

# Métrie stratale

Premier théorème : la coordonnée logarithmique

Hugues Genvrin

29 mai 2026

## Préambule

Ce théorème est la version reformulée du premier théorème vers la physique du grain. La transformation logarithmique n'est plus présentée comme une projection analytique *ad hoc*, mais comme la *coordonnée canonique de la stratification réduite*. Sa justification repose sur deux propriétés intrinsèques au programme du grain :

1. *Linéarisation* : la stratification est multiplicative (sortie de  $\widetilde{\mathbb{R}}|k$  vers  $\widetilde{\mathbb{R}}|k + 1$  par produit). Le logarithme rend ce passage additif.
2. *Réduction de magnitude* : le logarithme transforme les invariants stratals exponentiels (de la forme  $2^{n_\infty}$ ) en invariants polynomiaux (de la forme  $n_\infty \ln 2$ ), strictement inférieurs et plus proches du standard.

Cette double propriété fait du logarithme la coordonnée naturelle pour décrire la stratification depuis l'intérieur. La métrie stratale qui en découle n'est plus une projection vers une métrie standard, mais *la métrie propre* de la stratification réduite.

**Référence implicite.** *Axiomatique du grain, Symétrie de résolution* (théorème de factorisation), et *Intégrales divergentes*.

## 1 La refactorisation et ses deux lectures

### 1.1 La refactorisation par homothétie

**Proposition 1** (Refactorisation  $-2n_\infty \rightarrow -n_\infty$ ). *La refactorisation entre les résolutions  $-2n_\infty$  et  $-n_\infty$  s'effectue par homothétie globale de rapport  $2^{n_\infty}$  sur la longueur totale, conservant le cardinal des éléments :*

$$(1, 2^{2n_\infty}, 1/2^{2n_\infty}) \xrightarrow{h^{2n_\infty}} (2^{n_\infty}, 2^{2n_\infty}, 1/2^{n_\infty}).$$

*La relation fondamentale  $\mathcal{L} = |\mathcal{L}| \cdot \epsilon$  est préservée.*

*Démonstration.* Vérification directe :

$$1 = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{1}{2^{2n_\infty}}, \quad 2^{n_\infty} = 2^{2n_\infty} \cdot \frac{1}{2^{n_\infty}}. \quad \checkmark$$

Géométriquement, l'opération est l'homothétie de centre  $O$  et de rapport  $2^{n_\infty}$  appliquée au cercle entier. Tous les grains héritent proportionnellement de la dilatation : opération *globalement homogène*.  $\square$

## 1.2 La lecture dans $\mathbb{R}$ standard

La factorisation  $f = (2^{n_\infty}, 2^{2^{n_\infty}}, \frac{1}{2^{n_\infty}})$  est sur le corps étendu  $\widetilde{\mathbb{R}}$ . Pour se représenter les distances entre éléments de  $\mathcal{G}_{-2^{n_\infty}}$  relativement à ceux de  $\mathcal{G}_{n_\infty}$ , il est nécessaire de refactoriser  $f$  sur le corps standard  $\mathbb{R}$ . Autrement dit il faut rester dans le même grain de base du zéro d'épaisseur  $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ , mais il faut ramener  $2^{n_\infty}$  en  $n_\infty$ . Pour cela nous faisons une factorisation logarithmique de  $f$  qui nous amène à l'expression  $f = (n_\infty \ln 2, 2^{2^{n_\infty}}, \epsilon_h)$ . Où  $\epsilon_h$  est un grain d'épaisseur hétérogène, qui s'appuie sur un zéro d'épaisseur  $\frac{1}{2^{n_\infty}}$ , pris dans une échelle logarithmique.

## 2 La transformation logarithmique comme inverse arithmétique

### 2.1 Formulation

**Définition 1** (Transformation logarithmique). *La transformation logarithmique entre strates est l'application*

$$T : \widetilde{\mathbb{R}}_*^+ \longrightarrow \widetilde{\mathbb{R}}, \quad y \longmapsto \log_2 y.$$

**Théorème 1** (Linéarisation et réduction). *La transformation logarithmique  $T$  accomplit deux opérations simultanées sur les invariants de la stratification :*

