

Théorème de Klein

Lexique symplectique et cas travaillés (euclidien, similitude)

Hugues Genvrin

Janvier 2026

Partie I — Lexique (formalisme symplectique)

On rapproche deux formalismes : celui des crochets de Poisson sur le fibré cotangent, $(T, \tau, X, q_X, H, \dot{q}_X)$, et celui de la relation fondamentale de la dynamique généralisée, $(q, \dot{q}, F_s)$. Trois mises au point structurent la traduction.

- A n'est pas le contenu *du groupe* mais le contenu *du quantum* (les propriétés dont les mesures sont préservées) ; c'est lui qui *induit* le groupe principal. La flèche va $A \Rightarrow \text{Sym}(A)$.
- X et q_X engendrent *le même* flot τ_t , par deux voies : X par exponentiation ($\tau_t = \exp tX$), q_X par le crochet ($\dot{f} = \{f, q_X\}$). q_X est l'*application moment*, non un générateur « des variations ».
- La structure conjuguée provient du *groupe seul*, via $T^*\mathcal{V}$: elle ne requiert aucune métrique. La métrique de Fisher, étant symétrique, ne fournit pas la forme symplectique ω (antisymétrique) ; elle ne sert qu'au régime de gradient.

Lexique maître

Symbole	Formalisme symplectique sur $T^*\mathcal{V}$	Lecture Erlangen / RFDG
$\mathcal{V}$	espace de base de la géométrie (ex. $\mathbb{R}^2$); les p_j y vivent	la variété mise en forme par $\mathcal{Q}$
T	groupe ambiant des transformations admissibles	toutes les transformations des variétés
$G = \text{Sym}(A)$	groupe principal (sous-groupe de T)	le sens conservé par $\mathcal{Q}$
(τ_t)	sous-groupe à un paramètre; $\tau_t = \exp(tX)$	une dynamique / un processus suivi
A	contenu du quantum; induit G	le sens fixé ($A \Rightarrow G$)
$p_j, \mu(p_j)$	<i>invariants</i> sur $\mathcal{V}$ et leurs mesures	grandeurs informationnelles dotées par $\mathcal{Q}$
$T^*\mathcal{V}, \omega$	espace des phases (q, p) ; $\omega = dp \wedge dq$	l'espace dédoublé état + moment
$X \in \mathfrak{g}$	algèbre de Lie; $X = \dot{\tau}_0$, vitesse à l'identité	direction de variation infinitésimale
ξ_X	champ fondamental sur $\mathcal{V}$ réalisant X	la transformation qui fait varier p_j
$q_X = \langle p, \xi_X \rangle$	application moment $J : T^*\mathcal{V} \rightarrow \mathfrak{g}^*$	charge conjuguée = q
H	fonctionnel générateur (énergie, action, potentiel)	la loi indépendante, le contenu prédictif
$\{\cdot, \cdot\}$	crochet de Poisson; $\{q_A, q_B\} = q_{[A, B]}$	dictionnaire fonction $\leftrightarrow$ flot
$F_s = \dot{q}_X = 0 \iff X \text{ symétrie de } H \iff q_X$		force sémantique = degré de brisure
$\{q_X, H\}$	conservée	
C (Casimir)	$\{C, q_X\} = 0 \forall X$; étiquette les orbites coadjointes	l' <i>invariant</i> , ressorti côté charges

Propriété et charge conjuguée

La propriété et son conjugué ne vivent pas au même endroit : p_j est un invariant sur la base $\mathcal{V}$, q_X une fonction conservée sur $\mathfrak{g}^*$. Le fibré $T^*\mathcal{V}$ les relie, et l'invariant reparaît au bout comme Casimir.

Propriété p_j (sur $\mathcal{V}$)	varie sous	$X \in \mathfrak{g}$	charge $q_X \in \mathfrak{g}^*$	invariant = Casimir
longueur	translations	P_1, P_2	p_x, p_y (impulsion)	$ p ^2 = \text{longueur}^2$
angulation (mod 2π)	rotation	J	$L = xp_y - yp_x$ (mom. cinétique)	libre sur l'orbite

Les deux régimes (à ne pas confondre)

	régime gradient	régime symplectique / hamiltonien
structure requise	une métrique g (Fisher)	le groupe seul, via $T^*\mathcal{V}$
force sémantique	$F_s = -\nabla V$	$F_s = \{q_X, H\}$
nature	dissipatif; $\dot{V} \leq 0$	conservatif; $\dot{C} = 0$
$F_s = 0$ signifie	minimum de V (équilibre)	charge q_X conservée (symétrie)
décrit	le mouvement (apprentissage)	les invariants

Erlangen fournit la colonne de droite *canoniquement*, sans rien ajouter au groupe. La colonne de gauche seule exige une métrique surajoutée.

