

La force sans Noether

La voie affine : la force comme défaut de géodésie

Hugues GENVRIN

21 Septembre 2026

Note. La lecture de ce texte doit précéder celle de « brisure de la symétrie d'inertie » : il fait émerger la force à partir de la seule structure affine, sans groupe, sans hamiltonien, sans théorème de Noether.

Cadre et intention

La rédaction par Noether identifiait la force à la variation d'une charge conjuguée. On montre ici qu'une notion de force parfaitement définie émerge *en amont* de tout cela, à partir d'un seul ingrédient : une *structure affine* sur l'espace — c'est-à-dire une notion de « droite ». C'est exactement le niveau affine de la hiérarchie de Klein, sans métrique et sans groupe. On travaille avec la position $y(t)$ et la trajectoire $\gamma : t \mapsto y(t)$.

1. Structure affine et mouvement inertiel

Définition 1 (Connexion affine plate). Une *connexion* ∇ est une règle de transport parallèle : elle dit quels vecteurs en des points voisins comptent comme « de même direction », donc ce que signifie une direction *constante*. Elle est *plate* s'il existe des coordonnées globales — dites *inertielles* — dans lesquelles cette règle est triviale : les composantes des coefficients de connexion (symboles de Christoffel) Γ_{jk}^i y sont nulles, $\Gamma_{jk}^i = 0$.

Définition 2 (Mouvement inertiel comme géodésique). Un mouvement est *inertiel* si sa vitesse est transportée parallèlement le long d'elle-même (la trajectoire est « aussi droite que possible ») :

$$\nabla_{\dot{y}} \dot{y} = 0, \quad \text{soit en composantes} \quad \ddot{y}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k = 0.$$

En coordonnées inertielles ($\Gamma = 0$), cela se réduit à $\ddot{y} = 0$.

Remarque 1 (C'est un invariant affine). « Être droit » ne requiert ni longueur ni angle : c'est l'invariant de la géométrie affine. On n'a donc besoin d'aucune métrique pour définir l'inertie — seulement de la connexion plate. La vitesse peut rester quelconque : l'inertie est le parcours de la géodésique à paramètre affine (le temps), ce qui impose de surcroît la vitesse constante.

2. La force comme défaut de géodésie

Définition 3 (Force). La *force* est le défaut de géodésie, c'est-à-dire l'accélération *covariante* (mesurée relativement à la connexion plate) :

$$\mathbf{F} := m \nabla_{\dot{y}} \dot{y}.$$

En coordonnées inertielles, $\mathbf{F} = m \ddot{\mathbf{y}}$.

Proposition 1 (La force mesure l'écart à l'inertie).

$$\mathbf{F} = 0 \iff \nabla_{\dot{\mathbf{y}}} \dot{\mathbf{y}} = 0 \iff \text{le mouvement est inertiel (géodésique)}.$$

Démonstration. Immédiat par les définitions : $\mathbf{F} = 0$ équivaut à $\nabla_{\dot{\mathbf{y}}} \dot{\mathbf{y}} = 0$, qui est l'équation géodésique. $\square$

Corollaire 1 (On retrouve la forme forte de la RFD). Avec le moment $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{y}}$ et en coordonnées inertielles,

$$\dot{\mathbf{p}} = m \ddot{\mathbf{y}} = m \nabla_{\dot{\mathbf{y}}} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{F}.$$

La forme forte $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ est ainsi obtenue directement.

Remarque 2 (Émergence sans Noether). La force a émergé comme *écart à la ligne d'univers inertielle* — sans groupe, sans lagrangien, sans crochet, sans charge conservée. Le seul contenu pré-supposé est la structure affine (ce que « droit » veut dire). C'est la route la plus élémentaire vers la force, et elle suffit pour le cas mécanique.

3. Forces fictives : de purs termes de connexion

Le bénéfice propre de cette voie apparaît en coordonnées *non* inertielles.

Proposition 2 (Les forces d'inertie sont des symboles de Christoffel). Dans des coordonnées où $\Gamma \neq 0$, l'équation d'un mouvement inertiel s'écrit

$$\ddot{y}^i = -\Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k,$$

de sorte que l'accélération apparente relative à la grille de coordonnées porte des termes supplémentaires $-m \Gamma_{jk}^i \dot{y}^j \dot{y}^k$ qui se présentent comme des forces. Ce sont les forces fictives.

Exemple 1 (Référentiel tournant). Dans un référentiel en rotation à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$, les termes de connexion produisent exactement

$$\mathbf{F}_{\text{fict}} = -m \left(\underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}')}_{\text{centrifuge}} \right).$$

Remarque 3. Ces forces ne sont pas des interactions : ce sont des artefacts de la connexion lue dans un mauvais repère. Elles s'annulent identiquement en coordonnées inertielles ($\Gamma = 0$). La voie affine les explique donc du premier coup, sans hypothèse supplémentaire — ce que la lecture par Noether ne fournit pas aussi directement.

4. Lien avec l'anomalie cartésienne

On retrouve la lecture stratale du chapitre *Anomalie cartésienne* (Prop. 75–76, Théorème 62), sans changer de mot.

Proposition 3 (La force est l'anomalie cartésienne de la trajectoire). *Le jacobien de la trajectoire $\gamma : t \mapsto y(t)$ est $J = \dot{y}$. Alors*

$$\begin{aligned} \text{inertie} &\iff \nabla_{\dot{y}} \dot{y} = 0 \iff J = \dot{y} \text{ transporté parallèlement (constant)} \\ &\iff \text{stratification uniforme.} \end{aligned}$$

La force $\mathbf{F} = m \nabla_{\dot{y}} \dot{y}$ mesure donc la non-uniformité de la stratification temporelle du chemin : c'est l'anomalie cartésienne de la trajectoire.

Remarque 4. En coordonnées inertielles, $\nabla_{\dot{y}} \dot{y} = \ddot{y} = \dot{J} : \text{on retrouve exactement l'énoncé de la rédaction précédente, } \mathbf{F} = m \dot{J} = m \ddot{y}, \text{ avec } J = \dot{y} \text{ et } \ddot{y} = \dot{J}.$ Les deux voies coïncident sur le résultat mécanique.

5. Portée : ce que la voie affine ne donne pas

Remarque 5 (Positionnement des deux routes). La voie affine est *minimale* mais *bornée*. Elle livre $\mathbf{F} = m \ddot{y}$:

1. elle reste *mécanique* et *attachée au préfacteur massique m* ;
2. elle n'*identifie* aucune charge conservée comme *principe* : la conservation du moment n'y est qu'un calcul ($\ddot{y} = 0$ donc $\dot{y}$ constant), non une loi issue d'une symétrie ;
3. elle ne *généralise* pas : elle ne produit ni le moment cinétique (rotation), ni l'énergie (temps), ni une charge de phase (jauge).

Ces trois points sont précisément l'apport de Noether. En particulier, la revendication centrale de la RFDG — « **q** peut être n'importe quelle charge, éventuellement sans masse » — n'est *pas* accessible par la voie affine seule : elle exige la correspondance symétrie $\leftrightarrow$ charge. Les deux traitements sont donc complémentaires : la voie affine fait *émerger* la force au moindre coût ; la voie de Noether lui donne sa *portée universelle*.

Voie	Machinerie	Ce qu'elle donne
Sémantique $F_s = \Delta\mu$	mesure, invariant	force = brisure (formel)
Affine (ce texte)	connexion plate	$\mathbf{F} = m \ddot{y}$ (mécanique)
Noether	générateur, crochet	q charge quelconque (universel)