

Le pseudo-mouvement

De l'intégration inertielle à la moindre action, par la courbure

Hugues Genvrin — Programme du grain

September 12, 2026

Résumé

On analyse la construction du *pseudo-mouvement* : concaténer des segments d'inertie (tangentes) reprojétés sur la trajectoire. On établit sa nature exacte — une intégration de Newton (méthode d'Euler) — puis on montre que la *reprojection* encode la force, gouvernée par la *courbure* $f'' = \ddot{y}$. La déduction-clé suit : *si* la force est conservative (dépendant de la position seule), la courbure intégrée donne l'énergie potentielle V , le lagrangien $L = T - V$ est complet, et la trajectoire satisfait le principe de moindre action. On vérifie numériquement la chaîne courbure $\rightarrow$ force $\rightarrow$ potentiel $\rightarrow$ Euler-Lagrange sur une chute parabolique, et l'on montre l'échec dans le cas dissipatif. Le pseudo-mouvement se lit enfin comme *jauge de déformation* de la dynamique.

1 La construction : intégration inertielle

Soit une dynamique $y = f(t)$ entre $O = f(t)$ et $A = f(t + n\Delta t)$. Le *pseudo-mouvement* se construit par récurrence : au point $f(t + (k-1)\Delta t)$, on suit le *vecteur d'inertie* I_{k-1} porté par la tangente (la direction que la dynamique poursuivrait sans force), sur un pas Δt ; à son extrémité, on *reprojette* sur la courbe suivant un axe parallèle à $(y'Oy)$; on itère.

Proposition 1 (Nature de la construction). *Le pseudo-mouvement est la méthode d'Euler d'intégration de la dynamique : à chaque pas, avancer selon la dérivée (tangente), puis corriger. Quand $\Delta t \rightarrow 0$, il converge vers la trajectoire réelle.*

Ce n'est pas encore la moindre action. La convergence de la méthode d'Euler vaut pour *toute* équation différentielle, y compris dissipative — elle ne peut donc pas, à elle seule, impliquer qu'une trajectoire minimise une action. Le principe de moindre action requiert deux ingrédients absents de la construction brute : un *lagrangien* $L = T - V$ (donc un potentiel) et une *comparaison* entre trajectoires ($\delta S = 0$). On montre ci-dessous que la construction les *contient*, à une condition.

2 La reprojection encode la force : courbure $\rightarrow$ force

Proposition 2 (La reprojection est l'impulsion de la force). *L'écart entre l'extrémité du segment d'inertie (tangente) et la courbe réelle est, au premier ordre non trivial,*

$$f(t + \Delta t) - [f(t) + f'(t)\Delta t] = \frac{1}{2}f''(t)\Delta t^2 + o(\Delta t^2).$$

Cet écart — la reprojection — est gouverné par la courbure $f'' = \ddot{y}$. Par la deuxième loi de Newton, $m\ddot{y} = F$: la reprojection est l'impulsion de la force sur le pas.

Remarque 3 (L'intuition inertielle, honorée). Le *segment* d'inertie est bien un mouvement libre, sans force : sur lui seul, $f'' = 0$, l'écart est nul, et c'est un mouvement de *moindre action libre*

($V = 0$, action $\int T dt$ stationnaire à la ligne droite uniforme). L'intuition « pas de force $\Rightarrow$ moindre action » est *juste pour le segment*. Mais la trajectoire globale alterne inertie (libre) et reprojction (force) : la force n'est pas absente, elle est *cachée dans les reprojctions*. C'est là, et seulement là, qu'elle agit.

3 La déduction-clé : force $\rightarrow$ potentiel $\rightarrow$ lagrangien

Théorème 4 (Du pseudo-mouvement à la moindre action). Si la force est conservative (elle ne dépend que de la position, $F = F(y)$), alors :

- (i) elle dérive d'un potentiel, $F = -\frac{dV}{dy}$, donc $V(y) = -\int F dy$ (la courbure intégrée donne V) ;
- (ii) le lagrangien est complet, $L = T - V$ avec $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ (des segments inertiels) et V (des reprojctions) ;
- (iii) l'équation d'Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0$ redonne $m\ddot{y} = -\frac{dV}{dy} = F$, c'est-à-dire la construction elle-même. La trajectoire rend l'action $S = \int L dt$ stationnaire : elle satisfait la moindre action.

Proof. (i) Une force ne dépendant que de y admet la primitive $V(y) = -\int F dy$, et $F = -dV/dy$ par construction. (ii) T vient de la vitesse des segments, V de la courbure reprojctée : $L = T - V$. (iii) $\partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$, d'où $\frac{d}{dt}(m\dot{y}) = m\ddot{y}$; $\partial L/\partial y = -dV/dy = F$; Euler-Lagrange donne $m\ddot{y} - F = 0$, soit Newton. Cette équation est la loi que le pseudo-mouvement intègre. La stationnarité de S est équivalente à Euler-Lagrange. $\square$

La condition de conservativité est la frontière. Si la force *dépend de la vitesse* (frottement $F = -k\dot{y}$) ou du temps, il n'existe *aucun* $V(y)$ tel que $F = -dV/dy$: le lagrangien standard $T - V$ n'existe pas, et la moindre action *ne s'applique pas*. La construction reste alors valide comme *intégration de Newton* (elle reconstruit la trajectoire), mais ne relève pas de la moindre action. Test pratique : la force lue sur la courbure dépend-elle seulement de où l'on est (y), ou aussi de à quelle vitesse ($\dot{y}$) ? Position seule $\Rightarrow$ potentiel, moindre action. Vitesse $\Rightarrow$ ni l'un ni l'autre.

