Le cubique par les moyennes

Un trinôme résolvant, sa marge et une rotation d'ordre 3

Hugues Genvrin

Novembre 2026

Résumé

On cherche à résoudre l'équation du troisième degré $X^3 + pX + q = 0$ avec les outils du trinôme : moyenne arithmétique, moyenne géométrique et marge. On montre d'abord que la factorisation directe du cubique en un facteur linéaire et un trinôme ramène à un autre cubique, dont les racines sont les opposées des racines cherchées : elle reformule le problème sans le réduire, et ses trois choix possibles expliquent un comptage apparent de neuf racines. On montre ensuite que le bon trinôme n'est pas un facteur du cubique, mais le trinôme résolvant de Cardano, dont les racines sont les cubes u^3 et v^3 des deux termes d'une racine $X = u + v$. Ce trinôme a pour moyenne arithmétique $-q/2$, pour carré de moyenne géométrique $-p^3/27$, et sa marge $D = q^2/4 + p^3/27$ décide de tout : si le résolvant a des racines réelles, le cubique n'en a qu'une ; s'il a des racines complexes, le cubique en a trois. Les trois racines s'obtiennent enfin par une rotation d'ordre 3, et, dans le cas de trois racines réelles, elles sont les projections des sommets d'un triangle équilatéral.

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Centrer le cubique **2**

3 Pourquoi la factorisation directe tourne en rond **2**

4 Le trinôme résolvant **3**

5 Les trois racines et la rotation d'ordre 3 **4**

6 La marge du résolvant décide de tout **4**

7 Le cas de trois racines réelles : un triangle projeté **5**

8 Le cas d'une seule racine réelle **6**

9 Exemples **7**

10 Mise en œuvre numérique **8**

11 Lecture dans la théorie du grain **8**

12 Bilan **9**

1 Introduction

Les racines d'un trinôme $x^2 - \Sigma x + \Pi$ s'écrivent avec deux moyennes, la moyenne arithmétique $\mu_a = \Sigma/2$ et la moyenne géométrique μ_g, $\mu_g^2 = \Pi$:

$$x = \mu_a \pm \sqrt{D}, \qquad D = \mu_a^2 - \mu_g^2,$$

où la *marge* D est le quart du discriminant [3]. Le signe de la marge décide de la nature des racines : réelles distinctes si $D > 0$, double si $D = 0$, complexes conjuguées si $D < 0$.

On cherche ici à étendre cette méthode au troisième degré. Deux voies se présentent. La première consiste à factoriser le cubique en un facteur linéaire et un trinôme, puis à résoudre le trinôme par les moyennes ; on verra qu'elle tourne en rond (section 3). La seconde, qui est celle de Cardano [1], fait apparaître un trinôme qui n'est pas un facteur du cubique, mais dont les racines sont des cubes ; les moyennes s'y appliquent directement, et la marge de ce trinôme gouverne le nombre de racines réelles du cubique (sections 4 à 6).

Statut. Tous les énoncés sont démontrés, à l'exception du lien avec le discriminant classique, cité. Les exemples ont été vérifiés par le calcul.

2 Centrer le cubique

Comme pour le trinôme, on commence par centrer.

Lemme 1 (Centrage)**.** *Soit $x^3 + ax^2 + bx + c$ un cubique réel, de racines x_1, x_2, x_3. Leur moyenne arithmétique est $m = -a/3$, et avec $X = x - m$ le cubique s'écrit $X^3 + pX + q$, sans terme en X^2, avec*

$$p = b - \frac{a^2}{3}, \qquad q = c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}.$$

Les racines $X_k = x_k - m$ du cubique centré ont une somme nulle.

Démonstration. Par les relations entre coefficients et racines, $x_1+x_2+x_3 = -a$, d'où $m = -a/3$. En remplaçant x par $X - a/3$ et en développant, le terme en X^2 vaut $-a + a = 0$, et les autres coefficients sont ceux annoncés. Enfin $\sum X_k = \sum x_k - 3m = 0$. □

Le point m joue pour le cubique le rôle du centre $A = (\mu_a, 0)$ du trinôme. On suppose désormais le cubique centré :

$$P(X) = X^3 + pX + q, \qquad p, q \in \mathbb{R}.$$

3 Pourquoi la factorisation directe tourne en rond

Proposition 2. *Le cubique P s'écrit $P(X) = (X + \alpha)(X^2 - \Sigma X + \Pi)$ si et seulement si*

$$\alpha = \Sigma, \qquad \Pi = p + \Sigma^2, \qquad \Sigma^3 + p\Sigma - q = 0.$$

La dernière équation équivaut à $P(-\Sigma) = 0$: les valeurs possibles de Σ sont exactement les opposées des racines de P.