Remarque. Statut du théorème de Klein. Sous sa forme de *correspondance de Galois* — (Sym, Inv) antitone, existence du groupe principal, et $\text{Sym}(A_1 \cup A_2) = \text{Sym}(A_1) \cap \text{Sym}(A_2)$ — l'énoncé est correct et standard. La seule réserve : le groupe principal *existe* toujours (il contient l'identité) mais n'est pas nécessairement distinct de $\{\text{id}\}$. Un contenu rigide (qui individue toute configuration) donne $\text{Sym}(A) = \{\text{id}\}$. La non-trivialité dépend de la grossièreté du quantum ; elle n'est pas un théorème.

Partie II — Cas euclidien $E(2)$

1. Groupe et algèbre $\mathfrak{se}(2)$

$E(2)$ agit sur $\mathcal{V} = \mathbb{R}^2$ par $q \mapsto R_\theta q + a$; la composante connexe est $SE(2) = SO(2) \ltimes \mathbb{R}^2$ (dimension 3). Générateurs, comme champs de vecteurs :

$$P_1 = \partial_x, \quad P_2 = \partial_y, \quad J = x \partial_y - y \partial_x.$$

Crochets (réalisés par les charges, cf. note de signe ci-dessous) :

$$[P_1, P_2] = 0, \quad [J, P_1] = P_2, \quad [J, P_2] = -P_1.$$

J fait tourner le vecteur de translation ; les deux translations commutent.

Remarque. Convention de signe. On affiche l'algèbre telle que la *réalisent les charges*, $\{q_A, q_B\} = q_{[A,B]}$. Les champs fondamentaux vérifient la relation de signe opposé, $[\xi_A, \xi_B] = -\xi_{[A,B]}$ (anti-homomorphisme de l'application moment). On travaille désormais au niveau des charges, non ambigu.

2. Espace des phases et charges

Sur $T^*\mathbb{R}^2$, coordonnées (x, y, p_x, p_y) , forme $\omega = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy$, soit $\{x, p_x\} = \{y, p_y\} = 1$ (reste nul). La charge conjuguée à X est $q_X = \langle p, \xi_X \rangle$:

$$q_{P_1} = p_x, \quad q_{P_2} = p_y, \quad q_J = x p_y - y p_x =: L.$$

Longueur $\rightarrow$ impulsion ; angulation $\rightarrow$ moment cinétique.

3. Vérification : les charges reproduisent $\mathfrak{se}(2)$

$$\{L, q_{P_1}\} = \{x p_y - y p_x, p_x\} = \{x, p_x\} p_y = p_y = q_{P_2},$$

et de même $\{L, q_{P_2}\} = -p_x = -q_{P_1}$, $\{q_{P_1}, q_{P_2}\} = 0$. L'application moment est une réalisation de Poisson de $\mathfrak{se}(2)$.

4. Noether / RFDG

Particule libre $H = \frac{1}{2}|p|^2$: les trois crochets $\{q_{P_1}, H\}$, $\{q_{P_2}, H\}$, $\{L, H\}$ sont nuls, donc $F_s = 0$ partout (équilibre sémantique, $A = \{\text{longueur, angle}\}$). Avec un potentiel $H = \frac{1}{2}|p|^2 + V(q)$:

$$F_s^{(P_1)} = \dot{q}_{P_1} = \{p_x, H\} = -\partial_x V, \quad F_s^{(J)} = \dot{L} = \{L, H\} = -(x \partial_y - y \partial_x) V.$$

Le canal de translation redonne la force $-\nabla V$, le canal de rotation le couple. Si $V = V(r)$, alors $\dot{L} = 0$: le moment cinétique survit même quand l'impulsion ne survit pas. « $\{q_X, H\} = 0$ redonne les transformations invariantes » se lit sur les charges dont F_s s'annule.