4 Vérification numérique

Cas conservatif : chute parabolique $y(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ ($m = 1$, $g = 9,81$).

Étape	Résultat numérique
Courbure $\ddot{y}$ (mesurée)	-9,80 (attendu $-g = -9,81$)
Force $F = m\ddot{y}$	-9,80 N (attendu $-mg$)
Dépend de $\dot{y}$?	non ($\dot{y} \in [-9,6; 10]$, F constante) $\Rightarrow$ conservative
Potentiel $V(y) = -\int F dy$	$mg y$ (gravité)
Euler-Lagrange $m\ddot{y} + mg$	$0,007 \approx 0$ (vérifié)

Stationnarité de l'action. Avec $S = \int (\frac{1}{2}m\dot{y}^2 - mg y) dt$ et des perturbations $\varepsilon \sin(\pi t/T)$ (nulles aux bords) :

perturbation ε	-0,10	-0,05	vraie	+0,05	+0,10
S	-35,758	-35,767	-35,770	-35,767	-35,758
ΔS	+0,0123	+0,0031	0	+0,0031	+0,0123

Toutes les voisines ont S plus grande (et ΔS symétrique, $\propto \varepsilon^2$) : la vraie trajectoire est un *minimum* de l'action.

Cas dissipatif : $m\ddot{y} = -mg - k\dot{y}$ ($k = 0,5$). La corrélation entre $F = m\ddot{y}$ et $\dot{y}$ vaut $-1,000$: la force *dépend entièrement de la vitesse*. Aucun potentiel $V(y)$ n'existe, aucun lagrangien standard — la moindre action est inapplicable, bien que la construction reconstruise correctement la trajectoire.

```
import numpy as np
m, g = 1.0, 9.81
t = np.linspace(0, 2, 2001); y = 10*t - 0.5*g*t**2 # chute parabolique
ydot = np.gradient(y, t); ydd = np.gradient(ydot, t) # vitesse, courbure

F = m*ydd # force = m * courbure
# conservative ? F depend-elle de ydot ? -> ici F ~ -mg constante : NON
V = m*g*y # V(y) = -int F dy = mgy
EL = m*ydd + m*g # Euler-Lagrange : ~0
print("courbure:", round(ydd.mean(),2), " EL residu:", round(abs(EL).mean(),4))

# action stationnaire : voisines toutes plus grandes
trapz = getattr(np, 'trapezoid', np.trapz)
S = lambda yy: trapz(0.5*m*np.gradient(yy,t)**2 - m*g*yy, t)
for e in (-0.1,-0.05,0.05,0.1):
    b = e*np.sin(np.pi*t/t[-1]) # perturbation nulle aux bords
    print(f"eps={e:+.2f} dS={S(y+b)-S(y):+.4f}") # tous > 0 => minimum
```

5 Le graphe complémentaire : la quantité de mouvement

La construction par tangente et reprojektion est *descriptive* (elle suit une courbe donnée). On peut la remplacer par une construction *générative*, qui engendre la trajectoire à partir de la force sans la présupposer : le graphe en *quantité de mouvement*.

5.1 Transport par la force : ni projection ni reprojektion

Définition 5 (Construction générative). En posant $q(t) = m\dot{y}(t)$ la quantité de mouvement, la deuxième loi de Newton sous forme incrémentale s'écrit

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = F \iff \boxed{q(t + k\Delta t) = q(t + (k-1)\Delta t) + F \cdot \Delta t.}$$

On part de q , on ajoute l'*impulsion* $F \Delta t$, on obtient le nouveau q . Ce n'est ni une projection ni une reprojektion : c'est un *transport par la force*.

Remarque 6 (Générative, non descriptive). Contrairement à la reprojektion, cette construction ne suppose pas la courbe connue : elle la *produit* à partir de F . C'est la méthode d'Euler dans l'espace des phases (y, q) — Newton, littéralement. La force est le *taux de variation élémentaire de la quantité de mouvement* ($F = \Delta q / \Delta t$), non « la variation de la force ».

Remarque 7 (Le triangle d'impulsion). Le pas se lit comme un triangle vectoriel : côté $q(t + (k-1)\Delta t)$, côté $F \Delta t$, résultante $q(t + k\Delta t)$. Pour Δt fini, l'extrémité n'est pas sur la courbe (erreur d'Euler $\sim \Delta t^2$) ; quand $\Delta t \rightarrow 0$, le triangle vient épouser la courbe.