Démonstration. En développant, $(X+\alpha)(X^2-\Sigma X+\Pi) = X^3+(\alpha-\Sigma)X^2+(\Pi-\alpha\Sigma)X+\alpha\Pi$. Par identification, $\alpha = \Sigma$, $\Pi - \Sigma^2 = p$ et $\Sigma\Pi = q$. En reportant $\Pi = p + \Sigma^2$ dans la dernière, il vient $\Sigma^3 + p\Sigma - q = 0$. Or $P(-\Sigma) = -\Sigma^3 - p\Sigma + q$: l'équation obtenue est $P(-\Sigma) = 0$. □

Pour factoriser ainsi, il faut donc connaître une racine : $-\Sigma$ en est une. Le calcul n'est pas faux, mais il remplace le cubique par lui-même, au changement de X en $-X$ près. On ne peut pas l'éviter en poursuivant les calculs : un cubique irréductible sur $\mathbb{Q}$ ne se résout pas avec des racines carrées seulement [8, 6], et les formules du trinôme n'en apportent pas d'autres. Toute méthode générale doit faire entrer une racine cubique, ou une fonction trigonométrique, à un moment.

Exemple 3 (Le comptage de neuf racines)**.** Pour $P = X^3 - 7X + 6 = (X-1)(X-2)(X+3)$, l'équation $\Sigma^3 - 7\Sigma - 6 = 0$ a trois solutions, $\Sigma \in \{3, -1, -2\}$, qui donnent trois factorisations :

$$(X+3)(X^2-3X+2), \qquad (X-1)(X^2+X-6), \qquad (X-2)(X^2+2X-3).$$

Chacune redonne les trois mêmes racines $1, 2, -3$, groupées autrement. Compter 3 racines pour chacun des 3 groupements donne 9, mais un polynôme de degré 3 n'a que trois racines, comptées avec multiplicité.

Remarque (Écriture par les moyennes). Si μ_a, μ_g, μ_q désignent les moyennes des deux racines u, v du facteur du second degré, avec $\mu_q^2 = \frac{u^2+v^2}{2} = 2\mu_a^2 - \mu_g^2$, on a $\Sigma = 2\mu_a$, $\Pi = \mu_g^2$, et

$$P(X) = X^3 - (2\mu_q^2 + \mu_g^2)X + 2\mu_a\mu_g^2,$$

puisque $\Pi - \Sigma^2 = uv - (u+v)^2 = -(u^2+uv+v^2)$. Le coefficient de X s'écrit aussi $-(\mu_q^2 + 2\mu_a^2)$. Les racines du facteur sont $\mu_a \pm \sqrt{\mu_a^2 - \mu_g^2}$, et l'autre racine est $-2\mu_a$.

4 Le trinôme résolvant

L'idée de Cardano est de décomposer la racine elle-même en deux termes, $X = u + v$, et de choisir ces termes de façon que leurs cubes soient les racines d'un trinôme.

Lemme 4. *Pour tous nombres complexes u, v, on a $(u+v)^3 - 3uv\,(u+v) - (u^3+v^3) = 0$. Par conséquent, si*

$$uv = -\frac{p}{3} \qquad \text{et} \qquad u^3 + v^3 = -q,$$

alors $X = u + v$ est racine de P.

Démonstration. $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$. Avec $3uv = -p$ et $u^3 + v^3 = -q$, cette identité s'écrit $X^3 = -q - pX$, soit $P(X) = 0$. □

Les deux conditions portent sur la somme et le produit des cubes : $u^3 + v^3 = -q$ et $u^3v^3 = (uv)^3 = -p^3/27$.

Définition 5 (Trinôme résolvant)**.** Le *trinôme résolvant* de P est

$$R(Y) = Y^2 + qY - \frac{p^3}{27}.$$

Ses moyennes et sa marge sont

$$\mu_a = -\frac{q}{2}, \qquad \mu_g^2 = -\frac{p^3}{27}, \qquad D = \mu_a^2 - \mu_g^2 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}.$$

Dans la suite, μ_a, μ_g^2 et D désignent toujours les moyennes et la marge du résolvant, et non celles d'un facteur de P. Comme pour le trinôme, μ_g^2 est un réel quelconque, éventuellement négatif ; on n'en prend la racine que lorsqu'il est positif.