1. **Linéarisation de la stratification.** *Le passage entre strates, qui est multiplicatif sur les positions ( $x \in \widetilde{\mathbb{R}}|k \cdot x \in \widetilde{\mathbb{R}}|k' \rightarrow xy \in \widetilde{\mathbb{R}}|k + k'$ ), devient additif dans la coordonnée  $T$  :  $T(xy) = T(x) + T(y)$ .*
2. **Réduction de magnitude des invariants.** *L'invariant stratal  $2^{n_\infty}$  (à la borne supérieure de  $\widetilde{\mathbb{R}}|1$ , de type exponentiel) est transformé en  $T(2^{n_\infty}) = n_\infty$  (strictement à l'intérieur de  $\mathbb{R}|1$ , de type polynomial) :*

$$T(2^{n_\infty}) = n_\infty < 2^{n_\infty}.$$

*Plus généralement,  $T(2^{kn_\infty}) = kn_\infty$  : les invariants de type  $\widetilde{\mathbb{R}}|k$  (exponentiels) deviennent des invariants polynomiaux d'un ordre inférieur.*

*Démonstration.* (1) Propriété fondamentale du logarithme :  $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$ . La stratification multiplicative devient additive dans cette coordonnée.

(2) Calcul direct :  $\log_2(2^{n_\infty}) = n_\infty$ . L'inégalité  $n_\infty < 2^{n_\infty}$  est le théorème 5 de l'*Axiomatique du grain* (comparaisons fondamentales). Donc  $T$  ramène strictement la magnitude.

Pour les strates supérieures :  $\log_2(2^{kn_\infty}) = kn_\infty$ , et  $kn_\infty < 2^{kn_\infty}$  par récurrence sur le même théorème.  $\square$

**Remarque 1** (Interprétation arithmétique). *Le théorème exprime ce que le logarithme fait depuis l'intérieur du programme du grain : il réduit l'ordre de grandeur sans quitter la strate  $\widetilde{\mathbb{R}}|1$ , et il linéarise les opérations de stratification.*

*Cette double propriété est essentielle. Le logarithme n'est pas une projection vers l'extérieur (vers  $\mathbb{R}$  standard) : il est l'opération arithmétique intrinsèque qui exprime au mieux la stratification multiplicative en termes additifs.*

### 2.2 Calcul explicite

**Proposition 2** (Action de  $T$  sur les positions polynomiales). *Pour  $x \in \widetilde{\mathbb{R}}_*^+$  standard, on a :*

- $T(x) = \log_2 x \in \mathbb{R}$  (standard).
- $T(x^2) = 2 \log_2 x \in \mathbb{R}$  (standard, multiplié par 2).
- $T(x^k) = k \log_2 x \in \mathbb{R}$  pour tout  $k$  standard.

*Pour les éléments strataux :*

- $T(2^{n_\infty}) = n_\infty \in \widetilde{\mathbb{R}}|1$ .

- $T(2^{2n_\infty}) = 2n_\infty \in \widetilde{\mathbb{R}}|1$ .
- $T(\Delta x) = T(2\pi/2^{n_\infty}) = \log_2(2\pi) - n_\infty \in -\widetilde{\mathbb{R}}|1$ .

**Remarque 2** (Interprétation de  $T(x^2) = 2\log_2 x$ ). *L'expression  $T(x^2) = 2\log_2 x$  formalise précisément l'intuition de départ : la position  $x^2 \in \mathcal{B}_{-2n_\infty}$ , lorsqu'elle est exprimée dans la coordonnée logarithmique adaptée à la strate  $\mathcal{B}_{-n_\infty}$ , vaut  $2\log_2 x$ .*

*Ce facteur 2 reflète que la sortie de strate par multiplication ( $x \cdot x = x^2$ ) correspond, dans la coordonnée logarithmique, à un doublement additif. La stratification multiplicative est ainsi linéarisée de la manière la plus économique possible.*

### 3 La métrique stratale

**Définition 2** (Métrique stratale). *Sur  $\widetilde{\mathbb{R}}_*^+$ , on définit la métrique stratale  $d_\sigma$  comme distance euclidienne tirée en arrière par  $T$  :*

$$d_\sigma(x, y) := \ln 2 \cdot |T(x) - T(y)| = |\ln(y/x)|.$$

*Le facteur  $\ln 2$  provient du passage de la base 2 à la base  $e$ , choix de convention sans incidence structurelle.*

**Théorème 2** (Métrique stratale).  *$d_\sigma$  est une métrique sur  $\widetilde{\mathbb{R}}_*^+$ , satisfaisant :*

1. **Positivité** :  $d_\sigma(x, y) \geq 0$ , égalité ssi  $x = y$ .
2. **Symétrie** :  $d_\sigma(x, y) = d_\sigma(y, x)$ .
3. **Inégalité triangulaire**.
4. **Identification standard** : pour  $x, y \in \mathbb{R}_*^+$ ,  $\text{st}(d_\sigma(x, y)) = |\ln(y/x)|$ .