5. La boucle se referme : le Casimir

$$C = q_{P_1}^2 + q_{P_2}^2 = |p|^2, \quad \{C, L\} = \{C, q_{P_i}\} = 0.$$

C'est le carré de la longueur, redevenu invariant après le tour propriété $\rightarrow$ charge $\rightarrow$ Casimir. Les orbites coadjointes de $E(2)$ sont les cylindres $|p|^2 = r^2$ (rayon = échelle de longueur), symplectiques pour la forme de Kirillov–Kostant–Souriau.

Partie III — Cas de la similitude $\text{Sim}(2)$

1. Groupe et algèbre $\mathfrak{sim}(2)$

$\text{Sim}(2)$ agit par $q \mapsto \lambda R_\theta q + a$, $\lambda > 0$; c'est $(\mathbb{R}_+ \times SO(2)) \ltimes \mathbb{R}^2$ (dimension 4). On greffe à $\mathfrak{se}(2)$ la dilatation (champ d'Euler)

$$D = x \partial_x + y \partial_y.$$

Crochets nouveaux :

$$[D, P_1] = P_1, \quad [D, P_2] = P_2, \quad [D, J] = 0.$$

D rescale les translations et commute avec la rotation.

2. Charge de dilatation

$$q_D = \langle p, \xi_D \rangle = x p_x + y p_y =: \mathcal{D} \quad (\text{le viriel } x \cdot p).$$

Quatre charges $(p_x, p_y, L, \mathcal{D})$: longueur $\rightarrow$ impulsion, angle $\rightarrow$ moment cinétique, échelle $\rightarrow$ viriel.

3. Vérification : reproduction de $\mathfrak{sim}(2)$

$$\{\mathcal{D}, p_x\} = \{x p_x + y p_y, p_x\} = \{x, p_x\} p_x = p_x, \quad \{\mathcal{D}, p_y\} = p_y, \quad \{\mathcal{D}, L\} = 0.$$

Le fait décisif : $\{\mathcal{D}, p_i\} = p_i \neq 0$ — le viriel ne commute pas avec l'impulsion.

4. L'événement : le Casimir se brise

$$\{\mathcal{D}, |p|^2\} = 2p_x \{\mathcal{D}, p_x\} + 2p_y \{\mathcal{D}, p_y\} = 2|p|^2 \neq 0.$$

$|p|^2$ n'est plus un Casimir : c'est un covariant de poids 2. Aucun Casimir non constant ne survit : une fonction commutant avec P_1, P_2 ne dépend que de p ; commutant avec J , seulement de $|p|^2$; et $\{\mathcal{D}, f(|p|^2)\} = 2|p|^2 f' = 0$ force f constante. Ne subsistent que les invariants de poids 0 : angles et rapports de longueurs. La longueur est partie avec l'échelle.

5. Noether / RFDG : la dilatation n'est pas conservée

Contenu $A = \{\text{angle}\}$, $\text{Sym}(A) = \text{Sim}(2)$. Particule libre $H = \frac{1}{2}|p|^2$:

$$F_s^{(D)} = \dot{\mathcal{D}} = \{\mathcal{D}, H\} = \frac{1}{2}\{\mathcal{D}, |p|^2\} = |p|^2 = 2H \neq 0.$$

C'est le théorème du viriel : $\mathcal{D} = x \cdot p$ croît même pour le mouvement libre. La non-invariance d'échelle de H (poids 2) se lit comme la fuite du viriel — trace dynamique de « pas de longueur absolue ». Pour que $\mathcal{D}$ soit conservée il faut un H de poids nul (potentiel en $1/|x|^2$), et même là seulement avec la structure conforme complète ($\mathfrak{sl}(2)$ de de Alfaro–Fubini–Furlan) : la similitude « appelle » le conforme.

Bilan

	euclidien $E(2)$	similitude $\text{Sim}(2)$
générateurs	P_1, P_2, J	$+ D$
charges	p_x, p_y, L	$+ \mathcal{D} = x \cdot p$
longueur	Casimir $ p ^2$ (invariante)	poids 2, plus de Casimir
invariants restants	longueur, angle	angle, rapports seulement
particule libre	$F_s = 0$ pour les 3	$F_s^{(D)} = 2H \neq 0$ (viriel)

Contenu plus pauvre, groupe plus gros, invariants moins nombreux : la dualité antitone du théorème de Klein, vérifiée sur les charges et les Casimirs.