Proposition 6. *Les cubes u^3 et v^3 sont les racines du résolvant :*

$$u^3 = \mu_a + \sqrt{D}, \qquad v^3 = \mu_a - \sqrt{D},$$

où $\sqrt{D}$ désigne une racine carrée de D, réelle si $D \geq 0$ et égale à $\imath\sqrt{-D}$ si $D < 0$. Réciproquement, si u^3 est une racine de R et si $u \neq 0$, le nombre $v = -p/(3u)$ vérifie $v^3 =$ l'autre racine de R, et $u + v$ est racine de P.

Démonstration. La somme et le produit de u^3 et v^3 sont $-q$ et $-p^3/27$; ce sont donc les racines de $Y^2 + qY - p^3/27$, et la forme centrée du trinôme les donne. Réciproquement, $uv = -p/3$ par construction, et $v^3 = -p^3/(27u^3)$; comme le produit des racines de R vaut $-p^3/27$, v^3 est l'autre racine. La somme des deux racines de R étant $-q$, on a $u^3 + v^3 = -q$, et le lemme 4 conclut. □

Remarque. Le cas $u = 0$ ne se produit que si une racine de R est nulle, c'est-à-dire si $\mu_g^2 = 0$, soit $p = 0$. Alors $P = X^3 + q$ et les racines sont les racines cubiques de $-q$.

Corollaire 7 (Le produit uv)**.** *On a $(uv)^3 = \mu_g^2$: le produit $uv = -p/3$ est la racine cubique réelle du carré de la moyenne géométrique du résolvant.*

5 Les trois racines et la rotation d'ordre 3

On note $j = e^{2\imath\pi/3} = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ses puissances $1, j, j^2$ sont les racines cubiques de l'unité ; la multiplication par j est la rotation d'angle $2\pi/3$ autour de O, qui engendre un groupe cyclique d'ordre 3. On a $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = 1$.

Théorème 8 (Les trois racines)**.** *Soit (u, v) un couple qui vérifie $uv = -p/3$ et $u^3 + v^3 = -q$. Les nombres*

$$X_k = j^k u + j^{-k} v, \qquad k = 0, 1, 2,$$

sont les trois racines de P, comptées avec multiplicité. Leur somme est nulle.

Démonstration. Le couple $(j^k u, j^{-k} v)$ vérifie encore les deux conditions : $(j^k u)(j^{-k} v) = uv$, et $(j^k u)^3 + (j^{-k} v)^3 = u^3 + v^3$ puisque $j^3 = 1$. Par le lemme 4, chaque X_k est racine de P. Leur somme vaut $(1 + j + j^2)(u + v) = 0$, comme celle des racines d'un cubique centré.

Il reste à voir qu'on obtient les trois racines avec leur multiplicité. Si les X_k sont distincts, ce sont trois racines distinctes d'un polynôme de degré 3, donc toutes. Le cas général, où deux d'entre eux coïncident, est traité dans la section 6 : on y vérifie que $\prod(X - X_k) = P(X)$ dans chacun des cas. □

La rotation d'ordre 3 n'agit pas sur les racines elles-mêmes, mais sur le couple (u, v) : elle fait tourner u d'un tiers de tour dans un sens et v d'un tiers de tour dans l'autre, en conservant le produit uv. Le barycentre des trois racines est le centre de rotation, comme le barycentre $1 + \imath + \imath^2 + \imath^3 = 0$ des quatre états du plan animé [2].

6 La marge du résolvant décide de tout

Théorème 9 (Nature des racines)**.** *Soit $D = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ la marge du résolvant.*

(a) Si $D > 0$, le résolvant a deux racines réelles distinctes, et P a une racine réelle et deux racines complexes conjuguées non réelles.

(b) Si $D = 0$, le résolvant a une racine double, et P a une racine multiple ; toutes ses racines sont réelles.

(c) Si $D < 0$, le résolvant a deux racines complexes conjuguées, et P a trois racines réelles distinctes.

Le nombre de racines réelles du cubique est donc à l'opposé de celui du résolvant : un résolvant à racines réelles (grain couché) donne un cubique à une seule racine réelle ; un résolvant à racines complexes (grain debout) donne un cubique à trois racines réelles.

