La densité d'une probabilité est unitaire

Hugues GENVRIN

December 2025

1 Distribution expérimentale

Si l'on se représente une distribution étagée d'un loi de probabilité discrète. On peut toujours diviser les intervalles faisant références aux événements $(\omega_i)_{1\leq i\leq n}$, en sous intervalles homogènes. On définit alors une loi de probabilité $Pr^\star$ telle que $\sum_{i,j} Pr^\star(\Delta\omega_{i,j}) = 1$. Si maintenant, nous faisons tendre cette subdivision vers des intervalles infinitésimaux $d\omega_{i,j}$. Alors, $Pr^\star := Pr^\star$, nous autorise à écrire $\sum_{i,j} Pr^\star(d\omega_{i,j}) \times d\omega_{i,j} = 1$, qui définit une nouvelle loi de probabilité qui est représente un interpolation de la loi discrète initiale, mais qui est toujours étagée.

2 Réciproque

Soit une fonction de probabilité lissée, notée $f(x)$. On suppose que son intégrale soit convergente. Alors, par la réciproque de l'intégrale de Darboux, l'on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A$, où A est la valeur de l'intégrale. En conséquences, il existe des rectangles élémentaires qui définissent des sommes $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{+}$ et $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{-}$, telles que : $\mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{+} = \mathcal{S}_{\mathcal{D}}^{-}$ où les $\mathcal{D}$ forment une partition infinitésimale de $I =]-\infty;+\infty[$. On peut renommer cette partition $\mathcal{D} = \cup_{1\leq i<n_\infty = d\omega_i}$. Où les $d\omega_i$ vont être des événements élémentaires de la fonction f.

On remarque alors que la $\sum_i d\omega_j \times f(d\omega_i)$ définit une loi discrète qui correspond à un relevé expérimental, qui ne peut être égal qu'à l'unité. Les $f(d\omega_i)$ font référence à des probabilité élémentaires relatives aux événements élémentaires $d\omega_i$.

D'où l'on déduit que $A = 1$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

Théorème 1. *Si une loi de probabilité est lissée, sa fonction de densité vaut l'unité.*

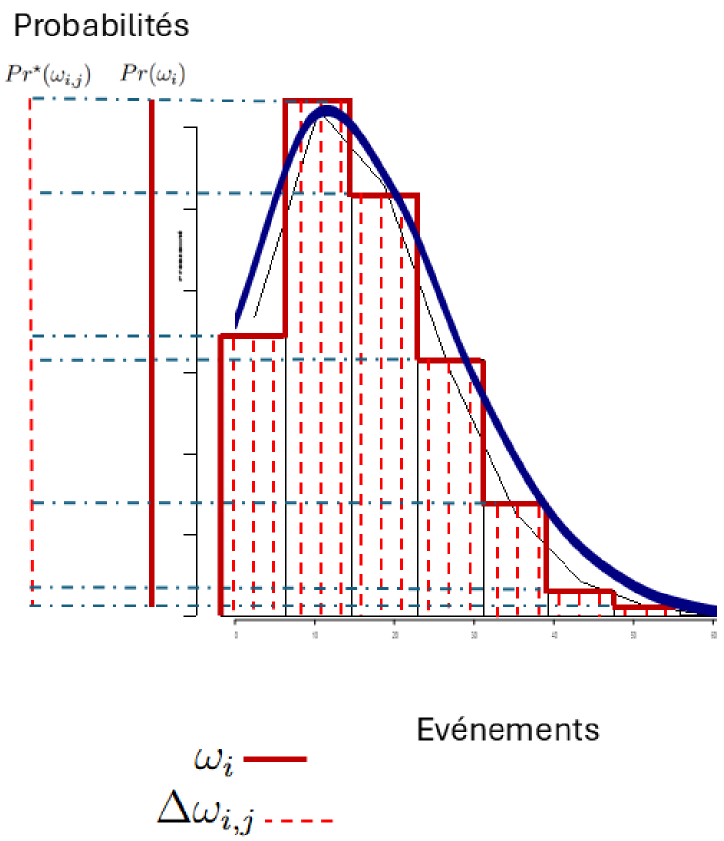

FIGURE 1 – Lissage d'une courbe expérimentale

Corollaire 1. *Si une loi de probabilité est lissée, cette fonction définit aussi une loi de probabilité.*