frac{T_*}{\Delta} \right\rfloor,$$

est le même hyperentier pour tous les points de départ.

Remarque 16. Le corollaire est une traduction directe du résultat de Huygens ; sa profondeur est dans la proposition 14. Il se combine cependant avec le théorème 12 : depuis n'importe quel point de départ $\theta_0 < \pi$, l'accélération initiale le long de la courbe vaut $g \cos(\theta_0/2) \neq 0$, donc chaque départ est galiléen à l'échelle infinitésimale. Des mouvements qui partent tous de façon galiléenne, avec des accélérations initiales différentes, arrivent tous en bas après le même nombre de grains de temps. C'est la manifestation, en grains, de ce que le mouvement sur la cycloïde est harmonique : l'abscisse curviligne mesurée depuis le point le plus bas oscille avec une période indépendante de l'amplitude.

7 Conclusion

La construction de Bernoulli s'inscrit naturellement dans la théorie du grain.

1. Les couches de Bernoulli sont les grains de l'axe vertical ; dans chaque grille, la loi de Snell est la condition d'optimalité exacte d'un problème convexe de dimension hyperfinie (th. 4). Le principe de Fermat y est démontré, et non invoqué.
2. Le passage à la limite de Bernoulli devient une promotion : la ligne de Snell se promeut en la cycloïde, et son temps de parcours en le temps de la cycloïde (th. 6). Un seul niveau illimité suffit.
3. Sur la cycloïde, le paramètre angulaire croît uniformément dans le temps ; la loi des nombres impairs n'y vaut qu'à l'échelle infinitésimale, comme pour tout mouvement partant du repos (th. 12).
4. La propriété tautochrone de Huygens s'exprime par un nombre de grains de temps indépendant du point de départ (cor. 15).

Par rapport à la chute libre, on perd l'exactitude combinatoire : les énoncés deviennent des égalités à un infinitésimal près, et les grains d'espace ne sont plus alignés sur une grille dyadique. On gagne en revanche une dimension variationnelle : la théorie du grain transforme un problème de calcul des variations en une famille de problèmes convexes hyperfinis, dont la promotion redonne la solution classique. Deux questions restent ouvertes : établir directement que la promotion commute avec la minimisation, et étendre la construction aux trajets qui descendent sous le point d'arrivée ($\theta_B > \pi$).

Références

- [1] H. Genvrin, *Théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [2] H. Genvrin, *Théorie des coupures et théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [3] H. Genvrin, *La chute libre : une interprétation physique de la théorie du grain*, manuscrit, 2026.
- [4] J. Bernoulli, « Problema novum ad cujus solutionem Mathematici invitantur », *Acta Eruditorum* (juin 1696), 269.
- [5] J. Bernoulli, « Curvatura radii in diaphanis non uniformibus », *Acta Eruditorum* (mai 1697), 206–211.

- [6] C. Huygens, *Horologium oscillatorium*, Paris, 1673.
- [7] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland, 1966.