Démonstration. (a) Si $D > 0$, $u^3 = \mu_a + \sqrt{D}$ et $v^3 = \mu_a - \sqrt{D}$ sont réels et distincts. Soient u et v leurs racines cubiques réelles. Alors $(uv)^3 = -p^3/27$ et uv est réel, donc $uv = -p/3$, racine cubique réelle de $-p^3/27$: le couple (u, v) convient. La racine $X_0 = u + v$ est réelle, et

$$X_1 = ju + j^2 v = -\frac{u+v}{2} + \imath\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,(u - v), \qquad X_2 = \overline{X_1}.$$

Comme $u^3 \neq v^3$, on a $u \neq v$, et X_1 n'est pas réel. Les trois racines sont distinctes.

(b) Si $D = 0$, $u^3 = v^3 = \mu_a = -q/2$. Soit $u = v$ la racine cubique réelle de $-q/2$; alors u^2 est la racine cubique réelle de $q^2/4 = -p^3/27$, donc $uv = u^2 = -p/3$. On obtient $X_0 = 2u$ et $X_1 = X_2 = (j + j^2)u = -u$. On vérifie

$$(X - 2u)(X + u)^2 = X^3 - 3u^2 X - 2u^3 = X^3 + pX + q.$$

Si $q \neq 0$, $-u$ est racine double ; si $q = 0$, alors $p = 0$ et 0 est racine triple.

(c) Si $D < 0$, alors $\mu_g^2 = \mu_a^2 - D > 0$, c'est-à-dire $p < 0$. Les racines $u^3 = \mu_a + \imath\sqrt{-D}$ et $v^3 = \mu_a - \imath\sqrt{-D}$ sont conjuguées, de module commun

$$|u^3| = \sqrt{\mu_a^2 - D} = \mu_g = \Big(-\frac{p}{3}\Big)^{3/2}.$$

Soit u une racine cubique de u^3 ; alors $|u| = \sqrt{-p/3}$. Posons $v = \bar{u}$: on a $v^3 = \overline{u^3}$, et $uv = |u|^2 = -p/3$. Le couple convient, et

$$X_k = j^k u + \overline{j^k u} = 2\,\mathrm{Re}(j^k u)$$

est réel. Écrivons $u = \sqrt{-p/3}\,e^{\imath\theta}$. Deux des X_k ne peuvent coïncider que si deux des angles $\theta + 2k\pi/3$ sont symétriques par rapport à l'axe réel, ce qui impose $6\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $u^3 = (-p/3)^{3/2} e^{3\imath\theta}$ réel, donc $\sqrt{-D} = 0$: c'est exclu. Les trois racines réelles sont distinctes. □

Remarque (Discriminant). Le discriminant classique du cubique, $\Delta = \prod_{k<l}(X_k - X_l)^2 = -4p^3 - 27q^2$ [6], vérifie $\Delta = -108\,D$. Le théorème 9 redonne la règle classique : trois racines réelles distinctes si $\Delta > 0$, une seule si $\Delta < 0$.

7 Le cas de trois racines réelles : un triangle projeté

Dans le cas $D < 0$, la démonstration du théorème 9 donne une formule trigonométrique, due à Viète [7].

Corollaire 10 (Formule trigonométrique)**.** *Si $D < 0$, posons $r = \sqrt{-p/3}$ et soit $\theta \in [0, \pi/3]$ défini par*