*Démonstration.*  $d_\sigma$  est définie comme distance euclidienne tirée en arrière par l'injection  $T$ , donc automatiquement une métrique sur la pré-image.

L'identification standard découle du fait que pour  $x, y$  standards,  $\log_2 x, \log_2 y \in \mathbb{R}$  et  $\ln 2 \cdot |\log_2 y - \log_2 x| = |\ln(y/x)|$ . □

### 4 Extension symétrique à $\widetilde{\mathbb{R}}_*$

**Définition 3** (Métrique stratale étendue). *Pour  $x, y \in \widetilde{\mathbb{R}}_*$ , on pose*

$$d_\sigma(x, y) := d_\sigma(|x|, |y|) = |\ln(|y|/|x|)|.$$

*La courbure se comporte symétriquement par rapport à l'origine.*

**Proposition 3** (Propriétés de l'extension). 1.  *$d_\sigma$  reste une métrique sur  $\widetilde{\mathbb{R}}_*$ .*

2. *Invariance par symétrie centrale* :  $d_\sigma(-x, -y) = d_\sigma(x, y)$ .
3. *Invariance par homothétie multiplicative* : pour  $\lambda \in \widetilde{\mathbb{R}}^*$  avec  $|\lambda|$  non infinitésimal,

$$d_\sigma(\lambda x, \lambda y) = d_\sigma(x, y).$$

### 5 Conséquences immédiates

**Corollaire 1** (Distance stratale entre  $x^2$  et  $x$ ). *Pour  $x \in \widetilde{\mathbb{R}}_*^+$  standard,  $x > 0$  :*

$$d_\sigma(x^2, x) = |\ln x|.$$

**Remarque 3** (Lecture). La distance stratale entre  $x^2$  et  $x$  est  $|\ln x|$ , qui s'interprète comme la quantité de changement de stratification nécessaire pour passer de  $x^2 \in \mathcal{B}_{-2n_\infty}$  à  $x \in \mathcal{B}_{-n_\infty}$ .

Le logarithme apparaît ici non pas ad hoc, mais comme conséquence directe du Théorème 1 :  $T(x^2) - T(x) = 2 \log_2 x - \log_2 x = \log_2 x$ , multiplié par  $\ln 2$  pour le passage en base  $e$ .

**Corollaire 2** (Dualité  $\iota$  et métrique stratale). L'involution multiplicative  $\iota : x \mapsto 1/x$  est une isométrie pour la métrique stratale :

$$d_\sigma(\iota(x), \iota(y)) = d_\sigma(x, y).$$

**Remarque 4** (Lecture par  $T$ ). L'inversion  $\iota$  correspond, dans la coordonnée  $T$ , à la symétrie  $u \mapsto -u$ . Cette symétrie préserve les distances euclidiennes sur  $\widetilde{\mathbb{R}}$ , donc  $\iota$  préserve  $d_\sigma$ .

**Corollaire 3** (Lien avec l'intégrale du Volume III). La distance stratale entre la finesse élémentaire  $\Delta x = 2\pi/2^{n_\infty}$  et l'unité 1 vaut

$$d_\sigma(\Delta x, 1) = |\ln \Delta x| = n_\infty \ln 2 - \ln(2\pi).$$

Cette quantité, dans  $\widetilde{\mathbb{R}}|1$ , est précisément l'intégrale logarithmique stratifiée du Volume III.

## 6 Synthèse

- L'objet primitif est la *transformation logarithmique*  $T$ , justifiée par sa *double propriété arithmétique intrinsèque* : linéarisation de la stratification multiplicative et réduction de magnitude des invariants stratals (passage d'exponentiels en polynomiaux).
- La *métrique stratale*  $d_\sigma$  est dérivée de  $T$  comme distance euclidienne tirée en arrière, et coïncide modulo infinitésimaux avec la métrique multiplicative classique sur  $\mathbb{R}_*^+$ .
- Le logarithme ne projette pas vers l'extérieur du programme : il est la *coordonnée canonique de la stratification réduite*, opération arithmétique intrinsèque au procédé du grain.
- L'extension à  $\widetilde{\mathbb{R}}_*$  par valeur absolue est cohérente avec l'extension symétrique par rapport à l'origine.
- L'expression intégrale  $d_\sigma(x, y) = |\int_x^y du/u|$  reste valable comme forme analytique secondaire, mais le fondement conceptuel est désormais la transformation  $T$ .