5.2 Le contenu énergétique : ΔT et ΔV

Le graphe en quantité de mouvement fait apparaître l'énergie, là où le graphe en position ne montrait que la trajectoire.

Proposition 8 (Les deux faces de l'impulsion). *Le travail de la force sur le pas, $F \cdot \Delta x$, est simultanément la variation d'énergie cinétique et l'opposé de la variation d'énergie potentielle :*

$$\Delta T = F \cdot \Delta x, \quad \Delta V = -F \cdot \Delta x \quad (\text{cas conservatif}),$$

d'où la conservation de l'énergie *pas à pas* :

$$\Delta T + \Delta V = 0 \implies T + V = \text{cste.}$$

Proof. $\Delta T = \frac{1}{2}m(v_k^2 - v_{k-1}^2) = m\bar{v}\Delta v = \bar{v}\Delta q = \bar{v}F\Delta t = F\Delta x$ (théorème de l'énergie cinétique). Dans le cas conservatif $F = -dV/dy$, donc $\Delta V = (dV/dy)\Delta x = -F\Delta x$. La somme $\Delta T + \Delta V = F\Delta x - F\Delta x = 0$. $\square$

Vérification numérique (parabole, $m = 1$, $g = 9,81$) : à chaque pas, $\Delta T = -\Delta V$ à la précision machine.

pas n	ΔT	ΔV	$\Delta T + \Delta V$
100	-0,0884	+0,0884	$\sim 10^{-13}$
500	-0,0499	+0,0499	$\sim 10^{-14}$
1000	-0,0018	+0,0018	$\sim 10^{-14}$
1500	+0,0463	-0,0463	$\sim 10^{-12}$

L'énergie totale $E = T + V$ est constante ($\Delta E/E \sim 10^{-3}$, résidu de discrétisation). Code :

```
import numpy as np
m, g = 1.0, 9.81
t = np.linspace(0, 2, 2001); dt = t[1]-t[0]
y = 10*t - 0.5*g*t**2
v = np.gradient(y, t); q = m*v; F = m*np.gradient(v, t)

# generative : Delta q = F * Delta t (Newton incremental)
print("max|dq - F dt| =", np.max(np.abs(np.diff(q) - F[:-1]*dt))) # ~0

# energie : dT = F dx, dV = -F dx, dT+dV = 0
dx = np.diff(y); dT = np.diff(0.5*m*v**2); dV = np.diff(m*g*y)
print("max|dT+dV| =", np.max(np.abs(dT + dV))) # ~1e-13
```

Remarque 9 (Position + quantité de mouvement = espace des phases). Le graphe en position montre la *trajectoire* ; le graphe en quantité de mouvement montre l'*échange énergétique* (ΔT gagnée, ΔV cédée). Ensemble, ils forment l'espace des phases (y, q) , où vit la mécanique hamiltonienne. Le second graphe porte donc le lagrangien $L = T - V$ et sa conservation $T + V = \text{cste}$: c'est le pendant énergétique du graphe cinématique.

6 Lecture par le grain : le pseudo-mouvement comme jauge de déformation

Remarque 10 (Inertie + déformation). Le pseudo-mouvement *décompose* la dynamique en deux gestes : l'inertie (segments, énergie cinétique T , moindre action libre) et la reprojection (courbure, force, énergie potentielle V dans le cas conservatif). La reprojection est une *déformation* de la trajectoire inertielle, gouvernée par la courbure f'' — exactement l'objet de la *jauge de déformation* (chapitre *Jauges*). L'écart s'annule là où $f'' = 0$ (régime inertiel pur, pas de force), et la déformation cumulée est l'action du potentiel.

Remarque 11 (Le pli, à nouveau). Là où la trajectoire replie (extremum de y , $\dot{y} = 0$), la jauge de la position perd la finesse (deux instants, même hauteur) — le pli du chapitre *Jauges*. Le pseudo-mouvement rend visible ce pli comme le moment où la reprojection domine l'inertie. Les deux langages — moindre action (par le lagrangien) et jauge de déformation (par la courbure) — décrivent la même trajectoire.

7 Portée et limites

Remarque 12 (Acquis). Le pseudo-mouvement est une intégration de Newton (prop. 1) dont la reprojection encode la force par la courbure (prop. 2) ; *si* la force est conservative, la courbure intégrée donne le potentiel, le lagrangien $L = T - V$ est complet, et la trajectoire satisfait la moindre action (théorème 4) — vérifié numériquement (Euler–Lagrange à 0,007, action stationnaire). Le pseudo-mouvement se lit comme jauge de déformation de la dynamique.

Limites. (i) La moindre action exige la conservativité (force = $F(y)$) ; les forces dépendant de la vitesse ou du temps l'excluent (la construction reste valide comme intégration). (ii) L'axe de reprojection doit être celui de la force pour que « courbure = force » soit exact ; un axe mal orienté ne capte qu'une composante. (iii) Le résultat est *mécanique* : on relie une construction géométrique à Newton et Lagrange, on ne dérive pas de physique nouvelle — le potentiel est *lu* sur la trajectoire, non prédit.