$$\cos 3\theta = \frac{\mu_a}{\mu_g} = \frac{-q/2}{\sqrt{-p^3/27}}.$$

Les trois racines réelles de P sont

$$X_k = 2r\cos\Big(\theta + \frac{2k\pi}{3}\Big), \qquad k = 0, 1, 2.$$

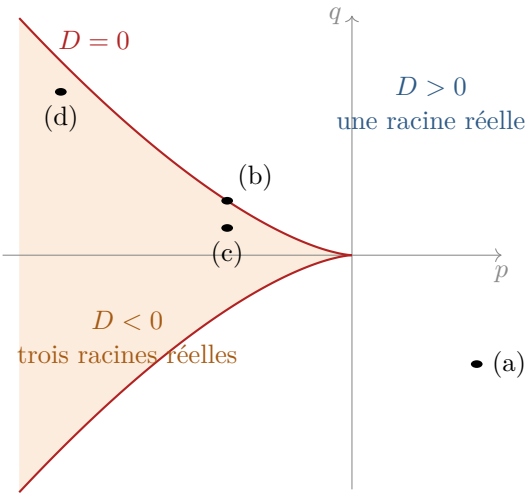


FIGURE 1 – Schéma : le plan des paramètres (p, q). La courbe $D = 0$, soit $4p^3 + 27q^2 = 0$, est une parabole semi-cubique à point de rebroussement en O ; à l'intérieur, la marge du résolvant est négative et le cubique a trois racines réelles. Points : (a) $X^3 + 3X - 4$, (b) $X^3 - 3X + 2$, (c) $X^3 - 3X + 1$, (d) $X^3 - 7X + 6$.

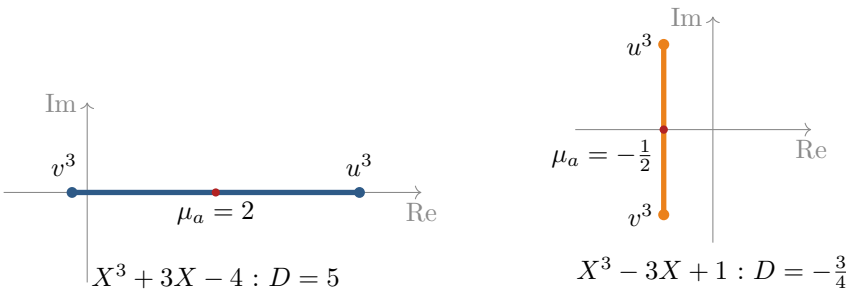


FIGURE 2 – Schéma : les racines du résolvant autour de leur centre $\mu_a = -q/2$. À gauche, grain couché ($D > 0$) : le cubique a une seule racine réelle. À droite, grain debout ($D < 0$) : il en a trois.

Démonstration. On a $u^3 = \mu_a + \imath\sqrt{-D}$, de module μ_g ; son argument 3θ vérifie donc $\cos 3\theta = \mu_a/\mu_g$, et l'on choisit $3\theta \in [0, \pi]$ (le signe de la partie imaginaire est indifférent, puisque $v = \bar{u}$ joue le même rôle). Avec $u = re^{\imath\theta}$, $X_k = 2\,\mathrm{Re}(j^k u) = 2r\cos(\theta + 2k\pi/3)$. □

Le rapport μ_a/μ_g est celui de la moyenne arithmétique à la moyenne géométrique du résolvant. Il est compris strictement entre -1 et 1 exactement quand $\mu_a^2 < \mu_g^2$, c'est-à-dire quand la marge est négative : le cosinus de 3θ n'existe que dans ce cas.

Géométriquement, les points $2j^k u$ sont les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $2r$, et les racines sont leurs projections sur l'axe réel (figure 3). La rotation d'ordre 3 fait tourner le triangle ; ses projections permutent circulairement les trois racines, alors qu'aucune figure visible sur l'axe réel ne tourne. On retrouve la « rotation cachée » de [4].

8 Le cas d'une seule racine réelle

Dans le cas $D > 0$, u et v sont réels et de cubes distincts. La rotation d'ordre 3 fait tourner u sur le cercle de rayon $|u|$ et v en sens inverse sur le cercle de rayon $|v|$; seule la position initiale donne une somme réelle (figure 4).

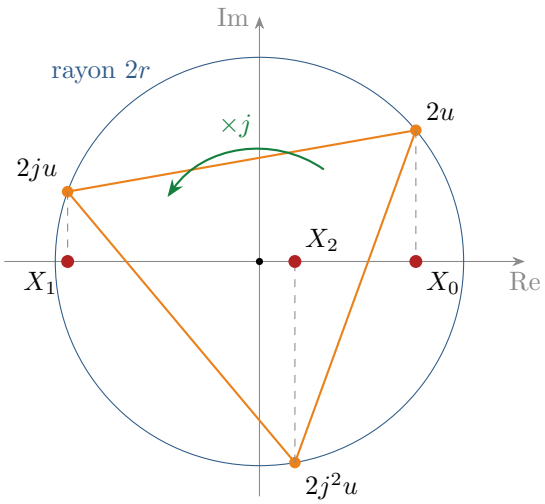


FIGURE 3 – Schéma : pour $X^3 - 3X + 1$ ($r = 1$, $\theta = 2\pi/9$), les trois racines réelles $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$, $2\cos\frac{14\pi}{9}$ sont les projections sur l'axe réel des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle de rayon $2r$.

9 Exemples

Cubique	$\mu_a = -\frac{q}{2}$	$\mu_g^2 = -\frac{p^3}{27}$	D	Résolvant	Racines
$X^3 + 3X - 4$	2	-1	5	grain couché	$1,\ \frac{-1\pm\imath\sqrt{15}}{2}$
$X^3 - 3X + 2$	-1	1	0	ponctuel	$-2,\ 1,\ 1$
$X^3 - 3X + 1$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{4}$	grain debout	$2\cos(\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3})$
$X^3 - 7X + 6$	-3	$\frac{343}{27}$	$-\frac{100}{27}$	grain debout	$1,\ 2,\ -3$

Exemple 11 (Le nombre d'or)**.** Pour $X^3 + 3X - 4$, on a $u^3 = 2 + \sqrt{5}$ et $v^3 = 2 - \sqrt{5}$, d'où la formule de Cardano

$$X_0 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}} = 1.$$

Cette égalité surprenante s'explique : le nombre d'or φ vérifie $\varphi^2 = \varphi + 1$, donc $\varphi^3 = 2\varphi + 1 = 2 + \sqrt{5}$, et de même $(-1/\varphi)^3 = 2 - \sqrt{5}$. Ainsi $u = \varphi$, $v = -1/\varphi$, $uv = -1 = -p/3$, et $u + v = 1$.

Exemple 12 (Racine double)**.** Pour $X^3 - 3X + 2$, le résolvant est $Y^2 + 2Y + 1 = (Y + 1)^2$, de racine double -1 ; on prend $u = v = -1$, et l'on trouve $X_0 = -2$, $X_1 = X_2 = 1$. En effet $X^3 - 3X + 2 = (X + 2)(X - 1)^2$.

Exemple 13 (Une rotation cachée)**.** Pour $X^3 - 3X + 1$, on a $u^3 = -\frac{1}{2} + \imath\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{2\imath\pi/3}$: le résolvant a pour racines les racines cubiques primitives de l'unité. Alors $u = e^{2\imath\pi/9}$, $r = 1$, et les racines sont $2\cos\frac{2\pi}{9}$, $2\cos\frac{8\pi}{9}$, $2\cos\frac{14\pi}{9}$ (figure 3).

Exemple 14 (Racines entières, calcul complexe)**.** Pour $X^3 - 7X + 6$, de racines 1, 2, -3, le résolvant a pour racines $u^3 = -3 \pm \imath\frac{10\sqrt{3}}{9}$, non réelles : c'est le *casus irreducibilis*. La formule de Cardano oblige à passer par des cubes complexes pour trouver des racines entières. La formule trigonométrique donne $r = \sqrt{7/3}$ et $\cos 3\theta = -\frac{9\sqrt{3}}{7\sqrt{7}} \approx -0{,}8417$, soit $\theta \approx 49{,}1°$, et l'on retrouve $2r\cos\theta = 2$, $2r\cos(\theta + 120°) = -3$, $2r\cos(\theta + 240°) = 1$.

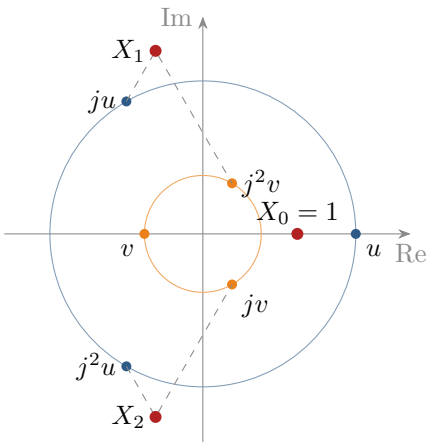


FIGURE 4 – Schéma : pour $X^3 + 3X - 4$, $u = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $v = -\frac{1}{\varphi}$. Les racines sont $X_0 = u+v = 1$ et $X_{1,2} = j^{\pm 1}u + j^{\mp 1}v = \frac{-1 \pm \imath\sqrt{15}}{2}$, sommes vectorielles (en pointillés) des points tournés en sens contraires.

10 Mise en œuvre numérique

La méthode se traduit en un algorithme court. Les précautions sont celles du trinôme : éviter de soustraire deux nombres voisins.

1. Calculer $\mu_a = -q/2$, $\mu_g^2 = -p^3/27$ et la marge $D = \mu_a^2 - \mu_g^2$.
2. Si $D \geq 0$: calculer $s = \mu_a + \operatorname{sgn}(\mu_a)\sqrt{D}$, qui additionne deux nombres de même signe ; prendre $u = \sqrt[3]{s}$ (racine cubique réelle) et, si $u \neq 0$, $v = -p/(3u)$, plutôt que la racine cubique de $\mu_a - \operatorname{sgn}(\mu_a)\sqrt{D}$, sujette à compensation. La racine réelle est $X_0 = u + v$; les deux autres sont $-\frac{X_0}{2} \pm \imath\frac{\sqrt{3}}{2}(u - v)$.
3. Si $D < 0$: calculer $r = \sqrt{-p/3}$, $\theta = \frac{1}{3}\arccos(\mu_a/\mu_g)$, et $X_k = 2r\cos(\theta + 2k\pi/3)$.

Le choix de $v = -p/(3u)$ est l'analogue, pour le cubique, de la formule $x_2 = \Pi/x_1$ qui stabilise le calcul des racines d'un trinôme : on calcule le terme de grand module par une addition sans perte, et l'on déduit l'autre du produit.

11 Lecture dans la théorie du grain

Cette section propose une interprétation ; elle ne contient pas d'énoncé nouveau.

La méthode met en jeu deux niveaux. Au premier niveau, le trinôme résolvant se lit avec ses moyennes, sa marge et son grain : couché, ponctuel ou debout, centré en $\mu_a = -q/2$. Au second niveau, les racines du cubique s'obtiennent en prenant des racines cubiques de ce grain, puis en le faisant tourner d'un tiers de tour.

Le théorème 9 montre que les deux niveaux sont en opposition : le grain debout du résolvant, celui des racines complexes, porte les trois racines réelles du cubique, et le grain couché du résolvant porte un cubique à une seule racine réelle. Le passage du réel au complexe n'est donc pas, en degré 3, un changement de trinôme par quart de tour [5] : c'est un changement de niveau, du cubique à son résolvant, qui inverse la lecture.

Enfin, le groupe de rotation qui intervient est d'ordre 3 et non d'ordre 4 ou 2 : il n'est pas un sous-groupe du groupe intrinsèque $\langle \imath \rangle$ du plan animé [2], mais le groupe $\langle j \rangle$ des racines cubiques de l'unité. C'est l'entrée de ce groupe qui fait sortir le cubique du domaine des racines carrées.

12 Bilan

1. Factoriser le cubique en un facteur linéaire et un trinôme demande d'en connaître une racine : l'équation $\Sigma^3 + p\Sigma - q = 0$ obtenue est le cubique lui-même, en $-X$, et ses trois choix expliquent le comptage apparent de neuf racines (proposition 2).
2. Le bon trinôme est le résolvant $Y^2 + qY - p^3/27$, dont les racines sont les cubes u^3, v^3 des deux termes d'une racine $X = u + v$; ses moyennes sont $\mu_a = -q/2$ et $\mu_g^2 = -p^3/27$ (proposition 6).
3. Les trois racines s'obtiennent par la rotation d'ordre 3 : $X_k = j^k u + j^{-k} v$ (théorème 8).
4. La marge $D = q^2/4 + p^3/27$ du résolvant décide de la nature des racines, à l'opposé du trinôme : résolvant réel, une racine réelle ; résolvant complexe, trois racines réelles (théorème 9).
5. Dans ce dernier cas, $\cos 3\theta = \mu_a/\mu_g$, et les racines sont les projections d'un triangle équilatéral (corollaire 10).

Références

[1] G. Cardano, *Ars Magna*, Nuremberg, 1545.

[2] H. Genvrin, *Le plan complexe animé d'un mouvement de rotation intrinsèque*, mars 2026.

[3] H. Genvrin, *Autour des racines d'un trinôme*, octobre 2026.

[4] H. Genvrin, *Rotations, demi-tours et racines. Un regard géométrique sur la théorie de Galois*, octobre 2026.

[5] H. Genvrin, *Le groupe de rotation sous-jacent à un trinôme*, octobre 2026.

[6] I. Stewart, *Galois Theory*, 4e éd., CRC Press, 2015.

[7] F. Viète, *De aequationum recognitione et emendatione*, Paris, 1615.

[8] P. L. Wantzel, « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de mathématiques pures et appliquées* 2 (1837), 366–372.